DEPARTAMENTO CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

IISEM-V

II SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Memorias

"Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología"

-Inteligencia Creativa al Servicio de la Educación y el Aprendizaje-

Tomo I

Conferencias
Paneles

MAYO'2021

II SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual
II SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología : tomo I : conferencias paneles / compilación de Jorge E. Sagula ; Diego O. Agudo. - 1a ed. - Luján : EdUnLu, 2021.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3941-66-5

1. Matemática. I. Sagula, Jorge E., comp. II. Agudo, Diego O., comp. III. Título.
CDD 510.72

ISBN 978-987-3941-66-5

9 789873 941665

II SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Memorias del II SEM-V
Tomo I
Mayo'2021
Editor Científico: Jorge E. SAGULA
Compilador: Jorge E. SAGULA
Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

Prólogo

A los 13 días del mes de mayo del año 2021, y en su mes histórico, comienza con duración de Dos (2) días, la segunda edición del SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo pasado, en el mes de mayo del año 1999, en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján.

La idea original, concebida en 1998 y testeada en distintos escenarios de la Educación Superior en Argentina y en el exterior, y como consecuencia de mis participaciones en diferentes espacios de Educación Matemática fuera de Argentina, permitió sembrar semillas cognitivas para potenciar a la Matemática en un país tenedor de Tres (3) Premios Nobel en Ciencias, y cuyo derrotero en Ciencias Matemáticas tuvo momentos de muy alto nivel y posicionamiento en varios países de América y Europa.

Por distintas razones no de carácter educativo, las ediciones presenciales (12) se vieron interrumpidas, pero la Pandemia 2020, en sus inicios permitió potenciar el encendido de un motor cognitivo para dar paso a una nueva modalidad, el SEM-Virtual, cuya primera edición celebrada en agosto'2020 permitió no sólo recordar el espacio cognitivo para la Educación Matemática en distintas líneas y en distintos niveles sino recrear los núcleos de docentes-investigadores prestos a verter sus conocimientos en aras de su vocación y pasión: ENSEÑAR MATEMÁTICA PARA MEJORAR EL APRENDIZAJE.

Por tal razón, y respondiendo a las autoridades de la Universidad Nacional de Luján, acercamos a la Comunidad de la Educación Matemática esta nueva edición, el II SEM-V para seguir su derrotero, en pos de "Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología", con el propósito de propender a la disponibilidad de "Inteligencia Creativa al Servicio de la Educación y el Aprendizaje".

Jorge E. SAGULA
Chivilcoy, 30 de abril de 2021.

Índice Modalidad

CA: Contexto Abierto

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-1: MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

GTD-2: FORMALISMOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y HEURÍSTICA EN MATEMÁTICA Y EN INTELIGENCIA ARTIFICIAL

GTD-3: CREATIVIDAD Y JUEGOS EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

GTD-4: EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

DEPARTAMENTO CIENCIAS BÁSICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

IISEM-V

II SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Índice de Comunicaciones Breves

Índice de Comunicaciones Breves

Índice de Comunicaciones Breves

Índice de Comunicaciones Breves

PANEL DE APERTURA

"EDUCACIÓN MATEMÁTICA, CLAVE EN EL APRENDIZAJE EN LA MODERNIDAD"

Moderador

Lic. Jorge E. SAGULA
Universidad Nacional de Luján y UCP, Argentina

Orden de Disertaciones

Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

La formación de los docentes de Matemática en todo nivel escolar y universitario: primero Matemática y después Didáctica de la Matemática

¿Realmente deseamos que la Educación matemática sea clave para aprender una Matemática que abra el camino hacia el futuro, considerando la modernidad, sus nuevas visiones éticas, sus amplias posibilidades? Si la respuesta es afirmativa, es necesario recordar un aspecto que parece estar cada vez más olvidado: No es posible enseñar X si no se conoce X. Con esta premisa es obvio que la formación en X es indispensable. Pero, ¿qué significa esta expresión? No debe olvidarse la lección de Felix Klein. Hoy existe la Didáctica de la Matemática que no se identifica con lo que algunos llaman Pedagogía de la Matemática o Divulgación Matemática. La Didáctica de la Matemática es una Matemática Aplicada, aplicada a los problemas del aprendizaje. ¡Eso es todo lo que se necesita!

Salvador LLINARES
Universidad de Alicante, España

Formación de Profesores: Registros de la Práctica y Desarrollo de Competencias Docentes

¿Cómo sustentar esta presentación? Mediante tres ideas centrales:

a. El profesor de matemática es un elemento clave en la enseñanza de las matemáticas y en el aprendizaje matemático de los estudiantes. Así, los programas de formación de profesores de matemáticas deberían ser un factor relevante en los sistemas educativos.
b. El carácter práctico de la enseñanza de las matemáticas define aproximaciones a la formación de profesores que vinculan el conocimiento teórico y los procesos de razonamiento de los profesores en las situaciones de enseñanza.
c. Desde algunas perspectivas teóricas sobre el aprendizaje de los profesores de matemáticas se aboga por introducir en los programas de formación el uso de registros de la práctica en carácter de apoyo para el desarrollo de competencias docentes.

Juan DÍAZ GODINO
Universidad de Granada, España

¿Cómo salvar la brecha entre la investigación y la práctica en Educación Matemática?

Como profesores e investigadores de matemática, nos interesa encontrar respuestas a las preguntas sustantivas que plantea la práctica docente: ¿Qué matemática debemos enseñar a nuestros alumnos? ¿Cómo debemos enseñar estos contenidos matemáticos específicos para favorecer el aprendizaje de los alumnos? Desde el punto de vista de la investigación científica, estas preguntas, se consideran ingenuas y se deben formular en términos más específicos, aplicando herramientas teóricas sobre el aprendizaje y la enseñanza, lo cual induce un distanciamiento de la práctica de la enseñanza.
Aquí, presentaré como tema de discusión el rol de las investigaciones de diseño instruccional, básicamente predictivas, como un puente entre la investigación descriptiva y explicativa y los problemas de la práctica docente. No obstante, considero necesario elaborar una interfaz valorativa-normativa entre las investigaciones de diseño y la práctica docente, la cual puede ser desempeñada por la Teoría de la Idoneidad Didáctica.

Vicenç FONT
Universitat de Barcelona, España

Algunas Tendencias en Educación Matemática relacionadas con la pandemia COVID-19

¿Qué será de la Educación Matemática después de la pandemia COVID-19? Para responder esta pregunta se señalan algunas tendencias en Educación Matemática que pueden continuar luego de la pandemia, a saber: 1) Un incremento en investigación sobre las acciones tomadas por los profesores en general (y los de matemática, en particular) en este período de pandemia; 2) Un aumento de la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas cuando la tecnología, además de ser un recurso, es innegablemente, el medio; 3) Investigar con más determinación: a) problemáticas no consideradas previamente, o bien que se han dejado de lado, b) áreas que ya están siendo muy investigadas, pero que la pandemia ha puesto especialmente el foco en ellas; 4) Cambios en el tipo de congresos que hará la comunidad interesada en la Educación Matemática.

Fredy E. GONZÁLEZ
Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Brasil

¿Qué se requiere para que la Educación Matemática sea verdaderamente valorizada como una de las claves en el Aprendizaje?

Sobre la importancia de la Matemática como ciencia y de su enseñanza en las escuelas no parece existir polémica alguna. Pero, ¿de dónde proviene esa importancia? ¿Por qué aun considerándosela como una clave en el aprendizaje, se exhiben altos niveles de rechazo hacia ella? A mi juicio, tal situación se asocia con los obstáculos didácticos generados por malas prácticas que se ponen en juego en los procesos asociados con su enseñanza y su aprendizaje. Cabe preguntarse: ¿realmente, se está enseñando Matemática? Y más específicamente, ¿efectivamente, se está formando matemáticamente a las personas enseñando matemática como en forma generalizada se hace hoy?

Estimo que la valorización de la Matemática como una de las claves del aprendizaje depende mucho de cómo se desarrollan las prácticas pedagógicas y didácticas orientadas a garantizar su aprendizaje. Y, además, de la concepción que se suscriba en relación con ella.
Aquí, ofreceré algunas ideas para que la Educación Matemática, entendida como la formación matemática a la que toda persona tiene derecho, sea verdaderamente valorizada como una de las claves en el aprendizaje.

Eduardo MANCERA
Vicepresidente CIAEM, México

Lo que se puede desarrollar al involucrarse con las matemáticas

Desde el florecimiento de la cultura griega, ya había una tradición, cercana a las disciplinas mentales, que consideraba que la Matemática podía hacer que quienes las manejaran se desempeñarían mejor en otros campos del conocimiento. Actualmente, varios académicos parten de este supuesto y muchos maestros lo consideran vital para explicar a sus estudiantes el beneficio de cursar temas de matemáticas en su formación académica. Sin embargo, hay suficientes evidencias que muestran lo contrario, a pesar que hay evidencias que ratifican que esa concepción puede ser cierta. No hay suficientes trabajos relacionados con este tema, aunque, en distintas épocas se ha estudiado la transferencia de conocimiento o de algunas capacidades en matemáticas a otras disciplinas. Dejando de lado la discusión en cuestión, se pueden resaltar varias habilidades subyacentes en el trabajo matemático, posibles de desarrollar, desde la formación en matemáticas y pueden ser, en cierta forma, transferidas a otros campos del conocimiento, sobre todo al requerir la construcción de argumentaciones, la generación de diversas perspectivas para abordar ciertos problemas o plantear generalizaciones de algunos procesos realizados. En este tipo de habilidades descansan componentes importantes del pensamiento matemático, así como la creatividad y la posibilidad de desempeñarse con cierta eficiencia en procesos ajenos, en apariencia, a las matemáticas.

PANEL DE CLAUSURA

"CIENCIAS CONVERGENTES A LA MEJORA DEL APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Moderadora

Lic. Emma S. FERRERO
Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina

Orden de Disertaciones

Dr. Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina

La convergencia de las ciencias en la enseñanza: ¿qué desafíos y dificultades les plantea a los profesores de Matemática?

Enseñar Matemática en el nivel superior pone al profesor en una situación desafiante, pues requiere tener conocimiento y dominio de las aplicaciones reales de las diferentes ciencias en la resolución de problemas genuinos. Habitualmente, a los estudiantes, se les ofrecen problemas de realidades falseadas y manipuladas, que rara vez tienen contextos reales y que sólo tienen como intención enfatizar la aplicación de un algoritmo, rutina o técnica básica de Matemática. En este sentido, se analizarán posibles caminos para superar esta brecha, sobre la base de estos cuestionamientos: ¿Por qué es necesario y se debe enseñar este contenido? ¿Qué problemas resuelve? ¿Qué contextos le dan sentido y significado a lo que se está desarrollando? Encontrar respuestas para estas preguntas podría ayudar a lograr que lo que se hace en una clase de Matemática sea significativo para el estudiante y constituya el puntapié inicial para utilizar ciencias convergentes en la mejora del aprendizaje.

Dr. Juan NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia - UNNE, Argentina

Interpretación geométrica de las integrales fraccionarias y generalizadas

Uno de los problemas que se estudia en el Cálculo Diferencial e Integral I, es el del cálculo del área bajo la curva, en otras palabras, calcular el área de regiones planas no expresables en términos de figuras elementales, usando la integral definida. En las investigaciones actuales, la generalización de la Integral de Riemann al caso fraccionario y generalizado, ocupa un lugar central, y se han multiplicado los resultados y la cantidad de investigadores dedicados a estos temas, sobre todo en los últimos 40 años.
La discusión y análisis, de la interpretación geométrica de Integrales Fraccionarias y Generalizadas, en términos de "un área bajo una cierta curva", puede favorecer a los docentes, para la superación de dificultades de aprendizaje relacionadas con el tema.

Dra. Carina S. GONZÁLEZ GONZÁLEZ
Universidad de La Laguna, Tenerife, Islas Canarias, España

Personalización de la gamificación: retos y desafíos para una mejor experiencia de aprendizaje

La gamificación es la utilización de mecánicas y elementos de los juegos en contextos diferentes al del juego. Habitualmente, se utilizan técnicas de gamificación para motivar a los usuarios, así como para modificar su comportamiento.
El objetivo principal de la gamificación yace en brindar una experiencia agradable a los usuarios y en la actualidad se aplica, prácticamente en todas las áreas, desde la educación misma a los negocios.
Aquí, abordaré los enfoques de gamificación tradicionales, como también otros enfoques de gamificación que combinan el poder de los datos, las conductas, elementos de la psicología y de las neurociencias.
Y presentaré diferentes técnicas de gamificación y sus aplicaciones, así como los retos y desafíos a los que se enfrenta el área para proporcionar una mejor experiencia al usuario.
Este es un escenario donde puede abrevar la Educación Matemática.

Dr. Marcelo F. MILRAD
Linnaeus University, Suecia

Oportunidades y desafíos de la Inteligencia Artificial en el contexto de la Educación Matemática

Las tecnologías digitales están cambiando la forma de "cómo" realizamos muchas de nuestras tareas cotidianas, entre ellas: compras on-line, clases virtuales, consultas electrónicas en el área de salud, etc. En gran parte de estas áreas, la Inteligencia Artificial (IA) hace tiempo surge ofreciendo diferentes productos y servicios digitales.
La IA en Educación (IAED) es un enfoque usado para el diseño y el soporte del aprendizaje en distintas situaciones independientes del tiempo, el espacio y el contexto basado en el uso de sobradas herramientas y técnicas propias de la IA.
La situación actual del mundo, caracterizada por alto nivel de incertidumbre, nos hacen repensar nuevas formas y modelos sobre la potencialidad de la IA en diferentes contextos educativos.
En este panel presentaré algunas de estas oportunidades y sus consecuentes desafíos asociados en el contexto educativo y el uso de la IA, enfatizando en la importancia del pensamiento matemático y computacional como herramientas fundamentales para poder enfrentar tales desafíos.

Lic. Jorge E. SAGULA
Universidad Nacional de Luján-DCB y UCP, Argentina

El Reconocimiento de Patrones, la Teoría de Juegos y las Redes en dinámica alianza con la Educación Matemática

Desde hace siglos, la Teoría de Juegos y las Redes, consecuencia devenida desde la Teoría de Grafos se han ayudado entre sí, tanto en representación como en modelado, ya sea desde la abstracción como desde el análisis fenomenológico de situaciones reales, muchas veces mediante la Estadística, la Probabilidad y fundamentalmente, desde el siglo XX por la Investigación de Operaciones, un apéndice explícito de la Matemática Aplicada, y por las Ciencias de la Computación, con énfasis en la Inteligencia Artificial desde la **Necesidad de Resolver Situaciones**

Reales desde la Inteligencia Humana o la Inteligencia Animal. Esto evidencia que la Matemática, a través de la Matemática Aplicada tiene mucho que transferir a Procesos de Aprendizaje, inspirados desde el Reconocimiento de Patrones hacia la Teoría de Juegos no sólo en la visión estratégica sino en los procesos racionales para concretar estrategias en búsqueda de puntos de equilibrio, así como en las Redes, precisamente desde el nacimiento de la Teoría de Grafos, pasando por las Redes Semánticas para llegar a una parte de la actualidad que nos engloba, las Redes Sociales.
Quizás, por eso, paradigmáticamente en un futuro se pueda reflejar que la Educación Matemática tome un camino hacia **la Convergencia de Distintas Ciencias en la Mejora del Aprendizaje**, y en tal instancia, sea una consecuencia de la Inteligencia Colectiva, tanto en la mirada de Pierre LEVY como de George PÓR.

Investigar en Educación Matemática: una responsabilidad de los matemáticos

Bruno D'AMORE
NRD, Departamento de Matemática
Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen

En algunos países aún se mantiene una especie de aversión hacia la investigación en Educación Matemática. Algunos matemáticos no aprecian su contenido, considerándolo más apropiado para pedagogos o psicólogos. En este texto, el autor ofrece algunos ejemplos de investigación que muestran que una investigación seria en Educación Matemática debe ser necesariamente realizada por matemáticos.

Palabras clave: Dificultad en el Aprendizaje de la Matemática. Límite. Demostración. Área y Perímetro.

1. El Límite: uno de los conceptos clave de la Matemática; uno de los obstáculos más comunes en el Aprendizaje de la Matemática

Creo que todos nosotros docentes de Matemática antes o después hemos tenido que enfrentarnos a la enseñanza del límite; y para esto presentamos esta elegante definición formal:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

para darnos cuenta inmediatamente después que el conjunto de los alumnos que la había entendido *tiende* al vacío …

A este punto intentamos dar una explicación eliminando algo del formalismo, por ejemplo, con una frase del tipo, un poco más larga, pero expresada en lenguaje natural:

«l es el límite de $f(x)$ para x que tiende a x_0 si para todo número real ε>0 existe un número real positivo δ tal que, si $0< |x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$»

En la mayoría de los casos, nos damos cuenta que el conjunto de estudiantes que manifiesta entender esta definición no aumenta gran cosa su cardinalidad.

Y es entonces cuando metemos en campo todos nuestros conocimientos… narrativos, eliminando el formalismo y describiendo con palabras lo que sucede cuando hablamos de límite.

«Sea dada una función $f : X \rightarrow R$ definida en un subconjunto X de R y un punto de acumulación x_0 de X. Un número real l es el límite de $f(x)$ para x que tiende a x_0 si, fijado arbitrariamente un valor ε de la distancia entre $f(x)$ y l, se encuentra, en correspondencia de este, un valor δ de la distancia entre x y x_0 para el cual, por todos los x, excluido x_0, que distan de x_0 menos de δ, se tiene que $f(x)$ dista de l menos de ε».

No obstante nuestros generosos esfuerzos, parece que este misterioso objeto matemático queda siempre tal, misterioso; la Didáctica de la matemática (que aquí traduciremos Educación matemática), aquella estudiada y estructurada por los matemáticos, ha sugerido varias hipótesis para explicar esta evidente dificultad, comprobadas por investigaciones de prestigio, por ejemplo la existencia de una fuerte contraposición entre el infinito actual y la presencia de un infinito potencial: "punto de acumulación" es infinito actual, "que tiende a" es infinito potencial. Hay varios estudios sobre esta gran dificultad, investigaciones hechas por matemáticos.

Otros ejemplos de obstáculos y misconcepciones relativos al aprendizaje del infinito:

a) Confusión entre términos considerados por muchos equisignificantes al *apeiron* griego: ilimitado, indefinido, infinito.

b) El infinito interpretado como número grande.

c) Las investigaciones de Arrigo y D'Amore (Arrigo & D'Amore, 1998, 1999, 2004) muestran que están radicadas profundamente en los estudiantes dos concepciones que deben eliminadas lo más pronto posible:

aplastamiento: todos los conjuntos infinitos tienen la misma cardinalidad;

dependencia: el cardinal de un conjunto infinito depende de su extensión; por ejemplo, si se tienen dos segmentos de diferente medida, el segmento de mayor medida tiene más puntos.

d) Se lee en un libro: «Un conjunto se dice infinito cuando contiene infinitos elementos».

Mejor no hacemos comentarios; ciertamente, libros así no ayudan mucho

Es obvio que solo un matemático puede entender esto tipo de problemas didácticos.

2. La suma de competencias sobre argumentos específicos no garantiza la competencia sobre los argumentos que son la suma de estos

Cuando nos acercamos a la historia de la Matemática, una de las cuestiones que más sorprende es el contenido de una célebre y extraordinaria carta de Georg Cantor (1845-1918) a Richard Dedekind (1831-1916), enviada desde Halle el 29 de junio de 1877.

Dado que Dedekind se retrasaba (!) en dar respuesta a un problema que le había propuesto el 25 de junio, Cantor, después de sólo 4 días, y pidiendo disculpas por el proprio *celo,* propone con fuerza, en la carta del 29 de junio, una nueva interrogación, declarando tener *necesidad* de recibir la opinión de Dedekind.

Casi al inicio de esta nueva carta (en alemán), Cantor escribe (en francés) la famosa frase:

«Mientras que usted no lo apruebe, yo no puedo más que decir: lo veo, pero no lo creo».

Sobre este punto véase (Arrigo & D'Amore, 1992). [Para conocer los textos completos de las cartas intercambiadas entre los dos formidables matemáticos alemanes, se puede ver (Noether & Cavaillès, 1937) y (Cavaillès, 1962)].
Espontáneamente surge la siguiente pregunta: ¿cuál sería el argumento sobre el cual Cantor solicitaba una rápida respuesta de Dedekind? Nos lo dice el mismo Cantor en su carta del 25 de junio: «Una variedad continua de *p* dimensiones, con $p>1$, ¿se puede poner en relación unívoca con una variedad continua de dimensión uno, de manera tal que a un punto de una corresponda uno y sólo un punto de la otra?».
Debemos decir inmediatamente que, en aquella época, se entendía por "relación unívoca" lo que hoy llamamos "correspondencia biunívoca".
Para que nos puedan entender estudiantes o docentes no especialistas nos podemos concentrar en el siguiente caso, particular, pero igualmente significativo:
¿es posible hallar una correspondencia biunívoca entre los puntos de un cuadrado y los puntos de un segmento? (¿por ejemplo, de un lado del mismo segmento?)
Por "cuadrado" entendemos, de ahora en adelante, una superficie plana con forma cuadrada *abierta*, es decir sin borde. De ahora en adelante, hablaremos de segmento *abierto*, es decir sin los extremos.
Se puede intuir la importancia de la pregunta a partir del siguiente comentario del mismo Cantor:
«La mayor parte de aquellos a quienes les he planteado esta pregunta se han sorprendido del hecho mismo de que yo la planteara, ya que es evidente que, para la determinación de un punto sobre una extensión de *p* dimensiones, se necesitan siempre *p* coordenadas independientes».
Cantor confesó a Dedekind que había intentado demostrar esta imposibilidad, suponiéndola verdadera, obvia, pero sólo ¡porque ya no estaba satisfecho de la supuesta y tan difundida *evidencia*!
Confiesa por lo tanto haber formado parte *siempre* de aquéllos que no ponían en duda tal hecho; *siempre* … hasta que demostró que las cosas no estaban así.
La demostración hallada por Cantor es de una simplicidad genial; para verla, basta consultar un buen libro de Análisis o Cálculo, por ejemplo, Bourbaki (1970, pp. 47-49).
Nosotros aquí nos inspiramos en una célebre vulgarización de la demostración de Cantor que se halla en Courant y Robbins (1941) relativa sólo al ejemplo visto líneas arriba.
Pongamos el cuadrado en un sistema de ejes cartesianos ortogonales de origen O, de manera tal que dos lados consecutivos se "apoyen" sobre los ejes (obviamente uno de los vértices coincide entonces con el origen). Considerando el lado del cuadrado como unidad de medida, se tiene inmediatamente que cada punto P interno a la superficie cuadrada tiene coordenadas reales x_P y y_P del tipo $0 < x_P < 1$, $0 < y_P < 1$, por lo tanto, explícitamente: $x_P = 0.a_1a_2...a_n...$, y $y_P = 0.\ b_1b_2...b_n...$ A cada pareja ordenada de números reales (x_P, y_P) hacemos corresponder el número real $x_{P'}$ definido de la siguiente manera: $x_{P'} = 0.a_1b_1a_2b_2...a_nb_n...$, obtenido anteponiendo 0 y el punto decimal, y alternando después las cifras decimales singulares de cada coordenada. Se puede fácilmente constatar que $0 < x_{P'} < 1$ y, como tal, $x_{P'}$ se define de manera univoca a partir de x_P y y_P; como $x_{P'}$ se puede considerar como abscisa de un punto P' en el eje *x* [P'($x_{P'}$,0)], se puede pensar, por lo tanto, P', como *el* correspondiente de P en la correspondencia definida.
Viceversa: se puede partir de P' y de su abscisa y, con el método inverso de distribución de las cifras, llegar unívocamente a P.
Por lo tanto, hemos probado este teorema de Cantor, al menos en el caso en el cual la dimensión *p* de la variedad vale 2: a los puntos internos del cuadrado unitario corresponden de manera biunívoca los puntos internos del segmento unitario.[1]
Nuestra investigación tiene motivaciones puramente didácticas y los párrafos anteriores tienen sólo el objetivo de situarla en el ámbito histórico.
Quisimos recordar lo anterior, sólo para justificar el título de nuestra investigación: *Lo veo, pero no lo creo*, la célebre frase de Cantor, que vuelve tan humana toda la historia de esta demostración; para nosotros esta frase es emblemática de aquello que podría decir también un estudiante de los años finales (grados 12 y 13) de la escuela secundaria superior (en Italia y Suiza: estudiantes entre 17 y 19 años), que tuviera que ver con la demostración tratada por Courant y Robbins (1941), e ilustrada por nosotros.
Argumentos de base necesarios para la demonstración: ejes cartesianos ortogonales monométricos.

[1] Podemos discutir sobre banales detalles en esta demostración, por ejemplo, prohibir el uso de los números reales escritos con 9 periódico; pero, para nuestro objetivo, podemos dejar las cosas así.

pareja ordenada (x_P ; y_P) de números reales como coordenadas de un punto P

números reales x_P

escritura formal $0<x_P<1$

Pasa un hecho curioso e interesante:
también si el estudiante demuestra conocer estos argumentos de base, NO entiende la demostración (85-90%) que se basa sobre estos hechos.
Esta situación la consideramos un tema que exige una fuerte reflexión de carácter didáctico que solo un matemático de profesión puede llevar a cabo.

3. La demostración nyaya

La escuela hindú nyaya (-II sec. – VII sec.) afirmaba la hegemonía de cuatro "medios de conocimiento" (pramana):
el testimonio
la analogía
la percepción
la inferencia
que examinaré detalladamente.
El testimonio (sabda) comprende todo aquello que es digno de fe ya sea escrito o transmitido oralmente. Forman parte de éste las oraciones, las revelaciones divinas, la historia transmitida, los poemas sagrados.
La analogía (upamana; hay quien la traduce "comparación" y quien "equivalencia") es la forma de razonamiento que lleva a una definición del objeto sobre la base de las semejanzas con otros. Nótese que la analogía nyaya clasifica los objetos en categorías o clases de analogías, distinguiendo dos clases entre ellas basadas en el hecho de que no tienen términos análogos. Ahora, dado que la analogía entre objetos existentes se debe a consideraciones relativas al objeto (y por tanto no abstractas, sino clasificables y experimentales), esta forma de conocimiento no puede dejar de llamar nuestra atención sobre algunas de las concepciones actuales, incluso en Matemática. Pensamos, por ejemplo, en geometría a las definiciones por género próximo y diferencia específica; o, aún más elocuente, a las definiciones llamadas analíticas que determinan clases por medio de un pasaje al cociente, por tanto, sobre la base a una relación de equivalencia (por ejemplo, la definición de Z a partir de N o de Q a partir de Z).
La percepción (pratyaska) es la relación entre objeto visible (es decir que cae bajo nuestros ojos) o de cualquier forma sensible (relación que surge del contacto de un objeto con algún órgano de los sentidos) y la imagen que tenemos del objeto. Dejando de lado las consideraciones relativas a los 6 sentidos que los filósofos nyaya reconocían en el hombre, recordamos la importancia que atribuían al sexto sentido, el intelecto (manas), a causa de la función de orden y de mediación que este "órgano" tiene, en relación con los otros cinco. Recordemos que los conceptos comunicables adquieren una realidad propia, en la filosofía nyaya, en contraposición con la pura imagen mental que le atribuían los budistas.
Y llegamos a la inferencia (anumana) que representa, en la escuela nyaya, el momento sublime.
No es muy conocido el llamado *silogismo* nyaya (lo llamaremos así tradicionalmente como se usa por su forma símil, en ciertos aspectos, o al menos en apariencia, con el silogismo aristotélico).
La nyaya distinguía en su silogismo cinco enunciados (y no tres como en el silogismo aristotélico):
(1) la afirmación (pratijna) (no demostrada: es el enunciado mismo que se quiere demostrar)
(2) la razón (hetu)
(3) la proposición general o enunciado (udaharana), seguida de un ejemplo
(4) la aplicación (upanaya), llamada también segunda afirmación
(5) la conclusión (nigamana).
El siguiente ejemplo es un clásico nyaya:
el objeto A se mueve (afirmación)
porque se le ha aplicado una fuerza (razón)
cada vez que se le aplica una fuerza a un objeto, este se mueve (proposición general); por ejemplo: si se amarran bueyes a una carreta, esta se mueve (ejemplo)
al objeto A se le aplicó una fuerza (aplicación)
por tanto
el objeto A se mueve (conclusión).

Es bastante fácil escribir en forma simbólica este razonamiento; lo hacemos como ejercicio. Antes de proceder, introduzcamos un simbolismo oportuno; sean: A, B objetos dados, X un objeto genérico;
P(X): el enunciado predicativo abierto "X se mueve"
F(X): "a X se le aplicó una fuerza".
El enunciado abierto F(X) es verdadero cada vez que, en el lugar de la variable X, se sustituye una constante A, tal que F(A) es verificable experimentalmente (en el sentido que: la verdad cae bajo los seis sentidos; esta es, al menos, la interpretación empírica nyaya).
El silogismo nyaya se puede interpretar ahora formalmente como sigue:

Afirmación	1	P(A)	Afirmación (aún no probada)
Razón	2	F(A)	Causa que se atribuye para que P(A) ocurra
Tesis	3	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$ Por ejemplo: $F(B) \rightarrow P(B)$	Proposición general Por ejemplo: $F(B) \rightarrow P(B)$
Aplicación	4	F(A)	Del caso general se vuelva al caso en examen: una fuerza ejerce una acción sobre A
Conclusión	5	P(A)	A se mueve

La clásica crítica budista rechaza el primero y el segundo momento, dado que estos no forman parte de un razonamiento verdadero y propio, sino que son englobados en una tesis.
Sin embargo, lo que deseo enfatizar es que esta aparente inútil pérdida de tiempo se hace generalmente en el razonamiento común, por ejemplo, en la acción didáctica: es decir, al inicio se evidencia lo que se desea demostrar al final; no se podría organizar *dicho* razonamiento de manera diferente. Sobre este punto volveré más adelante.
De todas formas, sin razón, los budistas rechazaron el quinto momento, en el cual se cumple una especie de *modus ponens* en el cálculo de los predicados, una operación lógicamente correcta y esencial al funcionamiento de este tipo de silogismo, que podríamos expresar formalmente como sigue:
$\{(\forall X)\ [(F(X)\rightarrow P(X)) \wedge F(X)] \ \rightarrow\ P(X)\} \ \rightarrow\ \{[(F(A)\rightarrow P(A)) \wedge F(A)] \ \rightarrow P(A)\}$
El análisis lógico del idioma, en relación con la estrecha conexión atribuida a la dicotomía lenguaje - pensamiento, lleva a los nyayas a definir una crítica exacta del lenguaje que se acerca a varios sistemas retóricos modernos.

Para los nyayas, son enemigos de la deducción correcta o del hablar correcto:
la ambigüedad (chala) que se realiza cada vez que un término viene usado inadecuadamente (en sustancia, se trata de un mal uso de la analogía);
la no conclusión (jati), discurso circular sin contenido;
los argumentos absurdos (nigrahastama); quien a estos recurre "no tiene lógica"; el destino de quien recurre a estos argumentos es el de ser dialécticamente vencido por quien opera con lógica y con argumentaciones racionales.
Los filósofos nyayas estudiaron después los casos en los cuales sus silogismos llevaban a sofismas; veamos los casos principales de esta deletérea reducción:
(1) inexacta correspondencia entre las diversas partes que constituyen el silogismo, por lo cual no hay relación entre los términos;
(2) absurdo intrínseco que aparece en un término que dice lo contrario de aquello que debería afirmar;
(3) absurdo explícito debido a la contraposición de dos términos del silogismo que se excluyen recíprocamente;
(4) la falta de demostración o de verificación de uno de los términos sobre los cuales se apoya el razonamiento;
(5) la falsedad del término mayor o la inexistencia del objeto en cuestión, o la atribución al objeto de falsas propiedades.

Sobre este último punto, se recuerda la posición de Aristóteles en relación con el conjunto vacío y la superación de dicha cuestión por parte de Gergonne (D'Amore, 2001, pp. 17-54).
De aquí se ve bien cómo la nyaya es diferente de la lógica aristotélica dado que se basa esencialmente sobre el control empírico, sobre el contacto con el mundo externo,[2] entendiendo por *mundo* no sólo el conjunto de las cosas y de los hechos sino también de los pensamientos, como si fueran entidades reales ("reales" no simplemente "existentes", para no pensar que se pueda hacer una comparación con el platonismo).
Necesitamos aquí recordar que nuestra actual distinción entre lógica de los enunciados y lógica de los predicados no hace justicia al efectivo desarrollo histórico de la disciplina; la lógica de los enunciados no es tan potentemente presente en la obra de Aristóteles como lo es hoy en cualquier tratado: esta deriva de los estudios de los filósofos Megáricos y Estoicos y, paradójicamente, se estableció más tarde, mientras la lógica de los predicados es esencialmente un medio para entender, desde un punto de vista moderno, la silogística de Aristóteles.
En el aula, en las lecciones de lógica en la escuela media superior (en Italia grados 9-13), se trata básicamente la lógica de los enunciados y se intenta aplicarla, como ejemplo, a las demostraciones sobre todo geométricas a las cuales no siempre, o no del todo, se adapta. Por ejemplo, en las demostraciones se necesita en muchas ocasiones cuantificar sobre las variables, aspecto que no tiene sentido en la lógica enunciativa.
Un análisis profundo de las formas de razonamiento y de sus modelizaciones lógicas por parte de expertos (matemáticos, docentes universitarios) y por parte de estudiantes (universitarios, a inicio de su formación profesional) fue hecha por Durand-Guerrier y Arsac (2003). Los autores muestran, entre otros aspectos, concepciones diversas del uso y de la necesidad de usar los cuantificadores en las demostraciones por parte de expertos y por parte del estudiante.
Llegamos al punto.
Muchos estudiantes de grados 9-11 (14-16 años) que demuestran teoremas (bueno: que *intentan* demostrar teoremas) lo hacen espontáneamente con esta forma demostrativa nyaya (D'Amore, 2005). El hecho de haber estudiado la lógica clásica de estilo aristotélico no ayuda para nada en el desarrollo de habilidades en la demostración.
En mi opinión sólo un profesional matemático puede entender lo que está pasando en el aula; los otros se limitarían a decir que los estudiantes non saben demonstrar…

4. <u>Área y Perímetro</u>

Los dos conceptos geométricos: *perímetro / área* de una figura plana, tienen muchos elementos en común sobre el plano científico, pero muchos otros son simplemente supuestos sobre el plano de las misconcepciones, comunes en los estudiantes (y no sólo) de todo nivel escolar.
Por ejemplo, la literatura ha demostrado ampliamente que gran número de estudiantes (y no sólo) está convencido que existe una relación de estrecha dependencia entre estos dos conceptos sobre el plano relacional, del tipo:
si A y B son dos figuras planas, entonces:
si (perímetro de A > perímetro de B) entonces (área de A > área de B)
ídem con <
ídem con = (por lo cual: dos figuras isoperimétricas son necesariamente equiextensas);
y viceversa, cambiando el orden "perímetro - área" con "área – perímetro".
Difícilmente este tema se propone didácticamente en forma explícita (según algunos docentes, por una supuesta dificultad).
Podemos pedirnos ahora si normalmente los docentes, sin importar el nivel escolar, tienen plena conciencia sobre el tema o si, por casualidad, también en algunos de ellos existen problemas de construcción conceptual.
Esta evidencia tiene que ver con el problema de las convicciones y de las concepciones de los docentes.
Un amplio cuadro teórico sobre este tema se puede encontrar en D'Amore y Fandiño Pinilla (2004); aquí nos limitaremos sólo a pocas palabras:

[2] Lo que no sólo no es contemplado, sino no del todo aceptado por la triunfante filosofía griega (Sócrates - Platón - Aristóteles) que, sobre este punto, en forma más o menos explícita, seguía rechazando la *doxa* a favor de la elección parmenidiana de la *aletheia.* Naturalmente, discursos aparte merecerían los intentos hechos por los Sofistas los cuales fueron doblegados por el triunfo de Aristóteles y de las (precedentes) argumentaciones dialógicas de Platón.

- *convicción* (belief) (o creencia): opinión, conjunto de juicios/expectativas, lo que se piensa a propósito de algo;
- el conjunto de las convicciones que alguien (A) tiene sobre algo (T) son las *concepciones* (K) de A relativas a T; si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los otros miembros de S dicho conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T.

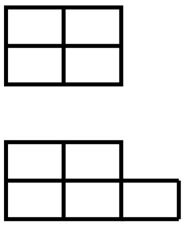
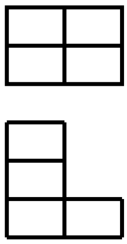
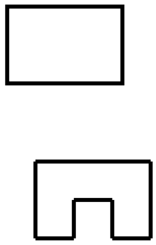
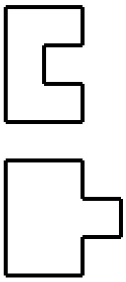
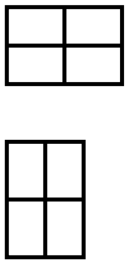
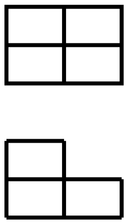
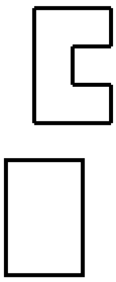
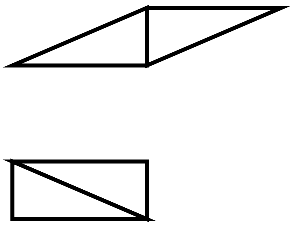
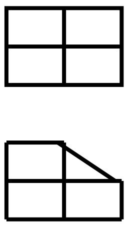
A veces, al puesto de “concepción de A relativa a T”, se habla de “imagen que A tiene de T”.
Juega además otro factor importante, evidenciado por Azhari (1998); trataremos de decirlo en forma breve: si existen dos relaciones ligadas mutuamente, el estudiante intenta aplicar la siguiente “ley de conservación”:
si una determinada cosa crece, también esta otra, con la cual está relacionada, crece (y viceversa).
Ahora, el ejemplo que liga entre sí perímetro y área parece caer como anillo al dedo en las consideraciones de Azhair (es más, este es precisamente uno de los ejemplos ofrecidos en este trabajo, citado por Stavy y Tirosh, 2001).
Si ponemos en relación los perímetros de dos figuras A y B, con las respectivas áreas, nos parece que una forma convincente de evidenciar que las “leyes” enunciadas líneas arriba NO sean válidas, sea la de dar un ejemplo para cada uno de los siguientes 9 casos posibles:

(p $=_{df}$ perímetro, A $=_{df}$ área)

p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La primera casilla > > dice: encontrar dos figuras tales que, pasando de la primera a la segunda, el perímetro crezca y el área crezca;
y así sucesivamente.
Para evitar dificultades, se pide siempre partir de figuras simples, como por ejemplo de un rectángulo, siempre que sea posible, haciendo diversas transformaciones sobre este o sobre figuras que se derivan de este.
Consideramos necesario aclarar que las figuras sobre las cuales conviene trabajar son las más elementales posibles para evitar complicaciones que se deriven de la figura misma.
Más adelante en el texto se da un ejemplo de cada una de las 9 situaciones indicadas, con figuras elementales. Estos ejemplos no fueron mostrados a los sujetos involucrados en la prueba, que se describe a continuación; cada sujeto debía proporcionar los ejemplos oportunos, por lo menos en una primera instancia.
Preguntas, metodología de investigación e hipótesis de respuesta en Fandiño Pinilla y D’Amore (2007b, 2009).
Sujetos de la investigación:
1: investigadores universitarios; 2: docentes todo nivel; 3: docentes en formación.
Titulo mínimo: grado universitario en Matemática.
Preguntas iniciales:
¿Es verdad o no es verdad que se pueden encontrar ejemplos para todos los 9 casos? ¿Es verdad o no es verdad que surge espontáneo pensar que, en general, al aumentar el perímetro de una figura plana, aumenta también el área? ¿Es verdad o no es verdad que se necesita hacer un esfuerzo, para *convencerse* que las cosas NO son así?
En la siguiente tabla los 9 ejemplos anunciados:

p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

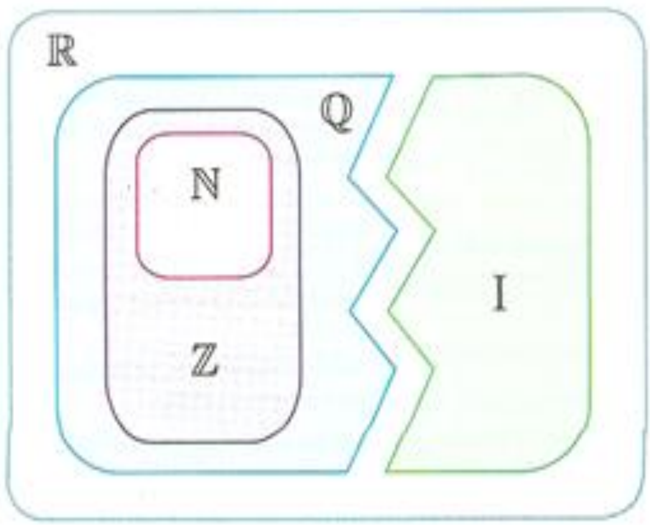
1 > > 	**2** > = 	**3** > < 
4 = > 	5 = = 	**6 =…<** 
7 <…> 	**8 <…=** 	**9** < < 

Parece un tema sencillo, pero solo encontramos matemáticos profesionales que aceptaron todo esto con cierta seguridad.

5. <u>Las Representaciones Semióticas de Conjuntos Infinitos</u>

En libros de texto universitarios se encuentran generalmente algunas representaciones semióticas erradas; el siguiente caso es un ejemplo de esta afirmación.

$R=Q\cup I$



Es obvio que sólo un matemático puede poner remedio a este tipo de cosas, de cierto no puede hacerlo un experto de otra disciplina.

6. Conclusiones

El objetivo de este texto es evidenciar el siguiente hecho: la Educación matemática debe ser dominio de estudio de matemáticos profesionales dado que los temas que afronta, los estudios que se revelan necesarios, las investigaciones que se requieren, *sin importar el nivel escolar*, pueden ser dominadas solo por quien tiene una fuerte competencia matemática, profunda, entonces un profesional de la Matemática. En algunos países, de hecho, la Educación matemática es una rama de la Matemática y no está encuadrada en Pedagogía, Psicología o Ciencias de la Educación.
En Italia, por ejemplo, la Unione Matematica Italiana (UMI) tiene una sección dedicada a la investigación en Educación matemática como la tiene para Álgebra, Geometría, Topología, Lógica…
En el Ministerio Italiano de la Universidad y de la Investigación (MIUR) la Educación matemática hace parte del agrupamiento disciplinar MAT04, por tanto, hace parte plenamente de la Matemática.
Existen cursos de Educación matemática que se siguen DESPUÉS de obtener el título en Matemática, por ejemplo, en los cursos de Maestría o Doctorado en Educación matemática.
En el julio del 2006 se celebró en el Departamento de Matemática de la Universidad de Torino (Italia) un congreso internacional sobre “Matemática y sus aplicaciones”, es decir un congreso de Matemática aplicada: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. La Educación matemática fue sido considerada “Matemática aplicada a las problemáticas del aprendizaje”.
Entre otras, se presentó la conferencia:
D’Amore B. & Fandiño Pinilla M.I.: How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2007a).
Fueron publicadas las Actas en un número especial de la revista internacional *La matematica e la sua didattica* de la cual soy director desde su fundación, hace 28 años; el editor de ese número especial fue: Ferdinando Arzarello, quien hasta hace pocos años era el presidente del ICME (International Congress on Mathematical Education).
En continuación al tema de investigación presentado en Torino por nosotros, se realizaron varias publicaciones y tesis de doctorado de investigación, por ejemplo, en Italia (Giorgio Santi, en inglés) y en Colombia (Pedro Javier Rojas Garzón, en español); ambas tesis fueron aprobadas con el máximo de la calificación.

¿Cómo puede ser realizable todo esto si se piensa que la Educación matemática no es tarea de los investigadores matemáticos universitarios, sino de expertos de otras disciplinas?

Sin embargo, en muchos países se piensa que deba ser así, con un grave daño para nuestra compleja y delicada disciplina la cual requiere y exige una competencia matemática decididamente profunda.

7. Referencias Bibliográficas

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992). *Infiniti*. Milano: Angeli ed.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998). Epistemological and didactical obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Proceedings of the I Cerme of Osnabrük*, agosto 1998.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). "I see it but I don't believe it…". Epistemological and didactic obstacles to the process of comprehension of a theorem of Cantor that involves actual infinity. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gand, Bélgica), *36*(1), 93-120

Arrigo, G. & D'Amore, B. (2004). Otros hallazgos sobre los obstáculos en la comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación Matemática* (México DF, México), *16*(2), 5-20.

Azhari, N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks*. Manuscrito no publicado, cit. en Stavy y Tirosh (2001).

Bagni, G. T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale ed attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 42, 9–20.

Bourbaki, N. (1970). *Éléments de Mathématiques - Théorie des ensembles - E III*. París: Hermann.

Cavaillès, J. (1962). *Philosophie mathématique*. París: Hermann.

Courant, R. & Robbins, H. (1941). *What is mathematics*? New York: Oxford Univ. Press.

D'Amore, B. (2001). Considerazioni attorno alla logica di Gergonne. En: D'Amore. B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Prólogo de Juan D. Godino. Bologna: Pitagora. Pp. 17-54.

D'Amore, B. (2005). Secondary school students' mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the learning of mathematics*, *25*(2), 26-32.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*, *18*(3), 27-50.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n. 1, pp. 87-92. Annals of Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 julio 2006. ISSN: 1120-9968.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2007b). Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. *Relime* (México DF), *10*(1), 39-68.

Durand-Guerrier, V. & Arsac, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *23*(3), 295-342.

Fandiño Pinilla, M. I. & D'Amore. B. (2009). *Área y perímetro. Aspectos conceptuales y didácticos*. Prefacio de Carlos Vasco Uribe. Bogotá: Magisterio.

Noether, E. & Cavaillès, J. (Compiladores.) (1937). *Briefwechsel Cantor-Dedekind*. París: Hermann.

Stavy, R. & Tirosh, D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Conferencia 02

Los Criterios de Idoneidad Didáctica como Guía de la Reflexión de Profesor sobre Su Práctica

Vicenç FONT MOLL
Universitat de Barcelona, España
vfont@ub.edu

Resumen

A la Didáctica de las Matemáticas se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes. La primera pretende que sus constructos teóricos sirvan para comprender los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y la segunda que éstos sirvan para guiar la mejora de dichos procesos. La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder ¿qué ha ocurrido aquí, ¿cómo y por qué? La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta ¿qué se podría mejorar? Se trata de demandas diferentes, pero estrechamente relacionadas. En esta conferencia se reflexiona primero sobre el constructo criterios de idoneidad didáctica en el marco de la problemática del papel que deben jugar las valoraciones y los principios normativos en la práctica del profesor (segunda demanda). A continuación, se explica como se usan los criterios de idoneidad didáctica como una herramienta para orientar la reflexión de profesor de matemáticas sobre su práctica.

Un fenómeno que se observa en la Reflexión del Profesor sobre Su Práctica

Dentro del programa de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, se proponen actualmente diferentes modelos teóricos que permiten analizar, mediante sistemas de categorías, el conocimiento y las competencias requeridos en la enseñanza de las matemáticas. En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019) se ha desarrollado un modelo teórico para articular las competencias y el conocimiento que necesita el profesor de matemática (modelo CCDM a partir de ahora).

En diferentes investigaciones y contextos de formación, se han diseñado e implementado ciclos formativos para que los profesores (o futuros profesores) desarrollen las competencias de este modelo y aprendan los conocimientos que se contemplan en él (por ejemplo, Rubio, 2012; Pochulu, Font y Rodríguez, 2016; Seckel, 2016). Se trata de ciclos formativos en los que se pretende enseñar a los participantes algunos de (o todos) los tipos de análisis didáctico contemplados en el modelo de análisis didáctico propuestos por el EOS (Font, Planas y Godino, 2010; Pino-Fan, Assis y Godino, 2015), ya que se supone que realizar estos tipos de análisis didácticos permite desarrollar la competencia clave de este modelo, la competencia de análisis e intervención didáctica, y también el aprendizaje de los diferentes tipos de conocimientos contemplados en el modelo CCDM. Se trata de ciclos formativos (talleres) diseñados como entornos potentes de aprendizaje de manera que: 1) los asistentes tengan una participación activa a partir del análisis de episodios de aula; y 2) los tipos de análisis que propone dicho modelo de análisis emerjan de la puesta en común realizada en el gran grupo. Estos dispositivos formativos, siempre se inician con una primera fase de reflexión en la que se les pide a los asistentes que reflexionen, sin darles ninguna pauta, sobre un episodio de aula (video, transcripción, etc.), y se les pide que comenten lo que les parece más relevantes, significativo, etc. en base a su trayectoria anterior.

Estos ciclos formativos se han realizado en muchos países diferentes (España, Brasil, Chile, Ecuador, Costa Rica, Argentina, México, Perú, Colombia) y con diferentes tipos de profesores (profesores en formación, formadores de profesores, profesores en ejercicio) y de diferentes niveles educativos (primaria, secundaria, bachillerato y postgrado) −dos de los cuales están descritos en Rubio (2012) y Seckel (2016). En estas experiencias hemos observado algunas regularidades (Breda, Pino-fan y Font, 2017):

1) Los profesores o futuros profesores, cuando tienen que opinar (sin una pauta previamente dada) sobre un episodio de aula, expresan comentarios en los que se pueden hallar aspectos de descripción y/o explicación y/o valoración.

2) Las opiniones de estos profesores se pueden considerar evidencias de diferentes tipos de conocimientos (relacionados con las matemáticas, cognitivo, relacionados con el entorno curricular, cultural y sociolaboral, con la gestión de la interacción, con aspectos emocionales y afectivos, con el uso de recursos, etc.).

3) Cuando las opiniones tienen un componente valorativo importante, se pueden inferir criterios que, en su opinión, deben guiar la práctica del profesor.

4) La valoración positiva de estos criterios se basa en la suposición implícita o explícita de que hay determinadas tendencias sobre la enseñanza de las matemáticas que nos indican cómo debe ser una enseñanza de las matemáticas de calidad.

5) Estos criterios coinciden con algunos componentes de los criterios de idoneidad didáctica (constructo que se explica en la cuarta parte de la conferencia).

Es decir, el profesorado de matemáticas usa ciertos criterios sobre cómo se deben implementar las clases para que estas sean de calidad, cada vez mejores, etc. (práctica). Estos criterios son similares, incluso cuando los profesores son de diferentes países, culturas, religiones, nivel educativo, etc. Estos criterios están relacionados con las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (teoría). La conferencia tracta sobre este fenómeno, que se puede formular de la siguiente manera: los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica (CID) propuestos por el EOS funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando estos valoran un episodio o justifican que una propuesta didáctica representa una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión. Es decir, sus comentarios se pueden considerar evidencias de un uso implícito de algún componente de los CID como norma que debe orientar la práctica del profesor para que esta sea cada vez mejor, de más calidad, etc.

Este fenómeno está muy relacionado con la problemática de la relación entre la teoría y la práctica (teoría versus práctica).

La Didáctica de las Matemáticas y las demandas a las que tiene que dar respuesta

En estos momentos a la Didáctica de las Matemáticas (DM), tanto si es entendida cómo ciencia de tipo explicativo o bien de tipo comprensivo, se le pide que dé respuesta a dos demandas diferentes (Font y Godino, 2011):

a) Comprender y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

b) Guiar la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

La primera demanda lleva a describir, interpretar y/o explicar los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (ciencia básica). La segunda lleva a su valoración y mejora (ciencia aplicada o tecnología). La primera demanda exige herramientas para una didáctica descriptiva y explicativa que sirva para responder "¿qué ha ocurrido aquí cómo y por qué?". La segunda necesita herramientas para una didáctica valorativa que sirva para responder la pregunta "¿qué se podría mejorar?".

Se trata de dos demandas muy diferentes, pero estrechamente relacionadas ya que, sin una profunda comprensión de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, no es posible conseguir su mejora. La existencia de estas dos demandas es el resultado de la superación del punto de vista ingenuo que consideraba que la Didáctica de las Matemáticas podía responder a la pregunta ¿Cómo enseñar mejor las matemáticas? diciéndonos claramente qué hay que hacer en clase para que los alumnos aprendan matemáticas.

En general, los enfoques teóricos que se han generado en la DM están más cómodos con la primera demanda que con la segunda. La razón es que con la segunda demanda (concepción de la didáctica como generadora de criterios normativos) es, usando la metáfora de la moral, que nos adentramos en un terreno en que los términos a utilizar son más bien propios del discurso moralista, ya que son del tipo: calidad, bien, mal, mejor, peor, correcto, incorrecto etc. Es decir, nos adentramos en una reflexión sobre valores y normas que funcionan como una guía para obrar que orienta acerca de qué acciones se deben hacer. Dicho de otra manera, dejamos el terreno firme de la ciencia (sea esta de tipo positivista o antipositivista) para adentrarnos en un terreno menos firme.

Ahora bien, hay programas de investigación que consideran que la razón de la primera demanda (concepción de la didáctica como ciencia descriptiva/ explicativa) es poder afrontar la segunda. Una revisión de la literatura muestra que una parte importante de los trabajos de investigación relacionan ambas demandas de facto, aunque en muchos casos sin justificar fundadamente dicha conexión.

Hay dos aserciones que, probablemente, pueden ser aceptadas por la mayoría de marcos teóricos en Didáctica de las Matemáticas: a) cuanto mejor podamos describir, comprender y explicar los procesos de enseñanza y aprendizaje (primera demanda), estaremos en mejores condiciones para conseguir una mejora de la enseñanza (segunda demanda), b) los resultados generados como consecuencia de la primera demanda influyen, de alguna manera, en la generación de valores y normas que guían la mejora de la enseñanza de las matemáticas. Es decir, en general se asume algún tipo de conexión entre las dos demandas, aunque los diferentes enfoques teóricos difieren en la manera de fundamentarla.

En el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019), se considera que la naturaleza del conocimiento que se pretende construir tiene un carácter científico y, además, tecnológico. Esto quiere decir que, por una parte, se abordan problemas teóricos de clarificación ontológica, epistemológica y semiótica sobre el conocimiento matemático, en cuanto tales problemas tienen relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje (componente científico, descriptivo, explicativo, predictivo), y, por otra parte, se trata de intervenir en dichos procesos para hacerlos lo más efectivos posible (componente tecnológico - prescriptivo). Se entiende que la descripción, explicación y predicción, son los fines de la actividad científica, mientras que la prescripción y valoración, son los principales objetivos correspondientes a la actividad tecnológica, aunque ésta también incluye elementos de investigación aplicada a la resolución de problemas concretos. Por tanto, en el marco del EOS se ha decidido afrontar la segunda demanda a partir de la generación de constructos teóricos, siendo el más relevante el constructo criterios de idoneidad didáctica, el cual se descompone en componentes e indicadores. Con relación al constructo CID, en diversas investigaciones se ha observado el fenómeno que se ha descrito en la sección anterior (los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS funcionan como regularidades en el discurso de los profesores cuando estos valoran un episodio o justifican que una propuesta didáctica representa una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión).

El Problema del Diseño Instruccional (o de la Optimización del Aprendizaje)

El diseño instruccional se puede formular de diferentes maneras como, por ejemplo: ¿Qué criterios usar para diseñar y rediseñar una unidad didáctica para que sea cada vez mejor? ¿Cómo debe ser una (buena) clase (secuencia de clases) de matemáticas? ¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?

Este problema se puede abordar de diferentes maneras, entre otras, desde una perspectiva positivista o bien consensual.

Desde la perspectiva positivista, la investigación realizada en el área de Didáctica de las Matemáticas nos dirá cuáles son las causas que hay que modificar para conseguir los efectos considerados como objetivos a conseguir. En esta perspectiva se obtienen resultados que, según los investigadores, son validados empíricamente de forma objetiva, mediante métodos cuantitativos que garantizan el control y verificación de los resultados. Desde la perspectiva consensual, aquello que nos dice como guiar la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas ha de emanar del discurso argumentativo de la comunidad científica, cuando esta está orientado a conseguir un consenso sobre "aquello" que se puede considerar como mejor. Desde esta última perspectiva, se trata de consensuar criterios (principios, etc.) útiles en dos momentos de los procesos de instrucción matemáticos. *A priori*, orientando "cómo se tienen que hacer las cosas". *A posteriori,* para valorar el proceso de instrucción efectivamente implementado.

Los Criterios de Idoneidad Didáctica

El constructo *idoneidad didáctica* surge como respuesta a la siguiente pregunta *¿Qué tipo de acciones y recursos se debería implementar en los procesos de instrucción para optimizar el aprendizaje matemático?* En el sistema teórico que configura el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2019) se ha incluido la noción de *idoneidad didáctica* como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte de este) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

La Didáctica puede ofrecer principios provisionales (normas que son llamadas en el EOS criterios de idoneidad) consensuados por la comunidad interesada en la educación matemática, que pueden servir, primero para guiar los procesos de enseñanza y aprendizaje y, segundo, para valorar sus implementaciones. Estos principios son útiles en dos momentos:1) a priori, los criterios de idoneidad orientan cómo se debe llevar a cabo un proceso de instrucción, 2) a posteriori, los criterios sirven para valorar el proceso de enseñanza y aprendizaje efectivamente implementado e identificar posibles aspectos de mejora en el rediseño. Para generar estos principios los investigadores en educación matemática deben dialogar y colaborar con todos los demás sectores interesados en la mejora de la enseñanza de las matemáticas (profesores, padres, administración, etc.). Esto permitirá crear consensos que generen principios para orientar y valorar los procesos de instrucción, con la finalidad de conseguir una enseñanza idónea de las matemáticas. Se reconoce, no obstante, que la identificación de criterios de idoneidad, tanto generales como específicos, requiere de una agenda de investigación que se abre a discusión y desarrollo en la comunidad de educación matemática.

Dicho constructo general de idoneidad se ha particularizado en seis criterios parciales, (Font, Planas y Godino, 2010): 1) epistémica: grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o pretendidos), respecto de un significado de referencia, 2) cognitiva: grado en que los significados pretendidos/implementados estén en la zona de desarrollo potencial del alumnado, así como la proximidad de los significados personales logrados a los significados pretendidos/implementados, 3) interaccional: Un proceso de enseñanza y aprendizaje tendrá mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori) y, por otra parte, permitan resolver los conflictos que se producen durante el proceso de instrucción, 4) Mediacional: grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, 5) emocional: grado de implicación (interés, motivación, etc.) del alumnado en el proceso de estudio y 6) ecológica: grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla. Ahora bien, para que dichos criterios sean operativos, se proponer una caracterización a partir de componentes e indicadores (Godino, 2013; Breda, Pino-Fan y Font, 2017). Por ejemplo, para el criterio de idoneidad epistémica se puede formular el siguiente criterio parcial (componente): Los significados de los objetos institucionales pretendidos en cada contexto educativo deben, dentro de lo posible, ser una muestra representativa (metafóricamente hablando) del significado de referencia global del objeto y tener en cuenta las restricciones de los contextos y sujetos implicados.

El logro de una alta idoneidad didáctica requiere un equilibrio entre los diferentes criterios parciales, teniendo en cuenta el contexto en que tiene lugar. Supongamos, por ejemplo, que hay consenso en que uno de los criterios es que los alumnos hayan aprendido (criterio cognitivo), que otro sea que se les haya enseñado unas matemáticas relevantes (con resolución de problemas, modelización, etc.) (criterio epistémico) y otro sea que se debe motivar a los alumnos para conseguir su implicación (criterio afectivo). Es relativamente fácil conseguir alguno de estos tres criterios por separado, pero lo que es más difícil y valioso es conseguir un cierto equilibrio entre los tres. Metafóricamente, un barco se hunde si no lleva la carga equilibrada.

La idoneidad es relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes, lo que requiere una actitud de reflexión e investigación por parte del profesor y demás agentes que comparten la responsabilidad del proyecto educativo. Implica la asunción de una racionalidad axiológica en educación matemática que permita el análisis, la crítica, la justificación de la elección de los medios y de los fines, la justificación del cambio, y en definitiva responder a la pregunta genérica, ¿sobre qué aspectos se puede incidir para la mejora progresiva de los procesos de instrucción matemática?

La noción de idoneidad está inspirada en la teoría consensual de la verdad de Peirce y de sus desarrollos y adaptaciones posteriores realizadas por autores como Apel (1991) y Habermas (1997). En esta teoría, "verdadero" es, en principio, un enunciado para un usuario cuando cree que cualquier otro sujeto racional estaría dispuesto a asignar el mismo predicado al enunciado. La verdad no se piensa con relación a un mundo separado de ideas, no como "conformidad" con ideas trascendentes, sino cómo aquello que podría ser defendido ante un conjunto de interlocutores y aceptado por ellos.

Tal como se ha dicho, para la operatividad de los criterios de idoneidad didáctica se define un conjunto de componentes e indicadores observables que sirven de guía para el análisis y valoración de un proceso de instrucción en cualquier etapa educativa (Breda, Pino-Fan y Font, 2017). En la Tabla 1 se detallan a continuación los criterios y componentes de idoneidad didáctica de la propuesta mencionada (por cuestiones de espacio no se detallan los indicadores).

Tabla 1

***Criterios y componentes de idoneidad didáctica.* (Morales-López & Font, 2019)**

Criterio	Componente
Epistémico	(IE1) Errores, (IE2) Ambigüedades, (IE3) Riqueza de procesos, (IE4) Representatividad de la complejidad de la noción a enseñar
Cognitivo	(IC1) Conocimientos previos, (IC2) Adaptación curricular a las diferencias individuales, (IC3) Aprendizaje, (IC4) Alta demanda cognitiva
Interaccional	(II1) Interacción docente-discente, (II2) Interacción entre discentes, (II3) Autonomía, (II4) Evaluación formativa
Mediacional	(IM1) Recursos materiales, (IM2) Número de estudiantes, horario y condiciones del aula, (IM3) Tiempo
Afectivo o emocional	(IA1) Intereses y necesidades, (IA2) Actitudes, (IA3) Emociones
Ecológico	(IEC1) Adaptación al currículo, (IEC2) Conexiones intra e interdisciplinares, (IEC3) Utilidad sociolaboral, (IEC4) Innovación didáctica

La noción de Idoneidad Didáctica está siendo utilizada ampliamente como herramienta para, por una parte, analizar las secuencias didácticas (y sus rediseños) diseñadas e implementadas por los profesores con la finalidad de conseguir una mejora en la enseñanza de las matemáticas (Breda, 2020; Morales-López & Font, 2019; Sousa, Gusmão, Font & Lando, 2020) y, por otra parte, para organizar la reflexión del futuro profesor (o en activo) sobre su propia práctica en programas de formación de profesores o futuros profesores (Esqué & Breda, 2021; Giacomone, Godino & Beltrán-Pellicer, 2018; Morales-Maure, Durán-González, Pérez-Maya & Bustamante, 2019; Seckel & Font, 2020), ya que facilita la reflexión sistemática de los profesores sobre la complejidad de los objetos matemáticos que enseñan y los factores implicados en su estudio. Esta herramienta también se ha usado para el análisis y valoración de lecciones de libros de texto (Burgos, Castillo, Beltrán-Pellicer & Godino, 2020).

Ciclos formativos para la Enseñanza de las CID en másteres de formación de profesores

En diferentes programas de formación se toman los criterios de idoneidad didáctica como un contenido a enseñar con el objetivo de que sean usados como pauta para organizar la propia práctica del profesor. Por ejemplo, en Font, Breda y Pino-Fan, (2017) se explica un ciclo formativo que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, crea espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo. Dicho ciclo se distribuye en dos asignaturas: Innovación e investigación sobre la propia práctica y Trabajo Fin de Máster (TFM), de acuerdo con la siguiente secuencia:

a) Análisis de casos (sin teoría): Se propone a los alumnos la lectura y análisis de episodios de clase para que hagan un análisis a partir de sus conocimientos previos sin suministrarles ninguna pauta para ello. b) Emergencia de diferentes tipos de análisis didáctico (descriptivo, explicativo y valorativo): La puesta en común de los análisis realizada por los diferentes grupos permite observar como el gran grupo contempla estos tres diferentes tipos de análisis didáctico, aunque cada grupo sólo contemple alguno de ellos. c) Tendencias en la enseñanza de las matemáticas: Los episodios analizados se han seleccionado de manera que los asistentes apliquen de manera implícita alguna de las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas (Breda, Font y Pino-Fan, 2018). Seguidamente se hace observar a los asistentes que han utilizado alguna de estas tendencias de manera implícita. d) Teoría (criterios de idoneidad): para que se comprenda que los criterios de idoneidad didáctica deben ser entendidos como principios emanados del discurso argumentativo de la comunidad educativa, cuando ésta está orientada a conseguir un consenso sobre lo que se puede considerar mejor, se procura que tanto los criterios, como sus componentes e indicadores, emerjan como resultado de un proceso de acuerdos consensuados en el grupo. También se explica que para el desarrollo del constructo idoneidad didáctica, se han considerado las tendencias actuales sobre la enseñanza de las matemáticas, los principios del NCTM (2000) y los aportes de los diferentes enfoques teóricos del área de Didáctica de las Matemáticas (Godino, 2013; Breda, Font y Pino-Fan, 2018). e) Lectura y comentario de partes de algunos trabajos final de máster de cursos anteriores en los que los futuros profesores de cursos anteriores utilizaron los criterios de idoneidad didáctica para valorar la unidad didáctica que implementaron. f) En las asignaturas Prácticas y Trabajo Final de Máster los alumnos utilizarán los CID para valorar su propia práctica, en concreto la unidad que han diseñado e implementado. Tienen que hacer un rediseño y mejorar algunos de los aspectos que la valoración realizada indica que se deben y pueden mejorar.

Ejemplo de "cómo los futuros profesores de secundaria de matemáticas usan los CID para organizar la reflexión sobre su práctica"

A continuación, sigue un ejemplo de como una futura profesora de matemáticas que ha participado en un ciclo formativo como el descrito en la sección anterior usa los CID como herramienta para organizar la reflexión sobre su práctica (Font, Breda y Pino-Fan, 2017).

En las orientaciones generales del Trabajo Fin de Máster (TFM) que se dan a los alumnos, en el caso del Máster de Formación de Profesorado que ha cursado la futura profesora Ruiz, se dice que debe ser un trabajo original, autónomo e individual que permite al estudiante mostrar de forma integrada los contenidos formativos recibidos y las competencias generales asociadas al título de Máster en Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas, y debe contribuir a reflexionar y profundizar en el análisis de su propia práctica, posibilitando proponer elementos de mejora de la misma. Dicha mejora se debe justificar a partir de la reflexión de la comunidad de investigación en Educación Matemática sobre el tema que se ha desarrollado en su periodo de prácticas.

Un elemento clave del TFM es su relación directa con la experiencia escolar realizada previamente (el diseño y la implementación de una unidad didáctica). Otra de las características importantes es que se asigna un mismo tutor al periodo de prácticas (donde se ha diseñado e implementado la unidad didáctica) y al Trabajo Fin de Máster, para facilitar la continuidad de las prácticas y el proceso de reflexión sobre ellas, y poder reconocer los progresos alcanzados. Durante este proceso, se realizan, como mínimo cuatro reuniones, entre el estudiante y su tutor. Dos de ellas durante su práctica escolar, y al menos dos encuentros tutoriales durante la realización del TFM.

El TFM es la culminación de un ciclo formativo en el que, primero, el alumno ha planificado e implementado una unidad didáctica en el periodo de prácticas. Para después (en el TFM) realizar el análisis y valoración de la idoneidad de la unidad didáctica implementada y formular una propuesta de mejora justificada de dicha unidad didáctica. Para la parte final de este ciclo, se sugiere a los futuros docentes que en su análisis consideren responder a preguntas como las siguientes: a) ¿He enseñado unas matemáticas de calidad? ¿Se puede mejorar esta calidad? ¿Cómo? b) Los alumnos podían aprender con las actividades propuestas? ¿Han aprendido? ¿Por qué no? c) ¿Se podría mejorar la gestión de la clase? d) ¿Usé los recursos adecuados? ¿El tiempo estuvo bien gestionado? e) ¿Cómo se ha considerado una perspectiva ecológica en las condiciones generales del trabajo? Para responder a estas preguntas en las diferentes asignaturas que intervienen en el ciclo se presentan elementos de valoración de la idoneidad de los procesos de estudio, en concreto los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS (Godino, Batanero y Font, 2007), así como la pauta de componentes y descriptores de dichos criterios que permite aplicarlos (Breda y Lima, 2016).

En su TFM, la futura profesora Ruiz escribe comentarios de tipo valorativo que se relacionan con los diferentes componentes e indicadores de los criterios de idoneidad didáctica. Se trata de una valoración que ha hecho la profesora y que ha sido triangulada con su tutor. Por otra parte, posteriormente en la presentación oral de su valoración ante el tribunal del TFM hay una segunda triangulación. Estos comentarios son el foco de nuestro análisis, el cual se explica con detalle en el siguiente apartado. Se trata, pues, de un análisis del contenido en las que las categorías han sido fijadas previamente (criterios, componentes y descriptores de la idoneidad didáctica).

Uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica en el TFM

La futura profesora Ruiz (2014), en su TFM presenta la valoración y el rediseño de una propuesta didáctica sobre la función de segundo grado, para un grupo de alumnos del cuarto año de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) (15-16 años). Este TFM está organizado en cinco capítulos; en el primero se realiza una introducción al TFM, en el segundo se presenta un resumen de la implementación de la unidad didáctica (la explicación detallada se halla en su memoria de prácticas). En el tercer capítulo se explica la valoración de los seis criterios de idoneidad didáctica. En el cuarto capítulo se especifican los aspectos que se proponen mejorar en una futura implementación y se detalla el rediseño de las tareas para ello. El último capítulo termina con unas consideraciones finales sobre el TFM y sobre su experiencia en el máster.

Cuando la futura profesora Ruiz tiene que reflexionar sobre una nueva propuesta didáctica que implica un cambio y una mejora sobre su práctica anterior, explícitamente utiliza los criterios de idoneidad didáctica. A continuación, mostramos el uso que ella hace de dichos criterios (sus componentes y descriptores) para justificar que su nueva propuesta representa una mejora con relación a la unidad didáctica implementada en su periodo de prácticas.

Idoneidad Epistémica

La futura profesora Ruiz (2014) valora la idoneidad epistémica de su unidad didáctica con un 3,4 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): errores (5), ambigüedades (4), riqueza de procesos (3) representatividad y conectividad de los contenidos (1,6). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora Ruiz realiza diferentes reflexiones. Con relación a los *errores*, explica que en su implementación no observó errores, en particular comenta que corrigió con sus comentarios uno que se hallaba en el libro de texto y en alguno de los videos utilizados (errores fotográficos al confundir la parábola con una catenaria).

Con relación a las *ambigüedades* comenta que observó que el uso del programa dinámico GeoGebra propició la metáfora de la gráfica de una función como camino que deja un punto que se mueve sobre la misma. También comenta que en la implementación de la unidad didáctica usó tablas de valores triples (la misma abscisa y dos columnas de ordenadas para dos funciones) lo cual también creo ambigüedades (en particular, porque utilizó la misma letra para las dos funciones). En el rediseño decide que no usará este tipo de tablas (Figura 1).

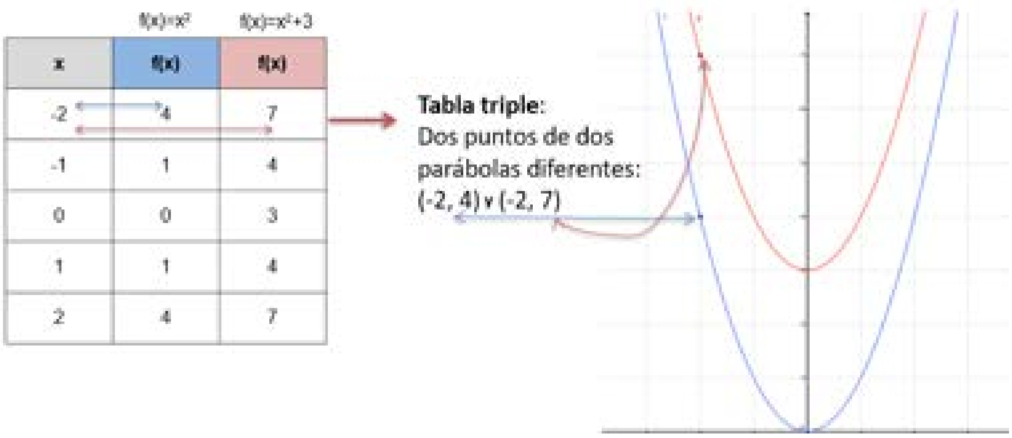


Figura 1. Fuente: Ruiz (2014, p. 15)

Con relación al componente *riqueza de procesos* afirma:

> La secuencia de actividades es "rica" en cuanto a los procesos matemáticos que activa, aunque que la disposición de un solo ordenador para toda la clase genera un nivel de procesos de manipulación / experimentación /exploración / ensayo y error bajo, ya que el alumno ha tenido un papel pasivo receptor en vez de que sea él el que "haga cosas". El nivel de formulación, enumeración y conjeturación ha estado en general flojo, mientras que argumentación, explicación, justificación, demostración y la comunicación en términos de institucionalización ha sido alto. (Ruiz, 2014, p. 35).

El componente al que otorga menor puntuación es al que hace referencia a la *representatividad* y lo justifica con afirmaciones como las siguientes:

> El principal significado parcial que se ha trabajado en la UD ha sido el de la representación de la función explicita, por lo que no podemos considerarlos como una muestra representativa de la complejidad de la función cuadrática. Han faltado significados parciales y sus conexiones. (Ruiz, 2014, p. 35-36).
>
> La muestra de actividades presentadas en la UD no ha sido representativa. Han faltado problemas de contextos significativos de la aplicación de la parábola, como pueden ser de tiro parabólico, de fuentes (por ejemplo, Montjuïc), de luz de faros, etc. (Ruiz, 2014, p. 35-36).

Idoneidad Cognitiva

La futura profesora Ruiz (2014) valora la idoneidad cognitiva de su unidad didáctica con un 2,2 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): conocimientos previos (4,5), adaptaciones curriculares (1), aprendizaje (1). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora realiza diferentes comentarios sobre los componentes e indicadores de la idoneidad cognitiva.

Conocimientos previos

La futura profesora explica que, dado que había asistido a esta clase, por un amplio espacio de tiempo, antes de comenzar la unidad didáctica sobre la función cuadrática ya sabía que los alumnos tenían los conocimientos previos necesarios sin necesidad de una evaluación inicial.

Adaptaciones Curriculares

La futura profesora explica que no se contemplaron actividades de refuerzo ni de ampliación dadas las características del grupo.

Aprendizaje

Con relación a este componente, la autora del TFM se muestra poco satisfecha y afirma lo siguiente: “La evaluación efectuada no ha sido competencial, tal como se ha pretendido enfocar la UD, por lo que no es informativa, aunque los resultados alcanzados en el examen propuesto han sido satisfactorios.” (Ruiz, 2014, p. 37).

Alta demanda cognitiva

Con relación a este componente la futura profesora no hace comentarios.

Idoneidad Interaccional

En el TFM analizado se valora la idoneidad interaccional de la implementación realizada con un 4 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): interacción profesor - alumno (4,6), interacción entre alumnos (5), autonomía (3), evaluación formativa (3,5). Se justifican estas puntuaciones con comentarios como los siguientes.

Con relación al componente *interacción profesor - alumno* “En general se han reconocido y resuelto los conflictos de significado, aunque en algún caso no se aprovecha la interacción para generar y resolver una duda cognitiva en un alumno (conexión parábola con la pendiente de una recta)”. (Ruiz, 2014, p. 38). Con relación al componente *interacción entre alumnos*:

> Mediante el trabajo en grupo, la disposición de la clase y el buen ambiente que existía en clase se ha favorecido el diálogo y la comunicación entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor.

> Se ha creado un ambiente que favorecía la inclusión de los alumnos en grupo, evitando la exclusión. (Ruiz, 2014, p. 38).

Con relación al componente *autonomía*, se afirma: "La metodología de trabajo (trabajo en grupo, actividades individuales, exposiciones de los alumnos) ha contemplado momentos que han favorecido que los alumnos asuman responsabilidades de estudio." (Ruiz, 2014, p. 38). Con relación al componente *evaluación formativa*, se afirma:

> No se ha incidido bastante en la observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos. Aunque diariamente se han controlado los deberes que han realizado los alumnos de manera autónoma y se han realizado actividades en clase, estos no han servido para evaluar el progreso cognitivo personal de cada alumno. (No se han tomado apuntes / comentarios diarios de los resultados de las actividades por alumno). (Ruiz, 2014, p. 39).

Idoneidad Mediacional

En el TFM de la futura profesora se valora la idoneidad mediacional de su unidad didáctica con un 4,3 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): recursos materiales (3,5), número de alumnos, horario y condiciones del aula (4,5), tiempo (5). Para justificar estas puntuaciones, con relación al componente recursos, la futura profesora afirma que utilizó diversos medios o recursos como dispositivos de ayuda al estudio (GeoGebra, proyección de un vídeo, calculadora científica, etc.). También afirma que el número de alumnos, el horario y las condiciones del aula fueron adecuados. Con relación al componente tiempo, afirma que invirtió el tiempo en los aspectos clave del tema y en los que presentaban más dificultad para los alumnos.

Idoneidad Afectiva

En el TFM analizado se valora la idoneidad afectiva de la unidad didáctica con un 4,3 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): intereses y necesidades (3,5), actitudes (5), emociones (4,5). Para justificar estas puntuaciones la futura profesora realiza comentarios como los siguientes:

Con relación al componente *intereses y necesidades*:

> Se ha intentado que la contextualización de las actividades fuera de interés para los alumnos y que la metodología empleada fuera amena y atractiva. Trabajar con GeoGebra les ha supuesto a los alumnos una novedad y una metodología innovadora en clase que les ha motivado mucho, igual que proyectar un video actual sobre las parábolas. (Ruiz, 2014, p. 41).

En cuanto al componente *actitudes*: "Se ha favorecido la argumentación trabajando las actividades en grupos y exponiendo los resultados por los propios alumnos al resto de la clase." (Ruiz, 2014, p. 41).

En lo atinente al componente *emociones*, se afirma que se ha intentado en todo momento motivar al alumnado promocionando su autoestima y evitado el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas.

Idoneidad Ecológica

En el TFM de Ruiz se valora la idoneidad ecológica de la unidad didáctica implementada con un 3,5 que resulta de hacer la media de las siguientes puntuaciones (sobre 5): adaptación al currículum (3), abertura hacia la innovación didáctica (4), Adaptación socio-profesional y cultural (5), Conexiones intra e interdisciplinarias (2). Dichas puntuaciones se justifican con comentarios como los siguientes:

Adaptación al currículum: "Aunque los significados se han correspondido con las directrices curriculares, Ha habido un bajo hincapié en los procesos de contextualización que indica el currículo. La evaluación no se ha correspondido con la idea competencial del currículo." (Ruiz, 2014, p. 42).

Con relación al componente abertura hacia la *innovación didáctica*, se afirma que se tuvo en cuenta la incorporación de las TIC. Con relación al componente *adaptación socio-profesional y cultural*, se afirma que se ha presentado el tema de manera que permita a los alumnos entender la importancia de las funciones, y en particular la función cuadrática, como un tema relevante y de importancia en el mundo real, necesario en su camino para convertirse en ciudadanos constructivos, reflexivos y capaces de emitir decisiones bien fundadas. Con relación al componente *conexiones intra e inter*, se afirma: “La contextualización de las actividades ha propiciado escasas conexiones con otros contenidos interdisciplinarios como la física, las ciencias sociales o la historia.” (Ruiz, 2014, p. 42).

Valoración global de la Idoneidad Didáctica de la implementación realizada

Para representar la valoración global que hace de su práctica, la futura profesora usa un esquema en forma de hexágono (Figura 2) siguiendo el modelo de figura que se había comentado con los futuros profesores durante el ciclo formativo. Se trataba de una figura con dos hexágonos En esta figura, el hexágono regular exterior representa un proceso de enseñanza ideal ya que se habrá conseguido una alta idoneidad simultánea de las seis idoneidades parciales, mientras que el hexágono irregular interior representa la idoneidad de un proceso de instrucción efectivamente implementado. Siguiendo este modelo, en la figura 2, Ruiz supone que todas las idoneidades parciales tienen un mismo valor representado por el segmento que une el centro con el vértice. A partir de ello, construye el polígono irregular que representa las idoneidades parciales que ella considera que ha conseguido.

Un aspecto para resaltar es que el constructo criterios de idoneidad se les explicó a los futuros profesores no como un constructo que trataba de medir la idoneidad de un proceso de instrucción, sino que se les explicó como un constructo que permitiera al profesor reflexionar sobre su práctica y poder guiar su mejora en el contexto donde se iba a realizar el proceso de instrucción a partir de la determinación cualitativa de los aspectos que se deberían y podrían mejorar. A pesar de esa explicación Ruiz, de acuerdo con su tutor de TFM, decidió realizar una medida del grado de idoneidad de cada uno de los criterios de idoneidad didáctica sin contar con un referente institucional de evaluación. El método que siguió fue valorar cada uno de los componentes de uno de los seis criterios con una escala de 1 a 5 y después hizo la media de estas puntuaciones que represento en cada uno de los segmentos de la Figura 2 para construir el polígono irregular de la figura 2.

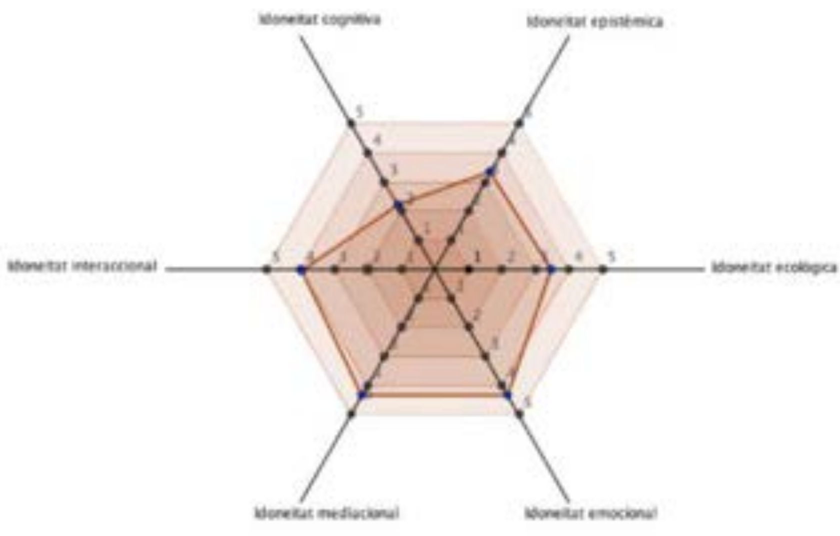


Figura 2. Hexágono de idoneidad (Ruiz, 2014, p. 6)

La conclusión a la que llega la futura profesora es:

> Mediante esta valoración global se puede observar que los valores asignados a los criterios de idoneidad interaccional, mediacional y emocional son altos, pero no he incidido bastante en la idoneidad epistémica y cognitiva ni, en menor medida, en la idoneidad ecológica, concretamente, en la representatividad y conectividad de los contenidos y las adaptaciones curriculares y la evaluación, y en la adaptación de los procesos curriculares y las conexiones intra e interdisciplinarias. (Ruiz, 2014, p. 6).

Propuesta de rediseño de su unidad didáctica

Ruiz concluye que hay que mejorar su unidad didáctica en los aspectos que obtiene menor puntuación. Por cuestiones de espacio no abordamos en esta comunicación la amplia y profunda reflexión que realiza esta futura profesora para justificar su propuesta de rediseño. Nos limitaremos a mostrar un ejemplo de como sus propuestas se justifican a partir de la lectura de artículos:

> Trabajaremos la conexión de la función cuadrática con la función lineal y la pendiente: conectaremos el parámetro a de la parábola con la pendiente de 'una recta (Conexión "Parábola – Recta"). Pera ello, nos basaremos en el artículo de Amick, H L. (1995) Sharing Teaching Idees: A Unique Slope for a Parabola. (Ruiz, 2014, p. 9).

Algunas consideraciones sobre este ejemplo

Este ejemplo muestra que el uso de los criterios de idoneidad didáctica es un instrumento metodológico útil para promover y apoyar la reflexión sobre su propia práctica. También muestran que los profesores necesitan herramientas para dirigir su atención a los aspectos más destacados de los episodios de enseñanza y que estas herramientas pueden ser enseñadas como parte de la formación del profesorado. Las reflexiones de Ruiz son una evidencia de estas conclusiones ya que ella reconoce la utilidad de la herramienta criterios de idoneidad cuando afirma:

> Como conclusión quiero resaltar la importancia de analizar de una manera sistemática y organizada las prácticas que he realizado.
>
> A través del estudio de la calidad didáctica de mi unidad didáctica he podido percatarme de la complejidad del tema y he llegado a reconocer problemas en un contexto profesional que durante las prácticas no fui consciente de tenerlos.
>
> La mayoría de nosotros ha tenido una grata experiencia durante el periodo de prácticas y valoró su experiencia como muy positiva, muy buena, etc. Pero creo que llegados a este punto como profesores tenemos que ir más allá de una valoración de este tipo y comprobar que no sólo nos sentimos cómodos en clase y nos gusta involucrarnos en el aprendizaje de los alumnos, sino que, además, somos capaces de autoevaluarnos, ser críticos con nosotros mismos y de hacer una reflexión sobre lo que hemos hecho. El uso de estos criterios empleados para analizar nuestra unidad didáctica nos ha permitido afinar y ser más precisos en el análisis y valoración. (Ruiz, 2014, p. 29-30).

Por otra parte, en este máster también se les pide a los futuros profesores que hagan una autovaloración competencial en la que, dada la lista de competencias que se deben desarrollar en el máster, para cada una de ellas deben señalar cuál era, según su criterio, su nivel de entrada y cuál es su nivel de salida. En esta autovaloración, con relación a la competencia 14 (Análisis de secuencias didácticas) Ruiz comenta lo siguiente:

> El grado de conocimiento de técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad que poseía antes del Máster era prácticamente nulo.
>
> En el Máster he aprendido a diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora

En esta autovaloración Ruiz comenta que valorar su unidad didáctica implementada utilizando los criterios de idoneidad didáctica le ha permitido desarrollar su competencia de análisis didáctico de manera significativa.

Retomando el fenómeno inicial para finalizar

El motivo por el cual los criterios de idoneidad didáctica funcionaban como regularidades en el discurso de los profesores, cuando estos tenían que justificar que sus propuestas representaban una mejora, sin habérseles enseñado el uso de esta herramienta para guiar su reflexión, fue la cuestión que originó esta conferencia. Según Breda, Font y Pino-Fan (2018), una posible explicación está relacionada con los orígenes del constructo ya que estos criterios, sus componentes e indicadores se han seleccionado a partir de la condición de que debían de contar con un cierto consenso en el área de Didáctica de las Matemáticas, aunque fuese local.

Por tanto, una explicación plausible de que los criterios, sus componentes e indicadores funcionen como regularidades en el discurso del profesor es que reflejan consensos sobre cómo debe ser una buena enseñanza de las matemáticas ampliamente asumidos en la comunidad de educadores matemáticos; y es plausible pensar que el uso implícito que hace el profesor de ellos se debe a su formación y experiencia previa, la cual le hace partícipe de dichos consensos.

Ahora bien, otra explicación también plausible es que el profesor que utiliza estos criterios, al no haber participado en el proceso de generación de los consensos que los soportan, los asuma como regularidades en su discurso simplemente porque se le presentan como algo naturalizado e incuestionable. Esta última explicación donde más plausible parece es en la formación de futuros profesores, ya que es evidente que ellos no han participado en la generación de los consensos que son el soporte de los criterios de idoneidad didáctica. Por tanto, en la formación inicial de profesores, parece razonable que, en lugar de presentar los criterios de idoneidad como principios ya elaborados, se creen espacios para su generación como resultado de consensos en el grupo.

Reconocimiento

Trabajo desarrollado en el marco del proyecto de investigación en formación de profesorado: PGC2018-098603-B-I00 (MCIU/AEI/FEDER, UE).

Referencias Bibliográficas

Apel, K.O. (1991). *Teoría de la verdad y ética del discurso*. Barcelona: Paidós e I.C.E. de la Universidad de Barcelona.

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan. Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, *32*(60), (2018), 255-278. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13.

Breda, A. y Lima, V. M. R. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *REDIMAT*, 5(1), 74-103. https://doi.org/10.4471/redimat.2016.1955.

Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *13*(6), 1893-1918. https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a.

Burgos, M., Castillo, M. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico, *Bolema*. *34*(66), 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03.

Esqué, D. y Breda, A. (2021). Valoración y rediseño de una unidad sobre proporcionalidad utilizando la herramienta Idoneidad Didáctica. *Uniciencia*, *35*(1), 38-54. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.3.

Font, V., Breda, A. y Pino-Fan, L. (2017). Análisis didáctico en un trabajo de fin de máster de un futuro profesor. En J.M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M.L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 247-256). Zaragoza: SEIEM.

Font, V. y Godino, J. D. (2011), Inicio a la investigación en la enseñanza de las matemáticas en secundaria y bachillerato, en J. M. Goñi (ed.), *MATEMÁTICAS: Investigación, innovación y buenas prácticas* (9-55). Barcelona, España, Graó.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giacomone, B., Godino, J. D. y Beltrán-Pellicer, P. (2018). Developing the prospective mathematics teachers’ didactical suitability analysis competence. *Educação e Pesquisa*, *44*, e172011. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201844172011.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 11*, 111-132.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. For the Learning of Mathematics, 39(1), 37-42.

Habermas, J. (1997). Teorías de la verdad. En, J. A. Nicolás y M. J. Frápoli (Eds.), *Teorías de la verdad en el siglo XX* (pp. 543-596). Madrid: Tecnos.

Morales-López, Y. y Font, V. (2019). Valoración realizada por una profesora de la idoneidad de su clase de matemáticas. *Educaçao e Pesquisa*, *45*, e189468. https://doi.org/10.1590/s1678-4634201945189468.

Morales-Maure, L., Durán-González, R., Pérez-Maya, C. y Bustamante, M. (2019). Hallazgos en la formación de profesores para la enseñanza de la matemática desde la idoneidad didáctica. Experiencia en cinco regiones educativas de Panamá. *Inclusiones*, *6*(2), 142-162.

Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education, 11*(6), 1429-1456. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a

Pochulu, M., Font, V y Rodríguez, M. (2016). Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-RELIME, 19*(1), 71-98.

Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemáticos*. Tesis de Doctorado. Universitat de Barcelona, España.

Ruiz E. (2014). Funcions quadràtiques. Tesis de máster no publicada. Universitat de Barcelona, España.

Seckel, M. J. (2016). *Competencia en análisis didáctico en la formación inicial de profesores de educación general básica con mención en matemática.* Tesis de Doctorado. Universitat de Barcelona, España.

Seckel, M. y Font, V. (2020). Competencia reflexiva en formadores del profesorado en matemáticas. *Magis*, *12*(25), 127-144. https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-25.crfp.

Sousa, J.R., Silva Gusmão, T.C.R., Font, V., & Lando, J.C. (2020). Task (Re) Design to Enhance the Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers. *Acta Scientiae*, *22*(4), 98-120. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5711

<u>Conferencia 03</u>
De lo particular a lo general:
experiencias de equipos de trabajo en torno a la Educación Matemática

Alberto FORMICA
aformica@unlu.edu.ar – albertoformica@gmail.com
Universidad Nacional de Luján, Argentina

<u>Resumen</u>

Esta comunicación intenta mostrar lo valioso del trabajo en equipo, en el cual puedan intervenir profesionales vinculados a la enseñanza, no solo de la Matemática sino, incluso, de otras disciplinas de estudio. Lo que se describirá es parte de una experiencia desarrollada en el marco del Programa NEXOS, llevada a cabo en la Universidad Nacional de Luján (UNLu). Para ello, asumimos la inteligencia creativa, como el universo de pensamientos, ideas, alternativas y propuestas, que surgen pensando en mejorar la Educación y el Aprendizaje cuando, un grupo de profesionales que entienden en estos aspectos, se reúnen en entornos de discusión, reflexión y, por qué no, aprendizaje. Así, la inteligencia creativa, por lo menos desde la perspectiva que se aborda en este trabajo, se la sujeta a pensar en lo que puede surgir en torno al pensamiento colectivo y los aportes que cada uno, como individuo, puede sumar a un conjunto de ideas surgidas de esa reunión de iniciativas o “pensamientos”.

La experiencia que se relata muestra el espectro de trabajo realizado con un grupo de docentes de Matemática de varias escuelas secundarias, centralmente del último año de estudio, con quienes se organizaron encuentros, a modo de lo que podrían ser seminarios, en los cuales se han abordado temas de interés de la enseñanza de la Matemática. Este interés es reconocido no solo desde la organización, sino que son los temas que surgen de distintas conversaciones, muchas veces informales, que se dan entre docentes en determinadas ocasiones.

Por último, se destaca la riqueza del trabajo en grupo de profesionales, a partir de las derivaciones que surgen de las discusiones que se suscitan en esos equipos.

<u>Palabras clave</u>: Matemática. Educación Matemática. Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática.

A modo de introducción y contexto

El contexto que propone el tópico *Inteligencia Creativa al Servicio de la Educación y el Aprendizaje* planteado como ejes temáticos del evento que hoy nos reúne, da lugar, por lo menos desde la perspectiva que se aborda este trabajo, a pensar en lo que puede surgir en torno al pensamiento colectivo y los aportes que cada uno, como individuo, puede sumar a un conjunto de ideas surgidas de esa reunión de iniciativas o "pensamientos". Estos aportes cobran un sentido real cuando se presenta la posibilidad de concretarlo en algún contexto particular al servicio de la educación y el aprendizaje que, en nuestro entorno, se da principalmente en el área de la Educación Matemática o, centralmente, en un aula de Matemática.

La inteligencia creativa, en este trabajo, la concibo como el universo de pensamientos, ideas, alternativas y propuestas, que surgen pensando en mejorar la Educación y el Aprendizaje cuando, un grupo de profesionales que entienden en estos aspectos, se reúnen en entornos de discusión, reflexión y, por qué no, aprendizaje.

En relación con este enfoque del pensamiento, resulta interesante compartir las impresiones y resultados surgidos en el marco del desarrollo de una experiencia que se llevó a cabo durante el año 2019 en la Universidad Nacional de Luján en el marco del Programa Nexos. Esa experiencia es solo un ejemplo de la riqueza presente en cada iniciativa que se propone reunir docentes (en este caso de Matemática y de escuelas de nivel secundario) con el fin de compartir conocimientos e ideas para la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática. De este modo, será entendida la creatividad de la inteligencia como un aspecto inferido desde lo colectivo.

La inteligencia colectiva en un individuo podría entenderse como el conjunto de pensamientos, ideas, conceptos y significados que reúne la mente humana. Adaptando esta idea, también podría asumirse que esa inteligencia colectiva es la que se observa cuando se producen organizaciones de personas bajo un mismo objetivo como, por ejemplo, lo que ocurre en los seminarios, u otro tipo de reuniones entre profesionales, en nuestro caso, vinculados a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, independientemente del nivel de formación en la que ésta se aplique. Es allí, cuando lo colectivo de la inteligencia de un individuo, concebida como se lo acaba de señalar, genera un pensamiento colectivo y creativo, que permite instrumentar, organizar y hasta poner en práctica muchas ideas que surgen de ese contexto.

Las reuniones en las que se convoca a la participación de docentes de Matemática (aunque también podría ser otra disciplina), generan un entusiasmo especial en los profesionales del área, que desafía a los organizadores y moviliza, en los invitados y participantes, una cantidad de conocimientos que permiten modificar, mejorar y/o alterar las prácticas cotidianas del enseñante.

La inteligencia creativa puede ser pensada como un proceso que invita a la creación o recreación de algo novedoso, innovador, a partir de los recursos existentes y disponibles, tanto por las instituciones como por las personas que llevarán a cabo este proceso. En el caso de las experiencias entre grupos o equipos de trabajo en torno a la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, algunos de estos recursos podrían ser, por ejemplo, las rutinas reconocidas por cada docente como eficaces o como insuficientes para el aprendizaje de ciertos temas. El reconocimiento de estos aciertos y de estas deficiencias, genera un aprendizaje, en los docentes, que luego se convierte en mejoras y avances en la enseñanza.

Varios autores, entre ellos Howard Gardner, señalan clasificaciones que enumeran distintos "tipos de inteligencia". Gardner (1995) sostiene que en el humano se desarrollan inteligencias de distintas características, no una única, y que cada persona combina una variedad de ellas, algunas de las cuales son más predominantes que otras. Entre estos tipos de inteligencia, señala las que llama *lógico-matemática*, por un lado y otra que es la *lingüística*.

Quién desarrolla tareas matemáticas, en el rol de alumno, estudiante avanzado o investigador, debe tener desarrollados estos dos tipos de inteligencias, además de otras de la clasificación que plantea Gardner. La que llama *lógico-matemática* hace referencia a la posibilidad de establecer, con cierta facilidad, razonamientos en cadena e identificación de ciertos patrones involucrados en los procesos de resolución de problemas, entre otras cosas. Por otro lado, la inteligencia *lingüística* está relacionada con la capacidad del individuo para elaborar adecuadamente oraciones o frases, utilizando acertadamente el lenguaje y las palabras, conociendo sus significados e intervenciones en los diferentes marcos que maneja.

Si bien no se descuenta la importancia que pueden tener cada uno de los tipos de inteligencia señalados por Gardner, se asume que estos dos que hemos señalado, son sobre los que los docentes de Matemática debemos trabajar con nuestros alumnos. Necesitamos que nuestros alumnos puedan elaborar correctamente un razonamiento que involucre nociones matemáticas y, para eso, necesitamos que tenga la posibilidad de elaborar, fluidamente, una forma de expresarlo. Sobre ambas cuestiones, es muy común referir deficiencias en los estudiantes, así como una enorme preocupación de los docentes (no solo de Matemática) en relación a ello. También, sobre esas mismas cuestiones, los docentes de Matemática tenemos la capacidad de generar aportes que permiten el desarrollo de algunos aspectos asociados a *estas inteligencias* en nuestros alumnos.

Desde este punto de vista, generar o participar de instancias en las que se generen espacios de discusión y de reflexión sobre algunos aspectos del aprendizaje de la Matemática, permite poner en práctica acciones que promuevan una enseñanza más eficiente en relación a aquellos aspectos.

Teniendo en consideración esta premisa, es que se ha aprovechado el espacio que ofreció el Programa Nexos, impulsado por la Secretaría de Políticas Universitarias, dependiente del Ministerio de Educación de la Nación, a través de la Convocatoria 2018 "NEXOS: Proyectos de Articulación Universidad - Escuela Secundaria" desde el área Matemática de la Universidad Nacional de Luján (Departamento de Ciencias Básicas).

De acuerdo a lo que señala el nombre de la convocatoria, el programa se propone establecer un vínculo entre los últimos años de la escuela secundaria con la universidad, con la intención de contribuir al tránsito de los estudiantes de un nivel a otro. Este cambio de nivel, como es sabido, genera múltiples impactos en los estudiantes, no solo a en el plano intelectual sino también el afectivo y relacional.

Acompañar a los estudiantes desde el último año de su formación en la escuela secundaria, si bien es una tarea que llevan adelante sus propios docentes, es algo en lo que también podemos aportar quienes nos desempeñamos en la universidad y esperamos su llegada para el comienzo de sus estudios en ella. Este acompañamiento no solo podemos hacerlo de manera personal, sino que también puede hacerse a través de un trabajo conjunto con sus profesores de la escuela secundaria, y eso fue lo que se planteó como principal eje en el mencionado proyecto.

Nuestra participación en la convocatoria Nexos 2018, se concentró en la línea que se llamó *Matemática: Reflexiones sobre la forma de estudiar y sobre el saber matemático prioritario en la transición del nivel medio a la universidad*[3] y se desarrolló a lo largo del año 2019 en la sede central de la Universidad Nacional de Luján.

Breve descripción de la propuesta

La participación en distintos eventos en los que se interactúa con docentes de Matemática de distintos niveles, promueve conversaciones en las que se ponen de manifiesto distintas inquietudes sobre la situación de los estudiantes en el momento actual. Se plantean especialmente cuestiones vinculadas con las dificultades de los alumnos para poder explicar un procedimiento, para poder justificar una respuesta, en resumen para poder argumentar sobre sus conclusiones. Si bien no es éste un aspecto de sencilla solución, resulta interesante establecer discusiones y reflexiones en las que participen, especialmente, grupos de docentes interesados en abordar, entre otras, esta problemática. También se hacen referencias casi constantes a las dificultades que los estudiantes tienen para comprender una consigna, ya no solo de Matemática, sino más allá de esta disciplina de estudio. Al respecto, surgen diferentes aspectos a considerar: las dificultades y el escaso compromiso con la lectura que tienen muchos estudiantes, la complejidad de los enunciados matemáticos, la complejidad del contenido propuesto en esos enunciados y, muchas veces, la imprecisión de éstos. En esas conversaciones, no faltan también, las acusaciones acerca del poco dominio de las herramientas matemáticas que poseen los estudiantes.

Todas estas revelaciones que se plantean en las charlas con distintos docentes, nos han hecho pensar en la oportunidad que nos ofrecía el Programa Nexos para definir una línea en la que podamos invitar y compartir algunos encuentros con un grupo de profesores de Matemática de, por lo menos, el último año de la escuela secundaria, entendiendo que son éstos los más interpelados por la articulación con la universidad. Sabiendo de la importancia de estos aspectos, hemos definido, entonces, una propuesta en la que nos comprometimos con una serie de escuelas a realizar, en las dependencias de la Sede Central de la UNLu, seis encuentros con profesores de estas escuelas de la región en la cual tiene especial incidencia nuestra universidad.

Para cada uno de estos encuentros, que se agruparon bajo el nombre *Espacios de reflexión, discusión y formación en la enseñanza de la Matemática*, se han seleccionado temas que son relevantes y de interés general para la enseñanza. Entre estos temas, podemos mencionar: *Ecuaciones y Expresiones Algebraicas*, *Funciones de una variable real*, enfocándolas desde una mirada "cualitativa" y, también, desde un aspecto

---

[3] En la experiencia participaron como co-responsables las profesoras Ana María Torres y María Alejandra Aloisio, y también se contó con la colaboración de las profesoras Ana Clara Torelli, Vanina Martínez, Mónica Jañez, Virginia Figueroa, Andrea Piedrabuena y Roxana Pagano, todas docentes de la División Matemática del Departamento de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Luján.

analítico, atravesando, incluso, cuestiones vinculadas a la enseñanza del límite de funciones. Se ha dedicado también un encuentro al tratamiento de algunos aspectos propios de la Educación Matemática, intentando plantear una reflexión sobre las herramientas que podrían resultar de utilidad considerar a la hora de pensar nuestras clases de Matemática.

En el desarrollo de cada jornada, se generaban momentos en los que, además de presentar un enfoque del tema del día, se abrían instancias de discusión colectiva, en las que cada participante podía expresar su acuerdo o disenso con el enfoque presentado, a partir del análisis de su propia experiencia. Siempre se puso especial interés al trabajo que podría hacerse, desde cada contenido temático, sobre las dificultades para las explicaciones y argumentaciones por parte de los alumnos, intentando ver de qué manera establecer consignas en las que se invoque, deliberadamente, la necesidad de explicar, de argumentar. En este sentido, puede plantearse una diferencia entre lo que se refiere a la explicación y a la argumentación. En el ámbito de una clase de Matemática, como *explicación* se espera un discurso que persigue el propósito de hacer "entendible" para otro sujeto (alumno, profesor u otro), una definición, una acción, un proceso o un resultado o, incluso, las relaciones entre los objetos matemáticos que se ponen en juego en la actividad. A su vez, asumimos que se está *argumentando* cuando se intenta convencer, a otro sujeto, de la validez de una afirmación, de la validez de una inferencia y cuando, además de la explicación, se hacen explícitas las razones de la certeza de un hecho, resultado o afirmación. Esta forma discursiva (la argumentación) debería poder ser utilizada por los estudiantes en momentos en los que necesita confirmar o refutar alguna producción, propia o de un grupo en el que éste haya intervenido (Falsetti, M., Formica, A. et al, 2009).

Otro aspecto del proyecto

Como parte del diseño de la propuesta para el trabajo en NEXOS, se ha planteado, también en su formulación, una instancia de trabajo con alumnos del último año de algunas escuelas secundarias. La propuesta consistía en la realización de un taller en el que se compartieran distintas alternativas para el abordaje de la resolución de las tareas de Matemática. Se llamó *Taller para el estudio en Matemática: la resolución de consignas y la preparación de un examen*. La consideración que, para la formulación de la propuesta se ha tenido en cuenta, es el hecho de pensar que, resolver una actividad en Matemática, a partir de lo que se plantea desde una consigna, ya sea hecha en la clase, en un texto o en un problema o ejercicio de examen, involucra una gran cantidad de acciones, muchas de las cuales se concretan en la escritura de la respuesta, pero también de otras tantas que forman parte de un aspecto meta-cognitivo. Este aspecto suele (o debería) ponerse en juego, muchas veces, antes de comenzar la resolución, intentando dar respuesta a algunas preguntas como ¿qué se espera que haga con este ejercicio? ¿con qué información cuento para hacerlo? ¿qué es lo que debo hacer? ¿cómo lo hago? Intentamos hacer notar que, contar con las respuestas a algunas de estas preguntas, predispone positivamente para comenzar a resolver la actividad. Es cierto que quién quiera resolverla, deberá tener conocimiento del saber matemático involucrado en la misma, pero no es de menor importancia saber cómo organizarlo y cómo hacerlo emerger, y eso es algo que se esperaba como un logro del taller.

La primera edición se desarrolló con un grupo de estudiantes de una de las materias de Matemática del primer año de estudio de algunas carreras de la UNLu. Esta experiencia piloto, luego se llevó a cabo con alumnos de las escuelas, tal como era el objetivo, y para ello se utilizó la exposición que cada año ofrece la universidad a la comunidad educativa de su región de influencia: la ExpoUNLu. Allí, se ofrecieron dos ediciones del taller, en el que participaron un importante número de alumnos, y se ha visto el interés que les genera el interactuar con docentes de la universidad, junto con el hecho que éstos le "conviden" estrategias útiles para el abordaje de sus estudios, de la resolución de sus tareas y, también, para enfrentar una instancia de evaluación.

Otro aspecto destacable de la realización de este taller, es el intercambio que ha surgido entre docentes de distintas disciplinas que han participado del mismo. El interés se manifestó a través de invitaciones que nos han hecho a realizar estos encuentros presencialmente en las escuelas, en las que también sugerían la invitación a docentes de distintas áreas, no solo de Matemática.

Por último, es importante destacar que, como una consecuencia más de este proyecto, y como resultado de las conversaciones mantenidas con los docentes que han participado del taller acompañando a sus alumnos, se han presentado, y aprobado, acciones de extensión que involucran a un grupo de colegios, en los cuales se desarrollarán encuentros de características similares a las propuestas en aquellos talleres. Lamentablemente, el conflicto sanitario de la pandemia COVID 19 que nos afecta este tiempo, ha postergado el comienzo del desarrollo de las mismas, pero aguardamos llevarlo adelante en cuanto resulte posible hacerlo.

A modo de conclusiones

Como corolario de todo lo expresado en este trabajo, parece importante destacar lo valioso que resultan los espacios de discusión con docentes y entre docentes, no sólo del área disciplinar a la que pertenecen, porque de estas interacciones devienen siempre nuevas posibilidades para enfrentar nuestro trabajo, que indefectiblemente generan avances en nuestra enseñanza y, consecuentemente, es esperable que también repercutan favorablemente en el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias Bibliográfícas

- Gardner, H. *Inteligencias Múltiples. La Teoría en la Práctica*. Barcelona: Paidós, 1995.

- Falsetti, M.; Formica, A.; Matteucci J.; Marino, T.; Mellincovsky, D. *Explicación, argumentación, justificación y demostración en Matemática*. Actas de la I Jornadas de Lógica y Argumentación. Universidad Nacional de General Sarmiento. Formato CD. ISSN 1852-4958. Buenos Aires, 2009.

Conferencia 04

Creatividad e Imaginación en la Formación de Profesores

Teresa LOIÁCONO
teresaloiacono@yahoo.com.ar

Resumen

Este artículo tiene como objetivo abrir un espacio para que los docentes y formadores de formadores encuentren su propio camino para imaginar situaciones de aprendizaje y crear sus propios materiales de cátedra. Para este objetivo, revisitaremos los desarrollos que destacados investigadores en educación nos han brindado a lo largo de los dos últimos siglos. Esta revisión nos brindará herramientas claves para imaginar, crear y aplicar nuevas y efectivas estrategias en el aula. Es así como abordaremos el contexto en que se desarrolla la situación de aprendizaje, haremos una breve reseña de las teorías de aprendizaje más importantes que dieron orígenes a distintos enfoques sobre didáctica de la matemática y trataremos sobre la tecnología en educación y la importancia de las mismas en la construcción de nuevas formas de aprender y enseñar.

Palabras Clave: Educación Matemática. Creatividad. Imaginación. Teorías de Aprendizaje. Tecnología Educativa.

Introducción

Los debates sobre la formación de los educadores del siglo XXI señalan que ellos deben estar formados para promover el desarrollo de habilidades que la sociedad contemporánea requiere en el orden de la autonomía, polivalencia, flexibilidad, adecuada selección y procesamiento de la información; capacidad para la toma de decisiones en contextos de cambio, incertidumbre y complejidad, integración a equipos de trabajo, ser creativos en sus clases, imaginar nuevos escenarios. Con el fin de abrir un espacio para que el profesor pueda desarrollar su creatividad e imaginación, tanto en sus clases como en el diseño de actividades, nos ocuparemos del aula, dos de las más importantes teorías de aprendizaje y las tecnologías educativas.

El Aula

El aula donde transcurrió el proceso enseñanza-aprendizaje se organizó de la manera que se conoce hace unos trescientos cincuenta años. Se estructuró en base al método frontal, esto es, una disposición centrada en el frente, con un punto de atención en la figura adulta que organizaba la relación con el educando. Una relación asimétrica y radial entre el docente/adulto y los alumnos/niños-adolescentes-adultos. Se trataba de cubrir las necesidades de la industrialización en materia de conocimientos básicos. A mediados del siglo XX ese sistema educativo entró en crisis.

A través de la mirada del filósofo italiano Gianni Vattimo y el sociólogo y filósofo de origen polaco Zygmunt Bauman, se tratará de visualizar el contexto donde nace y se desarrolla el proceso áulico.

Según el enfoque de ***Gianni Vattimo***, hemos entrado en la postmodernidad, una especie de “babel informativa”, donde la *comunicación* y los *medios* adquieren un carácter central. La postmodernidad marca la superación de la modernidad dirigida por las concepciones *unívocas* de los modelos cerrados, de las *grandes verdades*, de *fundamentos consistentes*, de la historia como huella unitaria del acontecer. La postmodernidad abre el camino, según Vattimo, a la *tolerancia*, a la *diversidad*. Es el paso del ***pensamiento fuerte***, metafísico, de las cosmovisiones filosóficas bien perfiladas, de las creencias verdaderas, al ***pensamiento débil,*** a una modalidad de *nihilismo débil*, a un *pasar despreocupado* y, por consiguiente, alejado de la *acritud existencial*. Para el filósofo italiano, las ideas de la postmodernidad y del pensamiento débil están estrechamente relacionadas con el desarrollo del escenario multimedia, con la toma de posición mediática en el nuevo esquema de valores y relaciones.

Zygmunt Bauman, denomina a este período ***Modernidad Líquida***. Para el sociólogo las características de esta época son:

* El **colapso del pensamiento**, **de la planificación y de la acción a largo plazo**, reducen la historia política y las vidas individuales a una serie de proyectos de corto alcance, que van en contra de los conceptos de ***desarrollo, maduración, carrera.***

Olvidar por completo y con rapidez la ***información obsoleta*** y las ***costumbres añejas*** puede ser más importante para el éxito futuro que memorizar jugadas pasadas y construir estrategias basadas en un aprendizaje previo.

*La ***virtud*** que se proclama más útil para el ***crecimiento individual*** es la ***flexibilidad,*** para abandonar compromisos, lealtades para ir con rapidez tras la oportunidad del momento”.

¿Qué ocurre con la educación en estos tiempos líquidos, de pensamiento débil?
El pensador y escritor francés ***Edgar Morin*** lo sintetiza así “Pienso que no se adaptó a la complejidad que vivimos desde el punto de vista personal, económico y social. Tenemos una conciencia dividida en compartimentos estancos, incapaz de ofrecer perspectivas unitarias e inadecuadas para enfrentar de manera concreta los problemas del presente. Nuestros estudiantes no aprenden a medirse con los grandes desafíos existenciales, tampoco con la complejidad y la incertidumbre de una realidad en constante mutación. Me parece importante prepararse para entender las interconexiones: cómo una crisis sanitaria puede provocar una crisis económica que, a su vez, produce una crisis social y, por último, existencial.” (2020)

Es en esta etapa de postmodernidad o modernidad líquida que se van gestando diversas teorías del aprendizaje. Revisitaremos algunas de ellas con el fin de que le sean útiles, a los profesores y formadores de formadores, para crear e imaginar sus clases acorde a los tiempos que vivimos.

Teorías de Aprendizaje

Dos de las teorías de aprendizajes más importantes son la ***conductista*** y la ***constructivista***.

La **corriente conductista o mecanicista,** como su nombre lo indica, propugna un aprendizaje repetitivo y mecánico. Se basa en las relaciones causa-efecto. El profesor, se ubica en el centro del proceso enseñanza-aprendizaje. El alumno es un receptor de contenidos. El aprendizaje se basa en conseguir un objetivo, no se consideran los procesos mentales del estudiante. Uno de sus máximos exponentes fue el psicólogo ruso Pavlov.

El **modelo constructivista u organicista**, considera que el alumno sólo aprende aquellos conceptos que ha construido o que han ayudado a construir.

Para poder construir los conceptos se debe considerar la madurez cognitiva del estudiante, por eso no podemos olvidar los estudios de Piaget.

En 1935 **Jean Piaget** escribía, "Si se desea formar individuos capacitados para la invención y hacer progresar la sociedad de mañana-y esta necesidad se hace sentir cada vez más-está claro que una educación basada en el descubrimiento activo de la verdad es superior a una educación que se limite a fijar voluntades ya formadas lo que hay que querer y mediante verdades simplemente aceptadas lo que hay que saber".

La psicología infantil responde a 3 puntos clave:
1-la formación de la inteligencia y la naturaleza activa de los conocimientos.
2-las operaciones.
3-la madurez.

Todos ellos de importancia decisiva para la ***elección de los métodos didácticos***, veamos su significado:
1-La función esencial de la inteligencia consiste en construir estructuras, estructurando lo real. Esta estructura consiste en organizar lo real, en acto o en pensamiento y no simplemente en copiarlo.
2-El desarrollo de las operaciones, tiene 4 períodos:
El ***1° período*** se conoce como **sensomotor** llega hasta los 2 años. El niño comienza a reconocer objetos, a través de la percepción y los movimientos.
El ***2° período*** va desde los 2 a los7 u 8 años se caracteriza por la formación de la función simbólica y semiótica, signos de la misma son: el juego simbólico, la imitación diferida, la imagen mental, el dibujo, entre otros.
El ***3° período*** se denomina, *concreto,* abarca desde los 7u8 años a los 11-12.Se caracteriza por la *formación de operaciones*: reuniones, disociaciones, relaciones, seriación, orden serial, que da lugar a los números.
El ***4° período*** es el denominado del ***pensamiento abstracto***, se comienza a dar desde los 11-12 años cuyo techo está ubicado en la adolescencia. Su característica general es establecer hipótesis y llegar a su solución, las relaciones que en el período anterior vio disociadas ahora las interrelaciona.

En la teoría constructivista juega un rol importante la ***resolución de problemas***.
El trabajo seminal de **Polya (1945**) sobre cómo resolver problemas proporcionó el impulso inicial para una gran cantidad de investigaciones que tuvieron lugar en las siguientes décadas, dos de las cuales se deben a ***Yves Chevallard y Guy Brousseau.***

Yves Chevallard: La Transposición Didáctica
En los años 1991***, años de la modernidad líquida, posmodernismo o del pensamiento débil,*** **Yves Chevalard** crea la noción de la transposición didáctica, del contrato didáctico, conceptos que surgen dentro de la didáctica de la matemática y posteriormente pasan a formar parte de la didáctica general de toda ciencia. Desde esta perspectiva ya comienza a visualizarse un cambio de paradigma en el concepto de enseñanza. En la tríada didáctica, será el docente quien deje de ocupar el lugar escénico de divulgador de conocimientos para reorientar la enseñanza en una reinvención de la matemática mediante la creación de situaciones didácticas. El fin último

de la enseñanza es la apropiación de la obra matemática por parte de los alumnos en los contextos característicos de una ***modernidad líquida***: la producción colegiada, el incentivo de la creatividad no solo en el razonamiento sino también en la comunicación de ideas matemáticas, la flexibilidad de los tiempos de trabajo adecuados a una verdadera asimilación de contenidos, la planificación inacabada y siempre incompleta de una clase en virtud de los aportes, necesidades, contextos formativos, diversidad del grupo y ecología del aula.

Guy Brousseau: La Teoría de las Situaciones

Brousseau sostiene que la reproducción de una actividad científica por parte de un estudiante implica poder actuar, formular, probar y reconocer el conocimiento. Esto lo lleva a considerar distintas ***funciones del saber***, que en el aula se traducen por distintos tipos de ***situaciones***:

- ***Situaciones de acción***: en ellas se propone al estudiante un problema para el que la mejor solución se logra mediante el conocimiento a enseñar.
- ***Situaciones de formulación***: son aquéllas en las que el estudiante intercambia información con otros estudiantes para su posterior debate en la clase.
- ***Situaciones de validación:*** en ellas, el estudiante debe probar la validez, exactitud y pertinencia de su modelo, convenciendo a otros, quienes pueden pedir explicaciones adicionales y aún rechazar –justificando - las que no acuerden.
- ***Situaciones de institucionalización***: son las que permiten establecer convenciones sociales. En esta etapa reaparece explícitamente la intencionalidad didáctica. Este momento es el que más se asemeja a las clases tradicionales, al docente “dando clase”.

Muy posiblemente, la meta de las escuelas inmersas en esta ***“babel informativa”***, en esta ***etapa de liquidez,*** sea la de ***“revolucionar”*** la educación, en lugar de “evolucionar” en sus contenidos. Debemos fortalecer nuestras estrategias de creatividad para poder así estar abiertos a comprender el mundo por venir. En esta etapa, ***las tecnologías*** son una excelente herramienta para crear materiales, dinamizar nuestras clases, imaginar situaciones nuevas, pensar el proceso áulico con otra mirada.

Las Tecnologías en Educación

Han transcurrido varios años desde que se tomó la iniciativa de llevar las nuevas tecnologías a las aulas y que se pretendió mejorar la educación con la incorporación de hardware en las universidades e institutos terciarios para facilitar a los alumnos el acceso a las mismas.
Se esperaba una mejora sustancial que, desde nuestro punto de vista, hasta ahora, no se ha logrado.
En cambio, podríamos decir que las tecnologías son un eficiente auxiliar para los docentes y alumnos, las clases se pueden tornar más dinámicas, motivadoras, renovadoras, fundamentalmente en el ámbito terciario y universitario.
¿Cuál es el rol del docente en esta época posmodernidad, época líquida? *Se puede decir que*: ***“debe despertar las inteligencias, capacidades, conciencias y actitudes”.*** (www.peremarques.pangea.org). Ser un facilitador, acompañar el proceso de internalización de los alumnos, debe ser competente pero al decir de Marc Prensky es un “inmigrante digital”.
Sobre los alumnos entendemos que, como “nativos digitales” (Prensky) necesitan recibir información en forma rápida. Trabajan simultáneamente en varias actividades virtuales. Interpretan más fácilmente un gráfico que un texto. Necesitan permanentes estímulos y recompensas por su trabajo o estudio.
Aún no estamos seguros de que satisfacer esas necesidades sea el camino adecuado para el logro de una educación de calidad.
Los alumnos esperan demasiado de la tecnología y dejan de lado lo fundamental, suponen que el acceso a Internet y las cuasi-infinitas posibilidades de comunicación suplan su desconocimiento básico.
Es más, los ***neurólogos*** y ***neurobiólogos*** no se ponen totalmente de acuerdo con respecto a las ventajas del trabajo en varias actividades virtuales.
El Dr. Estanislao Bachrach escribe el siguiente párrafo en su libro **En Cambio**:
“La habilidad de prestar atención de manera selectiva, ignorando las distracciones, se desarrolla desde la niñez hasta la adolescencia. Esta es la habilidad de cambiar tu atención de manera rápida y eficiente de una

cosa a otra. Pero esta habilidad, como seguramente notas, decrece con el tiempo. Por eso los más jóvenes parecen poder estar haciendo muchas cosas al mismo tiempo.
Sin embargo, tanto en jóvenes como en no tan jóvenes, cuando realizamos varias actividades que requieren nuestra atención consciente para poder resolverlas, no las estamos resolviendo al mismo tiempo. Nuestra atención va saltando de una tarea a la otra haciendo un gran esfuerzo que provoca no sólo más posibilidades de equivocarse y de tardar más tiempo en resolverlas, sino además mucho cansancio.
Es lo que comúnmente llamamos ***"hacer multitasking"*** *y lo que la ciencia conoce como* ***"interferencia de la tarea dual"****. Es como si prendieses y apagases la luz de tu cuarto cientos de veces. Para las tareas que requieren mucha atención, te recomiendo empezarlas y terminarlas sin distraerte en otras cosas. Sé que por el mundo de estímulos en el que vivimos, esto es muy difícil, pero verás que sos más eficiente y que al final del día estarás menos cansado".*

La Tecnología dentro del Aula

La pizarra digital interactiva

Un recurso sumamente útil e innovador, aunque pocas instituciones lo tienen, es la **pizarra digital interactiva**.
Parece interesante su implementación en ciertos niveles: (pre-escolar, enseñanza básica,….) pero a medida que vamos conociendo sus potencialidades y, adaptándola a las necesidades de los alumnos, se descubre un nuevo e importante aliado en educación terciaria y superior.
Una de las características más significativas es la de permitir todo tipo de enlaces: a documentos del docente, a Internet, a selecciones por tema, etc. y al retomar el tema a la clase siguiente, damos continuidad a lo tratado, reservando el material empleado para re-pasarlo al comienzo de la reunión, reduciendo al mínimo el consumo de tiempo de tiempo que ello conlleva.
Otra utilidad que conviene destacar, y que en la que se pondrá énfasis en este artículo, es la que se logra con los alumnos a distancia, que disponiendo del software, reciben del docente llamados para focalizar la atención hasta ahora imposibles, como puede ser, destacar una definición o una representación gráfica, como si el alumno estuviera en clase.

Particularmente, hemos planteado este trabajo a partir de la formación de formadores y allí nos hemos encontrado con que es posible cumplir con lo señalado anteriormente, e incluso se obtiene una ventaja adicional, de suma importancia. En instituciones donde es posible que cada alumno trabaje con una PC, al implementar el uso de la pizarra digital interactiva, los alumnos pueden salir del aislamiento que significa cada uno de ellos trabajando en su ordenador y compartir con el grupo sus cuestionamientos, sus logros, sus pareceres.
Se abre también un sinfín de posibilidades de exploración, por ejemplo, por Internet, con la facilidad de mostrar a los alumnos esquemas, gráficos, fotografías, videos, etc. sin que el docente deba recurrir a sus propios e imprecisos esquemas.

Algunos neurólogos y neurobiólogos que se han ocupado de la educación, como **Marsel Mesulam**, han demostrado que la actividad cerebral y las funciones para aprender deben ser siempre novedosas y que el aburrimiento es una de las principales causas del fracaso.
En ese contexto, el trabajo con las formas y los enfoques, el proceso de señalar, destacar, ocultar, trabajar con colores, etc. con una pizarra digital, que supera ampliamente lo que es posible hacer en el pizarrón tradicional, por más moderno que éste sea, pasa a ser un poderosísimo estímulo para el cerebro.
Además, es un estímulo que cambia formas y colores, que agranda o reduce imágenes, textos… que trae de Internet o de la computadora del docente lo necesario en cada momento, que permite vitalizar la clase en cada instante.
La habilidad del docente para emplearla en la justa medida, respetando los momentos de la clase y sin exageraciones perniciosas, convertirá a esta novedad en una gran aliada de sus clases.
Por otra parte, algunos autores se han dedicado a estudiar las capacidades espaciales (directamente asociadas con el tema que nos ocupa), o sea, la habilidad para generar, retener y manipular imágenes visuales (Lohman 1979).
Entre ellas destacaremos la <u>capacidad de efectuar</u> un paneo de la pizarra y la de efectuar <u>relaciones espaciales.</u>
<u>La primera</u> es una capacidad que consiste en efectuar una exploración visual de un campo extenso o complicado, hacer una rápida mirada al conjunto y efectuar un paneo que permita encontrar un hilo conductor. (Ekstrom et. al 1976)

La segunda consiste en la habilidad para reconocer un patrón espacial de comportamiento o mantener una orientación con respecto a objetos en el espacio.
Ambas capacidades se verán potenciadas y mejoradas por el uso de recursos como la pizarra digital, a nuestro entender, porque además evitan la dispersión de la atención, una vez que el docente, mediante las técnicas adecuadas en cada caso, logre que su alumnado focalice el objeto de conocimiento.
Por otro lado, el empleo de la pizarra permite mejorar la capacidad de los alumnos para descubrir construcciones simples en las relaciones entre variables, y este tema en particular es factible de presentarse de modo sumamente ágil y atractivo.
También hemos señalado las actividades posibles para el alumno a distancia. Si estamos atendiendo grupos de alumnos presenciales simultáneamente con alumnos a distancia, disponiendo del software, los alumnos estarán en condiciones de "participar" en algunos momentos de la clase, según lo determine el docente, haciendo la reserva del material correspondiente durante su exposición para luego hacerla llegar al alumno a distancia.

Como resulta utópico pensar en aulas con pizarras digitales interactivas, reduzcamos nuestra presentación a recursos para utilizar en el aula simplemente con una computadora para cada alumno y un **proyector** o muchas veces, con los **teléfonos celulares** o las tabletas.

Reflexionando sobre los estudios hechos por neurólogos y neurobiólogos y recordando las palabras de ***Steven Berlin Johnson***, en su libro **"Apertura Amplia de la Mente",** que dice que en ciertos casos, los video juegos mejoran la comprensión y desarrollan ciertas destrezas cognitivas, nos preguntamos:

¿Podemos visualizar algunas transformaciones de los espacios vectoriales, usando videojuegos?
Utilizando imágenes de video juegos como: Pac-Man, Monkey Island, Nascar, entre otros podemos trabajar para construir el concepto de transformaciones geométricas de un espacio vectorial a otro, en un Álgebra II de un Profesorado en Matemática. También los podemos usar en un curso de Álgebra y Geometría Analítica de Ingeniería en Sistemas, preguntando a los alumnos qué conceptos matemáticos se necesitan para diseñar esos videos juegos.

Podemos seguir jugando, pero, ***¿si creamos nuestro propio video juego?***
En el 2001 creamos un juego denominado: ***Jugando con la Economía Argentina***. La idea fue acercarles a los alumnos una aplicación del álgebra y al mismo tiempo, adelantar algunos contenidos preliminares relativos a teoría económica. En este objetivo, trabajamos conjuntamente las cátedras de Análisis Matemático I, Algebra y Macroeconomía, sobre la base de la última matriz insumo producto estimada para la Argentina. En el trabajo, describimos los pasos que van desde la resolución de un sistema de ecuaciones lineal, al álgebra matricial y a la teoría necesaria para permitir su aplicación a un modelo insumo - producto. Finalmente "jugamos" con la economía argentina a partir de los respectivos cuadros estimados para el año 1997, cargados en una planilla de cálculo, luego de reducir la matriz original de 72 filas por 72 columnas a una de 14 por 14. Un "juego" o ejercicio de los más clásicos, es aquel por el cual los alumnos podrán ver qué ocurre con la variación del volumen de demanda total y sectorial cuando varía la cantidad demandada de bienes finales o demanda final, es decir los bienes de consumo final y de inversión. Asimismo, que ocurre, por ejemplo con las importaciones. También podrán ver como los resultados se alejan de la realidad cuando, por ejemplo la matriz se reduce demasiado respecto de la original, lo que los obligará a un trabajo adicional de desglose de sectores en dos o más subsectores.

<u>Otros Recursos</u>

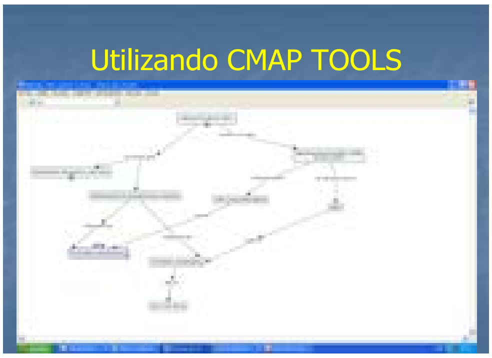
<u>1-Test de Elecciones Múltiples</u>

SOCRATIVE es un recurso que puede ser usado en distintos momentos de la clase logrando un feedback sumamente enriquecedor, dado que permite motivarlos en el comienzo de la clase, corregir errores de interpretación o distracciones del alumnado durante el desarrollo y conocer el grado de aprendizaje logrado.
El empleo de cuestionarios en tiempo real con visualización de resultados permite la discusión, extensión y crecimiento del grupo.
Las posibilidades son: test de elecciones múltiples (Multiple Choice), respuestas verdadero- falso, respuestas breves predeterminadas o respuestas abiertas.

Una vez terminada una explicación tradicional, se abren distintas posibilidades al docente para efectuar un resumen o dar un cierre.

2-Mapas Conceptuales

Entre las más utilizadas, nos encontramos con **CMAP TOOL**, herramienta que se encuentra en las netbooks que llegaron a los alumnos de escuelas primarias y secundarias. Consiste en la presentación gráfica de conceptos teóricos. Permite hacer mapas conceptuales y compartir lo elaborado utilizando Internet, por lo que se transforma en una herramienta colaborativa.



3-Pósters Multimedia

Otra posibilidad de resumir conocimientos en una forma muy amena es la creación de un **póster**, mediante el programa Glogster: "The creative visual learning platform that every educator and student deserves" (www.**glogster**.com/) (La plataforma educativa de creatividad visual que cada docente y estudiante merece)
Es sumamente fácil de usar, podemos crear un póster en forma privada o darlo a conocer, los alumnos son invitados por el docente a participar en la concreción del mismo, permite agregar fotografías, sonidos, links, entre otras cosas.

Ha sido utilizado con mucho éxito para resumir temas de educación superior en una forma novedosa. En la imagen se presenta su empleo para introducir la Programación Lineal.

4- Aplicaciones a la Educación de los códigos QR

La amplia difusión y aplicación de estos códigos en la vida diaria nos sugieren que también podamos utilizarlos para agregar una nota distintiva en educación.

QR quiere decir **QUICK RESPONSE.**

Es muy fácil hacer un código QR que nos llevará a una página de Internet.

Hagamos las guías de ejercicios con un código QR al finalizar las mismas que le muestren al estudiante las respuestas o las soluciones o la información para profundizar los temas que se tratan en la guía. De acuerdo con el objetivo de aprendizaje, tendremos un código QR que lo derivará al contenido necesario.

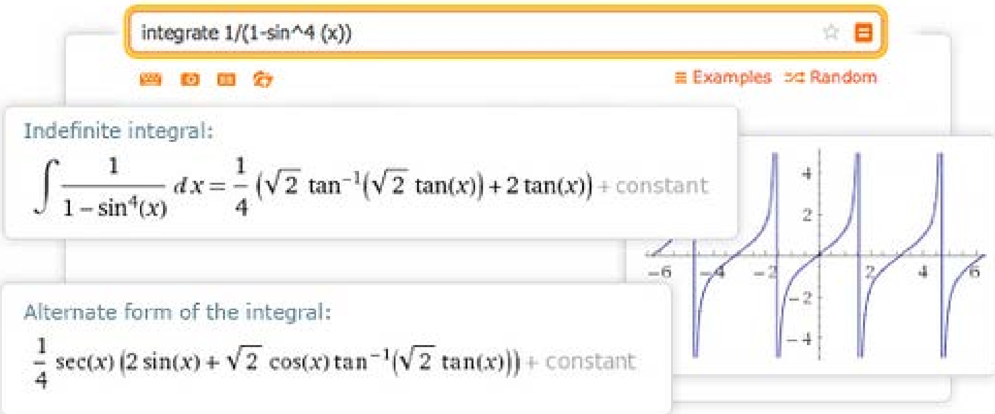
5- Los Teléfonos Celulares

A partir de la proliferación y el desarrollo de la telefonía móvil y de los recursos incorporados a los mismos, surge en el ámbito educativo el movimiento denominado “mobile learning”.

Al respecto en la página de la UNESCO dice: “El aprendizaje móvil se está convirtiendo en una de las soluciones a los problemas que confronta el sector educativo. Por eso el programa de actividades de la UNESCO se basa en un número cada vez mayor de iniciativas conjuntas encaminadas a estudiar de qué manera las tecnologías móviles pueden propiciar la consecución de la Educación para Todos (EPT)”.

Los teléfonos celulares permiten, dentro del aula:

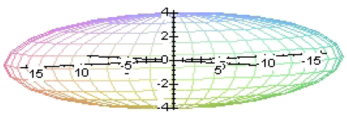
- Formar grupos de WhatsApp y a través de ellos, compartir inquietudes, dudas, contenidos, ejercitación, etc.
- El uso de Internet en clase, cuando no tienen disponible una PC para las aplicaciones que resulten convenientes.
- Ingresar a software “on line” para resolver problemas. Ejemplo de esto es el siguiente enlace para la resolución de integrales



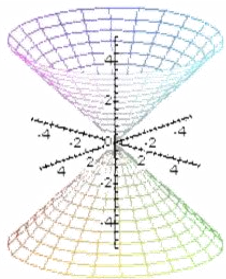
- Permiten utilizar códigos QR para llegar a contenidos o respuestas en cualquier situación de aprendizaje, potenciando en forma rápida y selectiva, todo el material disponible en Internet o creado por el docente.
- Utilizar Apps como INTEGRATOR.

Un ejemplo, ideado a partir de material disponible en Internet y utilizando el código QR.

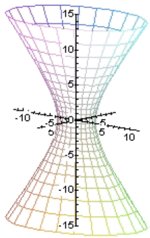
Dadas las siguientes gráficas:



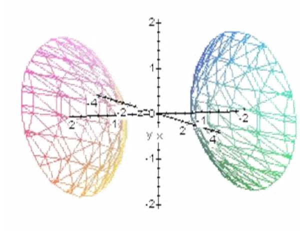
A



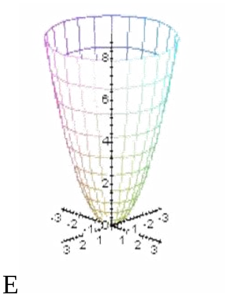
B



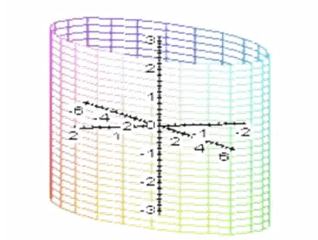
C



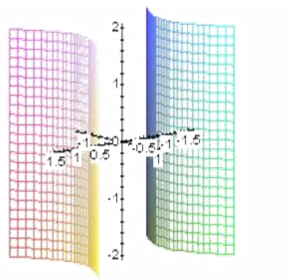
D



E



F



G

Asociar cada imagen con los siguientes nombres:
I) ***cilíndro elíptico***; II) ***paraboloide elíptico***; III) ***cono***; IV) ***elipsoide*** ; V) ***hiperboloide elíptico***; VI) ***cilindro hiperbólico;*** VII) ***hiperboloide hiperbólico***

<u>Respuesta</u>
A-IV; B-III; C-V ; D-VII ; E-II ; F-I ; G-VI ;E-II
<u>Observación</u>: En caso de dudas, puedes recurrir al siguiente material que la cátedra ha seleccionado para rever el tema:

Cuando el alumno utiliza su teléfono celular para “leer” el código QR, es remitido al enlace:
https://www.youtube.com/watch?v=iX3ofAjGGjo

La Tecnología en la Educación dentro y fuera del Aula

Las Plataformas Educativas

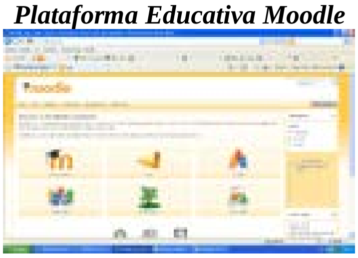
Las que mostraremos nos permiten el trabajo dentro del aula pero privilegian la comunicación y el trabajo individual y colaborativo fuera del aula.

"Una plataforma educativa virtual, es un entorno informático en el que nos encontramos con muchas herramientas agrupadas y optimizadas para fines docentes. Su función es permitir la creación y gestión de cursos completos para Internet sin que sean necesarios conocimientos profundos de programación". "Para ello, estos sistemas tecnológicos proporcionan a los usuarios espacios de trabajo compartidos destinados al intercambio de contenidos e información, incorporan herramientas de comunicación (chat, correos, foros de debate, videoconferencias, blogs, etc.) y, en muchos casos, cuentan con un gran repositorio de objetos digitales de aprendizaje desarrollados por terceros, así como herramientas propias para la generación de recursos". Sebastián Díaz Becerro. Plataformas Educativas, un entorno para profesores y alumnos. Temas para la educación. Revista digital para profesionales de la enseñanza. Mayo/09.

Campus Del Instituto Superior del Profesorado Dr. J V. González

Plataforma de la Facultad de Ciencia Económicas UBA

Plataforma Educativa Moodle



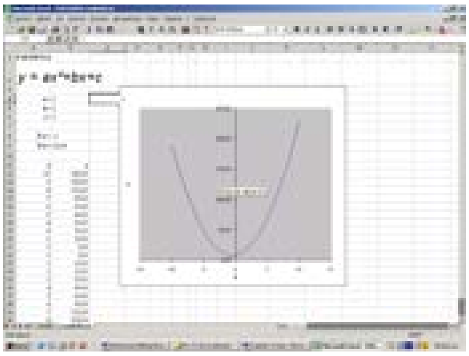
Por su fácil instalación y sus potencialidades se ha convertido en la más utilizada en la actualidad.
Se trata de un software "open source" por lo que puede ser modificada por los usuarios sin restricciones y le da mayor flexibilidad y capacidad de adaptación a distintas situaciones.

Fundamentalmente, las Pantallas Educativas se utilizan para que el docente pueda poner al alcance del alumno, contenidos de distintos formatos para completar y profundizar los conocimientos adquiridos o adquirir nuevos. También permite la actividad colaborativa a través de foros, salas de chat y mensajería. Los docentes pueden comunicarse masivamente con los alumnos o en forma individual o grupal. Esto genera la posibilidad de distintas actividades. Hay posibilidades de asignar calificaciones, asistencia, entre otras cosas.

Un ejemplo de su utilidad: Diseño de una actividad para el estudio de la gráfica de la función polinómica de 2° grado.

Diseñaremos una actividad para alumnos de la enseñanza media, su edad oscila entre los 15 y los 16 años. Están en plena adolescencia, desarrollando su pensamiento abstracto. Dejaron atrás el pensamiento concreto y comienzan a sacar conjeturas, plantearse hipótesis, extraer conclusiones y pueden proponer nuevos problemas. Obviamente lo antedicho depende del contexto sociocultural y las motivaciones que le ofrece el medio en el cual está inserto. Otra característica importante de estos jóvenes es ser netamente audiovisuales, la computadora, los video juegos, el Internet, las TIC en general están incorporadas en su vida, por lo tanto el

aprendizaje se torna más satisfactorio y atrayente cuando las nuevas tecnologías forman parte de él. Pensando en estas cuestiones se elaboró una actividad en la cual los alumnos tuvieran como objetivo conocer las características de la gráfica de una función polinómica de segundo grado, que puedan graficarla, conocer sus elementos y por lo tanto hallar las raíces de una ecuación de 2° grado.
Se mandará a los alumnos mediante el correo electrónico un archivo en Excel (que adjunto a este texto) cuya 1° imagen es la gráfica que observamos a continuación



En él encontrarán la expresión : $y = ax^2 + bx + c$. Se les explicará que dicha expresión corresponde a la gráfica de una función : $f : A \to B / y = ax^2 + bx + c$ donde A $\subset R$ ^ B $\subset R$.

Los alumnos previamente trataron el tema de función, su definición, su clasificación y estudiaron la función lineal. Por ese motivo se tratará el estudio de la función cuadrática cuya gráfica es una parábola.
Los alumnos variarán la gráfica ya existente para luego responder para cada modificación una serie de preguntas que los guiará en la elaboración de conjeturas y deducciones.
En una **1°etapa** trabajarán solos con la actividad enviada por el profesor, luego (suponiendo un grupo de 20 alumnos) se los dividirá en 5 grupos.
En esta **2° etapa** se abrirá un foro para cada grupo, en él se pedirá a los alumnos que comparen sus resultados y constaten si alguno se equivocó. El profesor será el moderador de cada grupo y tratará de llevarlos a los resultados correctos.
Luego comenzará una **3° etapa** donde cada grupo deberá formalizar los resultados obtenidos trabajando las preguntas que les planteó el profesor en los foros.
Para toda a esta tarea los alumnos dispondrán de 3 días al cabo de dicho tiempo se encontrarán en el aula con su profesor y cada grupo expondrá las conclusiones a las que llegó, compararán los resultados y las distintas estrategias que usaron para llegar a las respuestas requeridas.
Finalmente se hará un resumen de lo elaborado por los alumnos.
Las etapas 1°,2° y 3° los alumnos harán la actividad fuera del horario de clases.

Detalle de la actividad

a) Se enviará por correo electrónico un archivo Excel .En él se le solicitará que observe la gráfica realizada, se le explicará que corresponde a la gráfica de la función de 2° grado, dicha gráfica corresponde a una parábola cuando : a =2 , b =2 y c =9, también en la misma columna se encuentran las siglas : $x_v ; y_v$ con dicha expresión se notan las coordenadas del vértice de la parábola .
b) Se le pedirá al alumno que sustituya los valores dados por: a =1 , b =0 , c =0 y responda las siguientes preguntas :
*¿Tiene eje de simetría? Si lo tiene dé su ecuación.
*¿Existe algún punto que no tiene simétrico? ¿Cuál es?
*Observe el gráfico y relacione la respuesta anterior con los valores $x_v ; y_v$ que aparecen en la pantalla. ¿Puede extraer alguna conclusión?
*¿En qué puntos la parábola corta al eje “x”?
*¿Cuál es el signo del termino cuadrático? Su curva ¿es cóncava o convexa?

Conteste los preguntas anteriores para: a =1 , b = 5 , c =-50 .
Vuelva a repetir la actividad para los siguientes valores : a =-1 , b =-5 , c =0.

c) Exponga sus resultados en el foro que le corresponde a su grupo. Compare los mismos con sus compañeros y pregunte sus dudas al profesor.
d) El profesor actuará como moderador y conductor de los grupos. Colocará en el foro las siguientes consignas, para que se trabajen en cada grupo:
Luego de haber realizado las actividades anteriores hallen:
*Una fórmula para escribir la ecuación del eje de simetría.
*Una fórmula para hallar la abscisa del vértice, luego explique como obtendría la ordenada del vértice.
*Si a =0 ¿obtiene una parábola? Compruébelo y justifique la respuesta.
*¿Cuándo la parábola es cóncava?
*En las distintas actividades obtuvo los valores en que la parábola corta al eje "x",dichos valores recordemos que son las raíces del polinomio de 2° grado, en cada uno de los casos sume las raíces y luego multiplíquelas. ¿Puede encontrar alguna relación entre los resultados obtenidos y la ecuación de 2° grado con la que estuvo trabajando?
*Sabiendo que las raíces de un polinomio son los valores de "x" que anulan la expresión:
$ax^2 + bx + c = 0$ ¿puede encontrar una fórmula para encontrar dichos valores? (una ayuda: opere algebraicamente en el 1° miembro completando cuadrados con los dos primeros términos).
*Verifique la expresión obtenida en el ítem anterior con los resultados que había obtenido anteriormente.
*Usando la fórmula anterior ¿puede obtener "x_v"? ¿Coinciden los resultados con los ya obtenidos?
* Si le dan 3 puntos cualesquiera y le dicen que corresponden a una parábola ¿puede obtener su gráfica en forma inequívoca? Justifique la respuesta, si es No dé un contraejemplo, en caso contrario haga una deducción.
*Si le dan 3 puntos cualesquiera y le piden la ecuación de la parábola ¿la puede obtener?. ¿Cuántas soluciones obtiene? Justifique su respuesta.
e) Finalizada la tarea ,deben traerla a clase y entre todos elaboraremos un apunte sobre la tarea realizada.

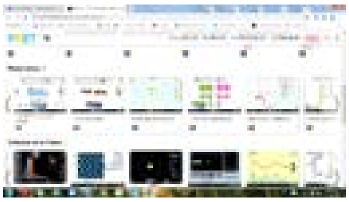
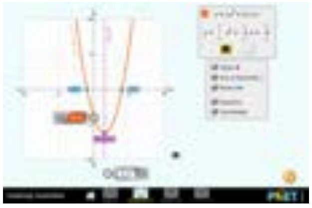
Además de consultar al profesor pueden constatar sus respuestas entrando a las siguientes páginas de Internet:
1- soko.com.ar/matem/matemática/Func_cuadrática.htm
2- members.fortunecity.com/ceugev/cuadrátic.html
3- www.fermatsi.org/AlgeESO2Ecua.SeguGrad.htm
4- www.sectormatemática.cl/contenidos/prorai2g.htm
5-www.juntadeandalucia.es/.../materiales/4eso/funciones/teoriafuncióncuadrática/teoriafunciones.htm

Las mencionadas son unas de las tantas páginas de Internet para visitar.
Haré un breve comentario sobre las páginas citadas:
1-Es una página con gráficos interactivos, define la función de 2° grado, halla la ecuación de la resolvente. Es bastante completa.
2-Da la definición en forma muy sencilla, no da los elementos ni tampoco la deducción para la obtención de las raíces, tiene algunos ejemplos.
3-Tiene gráficos interactivos, define la función y sus elementos, da la fórmula de la resolvente.
4-Da las propiedades de las raíces de la ecuación de 2° grado, las deduce y hay ejercicios para resolver.
5-Comienza con actividades , no define correctamente la función cuadrática. Hay ejemplos, ejercicios, y da los elementos para poder graficar la parábola.
Esta última dirección le puede servir al docente para que los alumnos comparen esta página con la número 1. Le indicará que hay un error o bien han omitido un concepto importante, que por favor lo encuentren y luego lo comentarán en clase.
La *evaluación* podría ser un ejercicio, que lo deberían resolver individualmente y entregárselo al profesor mediante un e-mail.
Un posible *ejercicio* para esta actividad: Hallar la parábola que pasa por los puntos : (0;8) , (2;-4) y (1;0), graficarla, indicar la ecuación del eje de simetría, los puntos en que intercepta al eje "x", las coordenadas del vértice y la concavidad.

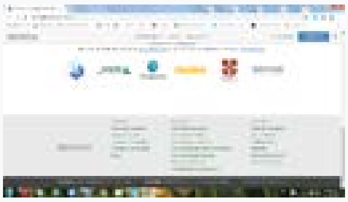
Los Simuladores

La actividad para el estudio de la gráfica de la función polinómica de 2° grado, también se podría haber realizado con simuladores.
Un **simulador** gratuito y muy accesible es:

Simulaciones Interactivas PhET: https://phet.colorado.edu/es/
Fundado en 2002 por el ganador del Premio Nobel Carl Wieman, el proyecto de simulaciones interactivas de PhET de la Universidad de Colorado en Boulder crea simulaciones interactivas gratuitas de matemáticas y ciencias. También tiene actividades.


Otro simulador gratuito es: **www.desmos.com**
Desmos ofrece las mejores calculadoras de su clase, actividades matemáticas digitales y un plan de estudios para ayudar a todos los estudiantes a amar las matemáticas y amar aprender matemáticas.



Otros software para tener en cuenta son las distintas versiones de: Geogebra, Wolfram Mathematica.

La Tecnología en la Educación fuera del Aula propiamente dicha

La tecnología ha permitido:

- que en tiempos de pandemia la educación no se interrumpa
- el acceso a la educación de personas que se encuentran imposibilitadas de asistir a clases o por diversas razones, prefiere no hacerlo en forma presencial

Es allí donde surgen distintas aplicaciones que permiten acercar los docentes a los alumnos de variadas formas, en una ***clase virtual.*** En esta instancia, se pueden realizar por ZOOM, GOOGLE MEET, por canales de You-Tube, como también por:

Live Stream (www.livestream.com)
Join Me (www.joinme.com)
Mikogo (www.mikogo.es)

Cada uno de ellos presenta ventajas y desventajas que habrá que evaluar al momento de tomar una decisión.

Sólo diremos que el contacto visual que permiten las aplicaciones antes mencionadas resulta de gran ayuda para los alumnos no presenciales o a distancia, para reforzar la motivación inicial por medio de la palabra cercana del docente, son excelentes recursos para un sistema educativo híbrido.

Conclusiones

Recordando las palabras de Bauman (2009):

"En semejante mundo, el aprendizaje está condenado a ser una búsqueda interminable de objetos siempre esquivos que, para colmo, tienen la desagradable y enloquecedora costumbre de evaporarse o perder su brillo en el momento en que se alcanzan".

En esa búsqueda inacabada, donde deben subsistir educadores y educandos, una posibilidad para que el docente pueda desarrollar su actividad con imaginación y creatividad es:

- Usar las distintas teorías de aprendizaje teniendo en cuenta las distintas estrategias que cree más conveniente en cada clase.

- Crear una comunidad entre colegas de disciplina e interdisciplinariamente para trabajar en forma colaborativa en: intercambio de ideas, trabajos, elaboración de software, material de cátedra, revistas educativas, herramientas tecnológicas, bibliografía, jornadas, simposios, experiencias áulicas, entre otras cosa. En rigor la denominada **"Ciudad Digital"**. La UNESCO define a la ***ciudadanía digital*** así:

"La ***ciudadanía digital*** es un conjunto de habilidades que permite a los ciudadanos acceder, recuperar comprender, evaluar y utilizar, crear y compartir información y medios en todos los formatos, utilizando varias herramientas, de manera crítica, ética y forma eficaz de participar y comprometerse en actividades personales, profesionales y sociales"

Es fundamental, en esta etapa, que las autoridades educativas y gubernamentales acompañen a los docentes en este camino necesario de recorrer.

Referencias Bibliográficas

-PRENSKY, Marc (2010). Teaching Digital Natives. Partening for real learning. Thousand Oaks: Corwin,
-PRENSKY, Marc (2011). Digital game- based learning Columbus: McGraw Hill
-LOHMAN, David F(1979). Spatial Ability: Individual Differences in Speed and Level.Redwood City: Stanford University
-EKSTROM, R., French, J., Harman, H. (1979). Cognitive factors, their identification and replication. Nashville: Society of Multivariate Experimental Psychology
-AMEDEO, D., GOLLEDGE, R.G. and STIMSON, R.J.(2008). Person-environment-behavior research: investigating activities and experiences in spaces and environments. New York: Guilford Press
-BAUMAN, Z. (2009). Los retos de la educación en la modernidad líquida. Barcelona: Gedisa S.A.
-BAUMAN, Z. (2009). Tiempos líquidos. Buenos Aires: Ensayos Tusquet
-BACHARACH, E (2014).En Cambio. Buenos Aires, Editorial Sudamericana
-CHEVALLARD, Y. (1998). La Transposición Didáctica. Del Saber Sabio Al Saber Enseñado. Argentina. AIQUE Grupo Editor.
- BORGHI M.C.; LOIACONO T. (2015) Uso de Tecnologías en Educación Superior. Antes y Ahora. XV Jornadas de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática Universitaria .UBA
-BORGHI,M.C.; LOIACONO,T.(2012) Las Nuevas tecnologías en la formación de formadores**.** Mathema. Edumat (2012) . Chivilcoy-Bs.As.
-LOIACONO, T. Experiencias en el campo de la enseñanza del Álgebra. Visualización con video-juegos I Workshop en Educación Matemática Mayo 2003.Asunción del Paraguay.
-LOIACONO, T. (2002)Visualización del Álgebra a través de los videos juegos .UADE
- BORGHI; FERRANDO; LOIACONO; THELLER. Jugando con la Economía Argentina. Del álgebra lineal a la programación económica. XVI Jornadas Nacionales de Docentes de Matemáticas de Fac. de C. Económicas y afines. Universidad Argentina John F. Kennedy. Octubre 2001.
- BUSTOS, H; RODRIGUEZ LARRIBAU,M, M.; ZINKES, M. C. Nuevos materiales didácticos en laformación docente. Buenos Aires,ISP Dr. JVG 2008. ISBN:978-987-1500-03-1

-PIAGET,J. (1986) Psicología y pedagogía. España. Planeta-Agostini

https://unlp.edu.ar/honoris_causa/gianni_vattimo_honoris_causa-2826 (07.04- 2021)
http://www.unesco.org/new/es/unesco/themes/icts/m4ed/ (05-09-2020)
http://www.oei.es/tic/UNESCOEstandaresDocentes.pdf (15-02- 2013)
http://www.archives.gov/education/ (10- 10- 2012)
http://noticias.universia.edu.ve/en-portada/noticia/2010/09/03/436258/tecnologia-puede-retrasar-aprendizaje.html (15-10- 2010)
http://www.uc.cl/comunicaciones/site/artic/20100607/pags/20100607215647.php
http://www.peremarques.net/siyedu.htm (17 -02- 2012)
http://moodle.org/ (10 -04-2015)
http://edu.glogster.com/ l (10 -04-2015)
http://www.smarttech.com/(20 -04- 2011)
http://reconstruyendoelpensamiento.blogspot.com.ar/2008/02/entrevista-gianni-vattimo- por-ivana.html
https://teoriasdeaprendizajesite.wordpress.com/conductivismo/(08-04-21
http://www.stevenberlinjohnson.com/ (25-08-05)

https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/50778/mod_resource/content/2/TEXTO%201-Kilpatrick,%20J.pdf 01-04-21

<u>Conferencia 05</u>

Emoción Creativa al servicio de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática

Fredy Enrique GONZÁLEZ

Universidade Federal de Rio Grande do Norte - GENPROF[4], Brasil
Universidad Pedagógica Experimental Libertador - NIEM[5], Venezuela

Las emociones, junto con las actitudes y las creencias, pertenecen al dominio afectivo de la Educación Matemática (MARTÍNEZ PADRÓN, 2005). La creatividad constituye una pulsión interiorizada que contribuye a la producción de artefactos (extensiones de la capacidad física del cuerpo humano) o mentefactos (asociados con el incremento de la capacidad cognitiva humana) utilitarios (destinados a la satisfacción de alguna necesidad real o sentida, en el ámbito de las necesidades materiales concretas) o no utilitarios (orientados a la satisfacción de la necesidad de goce estético, tal como acontece en el mundo de las artes). En el caso específico de la Creatividad en Matemática, (GONTIJO, 2006a) la define así:

> La capacidad de presentar innumerables posibilidades de solución adecuadas a una situación problemática, de manera que se enfoquen en diferentes aspectos del problema y/o diferentes formas de resolverlo, especialmente formas inusuales (originalidad), tanto en situaciones que requieran la resolución o elaboración de problemas como en situaciones que requieren la clasificación u organización de objetos y/o elementos matemáticos según sus propiedades y atributos, ya sea textual, numérica o gráficamente o en forma de secuencia de acciones (GONTIJO, 2006a, p. 4). (traducción libre)

Se puede inferir en la afirmación del autor según la cual creatividad implica “capacidad de presentar innumerables posibilidades de solución adecuadas a una situación problemática”, que la manifestación de esa “capacidad” sólo es posible en un contexto de libertad creativa. Sin embargo, no se percibe articulación explícita entre creatividad y emocionalidad. Sin embargo, esta conexión es reconocida por matemáticos notables como Jacques Hadamard quien, en su ya clásico trabajo intitulado “Psicología de la Invención en el campo matemático” (Hadamard, 1947), lo expresa del modo siguiente:

> Análogamente, al preguntar acerca de la influencia de las circunstancias meteorológicas o la existencia de períodos de exaltación o de depresión, se deja a un lado la pregunta más precisa referente a la influencia del estado físico del investigado <u>y en especial de las emociones</u> que puede sufrir. Esta cuestión es del mayor interés, sobre todo después de la observación de Paul Valéry en una conferencia en la Sociedad Francesa de Filosofía, en la cual sugiere que las emociones influyen de manera evidente sobre la producción poética. Ahora bien, aunque a primera vista pudiera parecer que ciertas clases de emociones pueden favorecer a la poesía debido a que ellas encuentran su expresión más o menos directamente en la poesía misma, no es cierto que esta causa sea la verdadera o, por lo menos, la única. En efecto, conozco por experiencia personal que las emociones íntimas pueden favorecer aspecto de creación mental completamente diferentes. (por ejemplo, el aspecto matemático). A este respecto estoy de acuerdo con la notable afirmación De Daunou: “<u>En las ciencias</u>, inclusive las más rígidas, <u>ninguna novedad ha nacido</u> de genios como un Arquímedes o un Newton, <u>sin la emoción poética</u> y alguna vibración de naturaleza inteligente” (Hadamard, 1947; Pp. 32-33).

Así, se aprecia, conforme a Hadamard, que en Matemática no es posible la producción de novedad alguna sin la presencia de la emocionalidad del autor. La importancia de las emociones en la creación científica también ha sido destacada por (Flores G., 2011) (Barrancos, 2020) quien afirma que “las emociones son el primer paso del proceso de creación científica” (Flores, 2011; P. 37) y, la autora agrega:

[4] Grupo de Estudos de Narrativas de Professores em Formação – GENPROF (Brasil)
[5] Núcleo de Investigación en Educación Matemática “Dr. Emilio Medina” – NIEM (Venezuela)

> […] en la ciencia, como proceso previo a la elaboración de hipótesis, hay abducción. En la abducción hay emociones. Por lo tanto, <u>en la creación científica hay emociones</u>. Dar prioridad a lo anterior, significa que hay una racionalidad emotiva que no es posible excluirla de la racionalidad científica (Flores, 2011; P. 40). (Subrayado nuestro).
> Esto significa que si ha habido un desarrollo del conocimiento científico es justamente porque ha existido la emotividad de los científicos, vertida en la abducción y la deliberación entre teorías. (Flores, 2011; P. 45).

Desde los planteamientos (Flores G., 2011) de Hadamard (1947) y Flores (2011) puede afirmarse rotundamente que no existe creación científica sin la emocionalidad del científico, tal como lo suscribe (Barrancos, 2020) quien en su conferencia sobre la inclusión de las mujeres en el sistema científico argentino, pronunciada en el Tercer Encuentro de Mujeres Universitarias y Científicas de Tucumán (23-06-2020), afirmó categóricamente: "Las emociones tienen un papel fundamental en la creación del conocimiento" (Barrancos, 2020, sn).

Todos los seres humanos somos potencialmente creativos puesto que la creatividad está íntimamente articulada con nuestra capacidad imaginativa. Ello es especialmente palpable en los niños. Quien haya seguido de cerca el desenvolvimiento físico, cognitivo y espiritual de sus hijos, podría aportar decenas de ejemplos para ilustrar esta afirmación.
Sin embargo, con el paso del tiempo, en la medida en que "vamos dejando de ser niños" parece que nos vamos haciendo menos imaginativos y, por ende, menos creativos. ¿Es eso algo natural? ¿Existe una relación inversa entre crecimiento y creatividad? En nuestro entendimiento, ¡No! La extinción de nuestra imaginación creativa no es algo natural, sino social.
En efecto, crear es una acción subversiva. Es insubordinarse contra lo establecido. Es un acto de atrevimiento. Es atreverse a pensar diferente, a ir contra la corriente. Es decidirse a quebrar las normas, las reglas y la rigidez del estatus quo. En cierta forma es irrumpir contra el poder en sus más variadas manifestaciones.
Por tanto, no es que dejamos de ser creativos en la medida en que crecemos. Nuestra imaginación y creatividad va siendo des-estructurada debido a que, gracias a la participación en diversos procesos de socialización, vamos siendo conminados a obedecer las reglas de los diversos juegos sociales en los que intervenimos.
Entre los espacios donde tal socialización acontece destacan dos: la familia propia y la escuela. En el hogar cuando un niño(a) usa una impoluta pared para trazar una larga y sinuosa raya, imaginándosela como un largo y caudaloso rio, un adulto sólo ve una mancha de suciedad. El niño(a) entonces es reprendido por haber "ensuciado" la pared. En la escuela, cuando ese mismo niño(a) encuentra una forma diferente a la esperada por el profesor para solventar una determinada situación problema, la misma le es invalidada, recibiendo como respuesta una expresión tal como la siguiente: "está mal; no fue así como te lo enseñé".
Esto último es un indicio de que la escuela no atiende a las necesidades intrapersonales tanto de los estudiantes como las de los demás actores del acto educativo. En este sentido, (Buitrago Bonilla, 2013) afirma que:

> Los sistemas educativos en el contexto local, nacional, regional y global se encuentran inmersos en una crisis […] (que) hace que no se dé respuesta efectiva a las necesidades intrapersonales e interpersonales de los individuos. Uno de los aspectos que ha incidido en esta crisis tiene que ver con la exclusión de las emociones en la escuela, debido a que esta ha centrado su atención en los resultados académicos, solapando tras de estos la importancia de la afectividad, el desarrollo social y la gestión emocional, pero, además, generando una separación entre emoción y cognición […] (Buitrago Bonilla, 2013; P. 1).

Así, puede inferirse que la falta de percepción, atención y gestión adecuada de las emociones de los estudiantes es uno de los factores críticos que inciden sobre su desempeño en el estudio de las disciplinas académicas escolares.
Así, la imaginación creativa de los discentes, poco a poco, va siendo desactivada. Y esto no ocurre sólo en los niveles educativos iniciales, también acontece en la educación superior. Así lo han corroborado estudios como el realizado por (Duarte Briceno, 1998) mediante el cual se encontró que los estudiantes universitarios al egresar de la universidad tienen un nivel de creatividad menor que el que manifestaron al ingresar.
Sin embargo, a pesar de todas las situaciones que limitan su expresión, la creatividad no desaparece en lo absoluto. Al contrario, permanece en un estado de latencia, aguardando sólo un momento oportuno para

emerger. Es decir, condiciones que hagan posible su reactivación. Ello puede ocurrir de variadas maneras. Una de ellas es cuando nos encontramos en una situación que pone en riesgo nuestra propia supervivencia. En momentos como ese afloran nuestros talentos que hasta entonces permanecían latentes en nosotros y “de repente” descubrimos que somos capaces de cocinar, cantar, y… resolver problemas.

La “re-activación” de la creatividad no ocurre de modo espontáneo. Es necesario estimularla. De hecho, se han desarrollado estrategias para el desenvolvimiento de la creatividad en diversas disciplinas y, particularmente, en Matemática (Gontijo, 2006b). Así, para este autor:

> La capacidad creativa en Matemática también debe caracterizarse por la abundancia o cantidad de ideas diferentes producidas sobre un mismo tema (fluidez), por la capacidad de alterar el pensamiento o concebir diferentes categorías de respuestas (flexibilidad), por presentar respuestas poco frecuentes o inusuales (originalidad) y por presentar una gran cantidad de detalles en una idea (elaboración). Así, para estimular el desarrollo de la creatividad, se debe crear un clima que permita a los estudiantes exhibir fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración en su trabajo (Gontijo, 2006b; p. 233). (Traducción Libre)

El desarrollo de las características (fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración) que distinguen al estudiante creativo, según (Gontijo, 2006b) se vería favorecido en un clima de libertad; en este sentido, (García Martínez, 2003) señala que:

> […] (al contrario de lo que habitualmente ocurre en la enseñanza de las ciencias naturales) en la enseñanza de las artes y de las ciencias sociales o humanas, […] a los alumnos (deben ofrecérseles) diferentes enfoques sobre un mismo asunto, desde muy temprana edad se les (debe) animar, con el respaldo de psicólogos y pedagogos, a criticar, debatir, evaluar, etc., […] todo ello con la finalidad de fomentar e impulsar el pensamiento divergente, innovador y creativo (García Martínez, 2003; P. 104).

La animación de la que habla García Martínez puede equipararse a un clima de libertad, estimulante de la creatividad.

Claro está, la creatividad no se da en el vacío. Al contrario, requiere dosis altas de información conocimiento y saber. Un ejemplo notable de imaginación creativa nos lo da el Maestro Darío Durán quien, cuando enfrentaba un problema desafiante de Geometría, luego de múltiples intentos fallidos, recurría a lo que él denominaba “Teorema de la Desesperación”, consistente en trazar un par de segmentos de recta (formando una X) sobre la figura utilizada para representar los datos del problema que se está intentando resolver. De esa forma, dicha figura adquiría otra configuración y daba lugar a otras relaciones que, en principio, no habían sido consideradas.

Entonces, dada su gigantesca sabiduría (estudiaba, invariablemente, diez horas diarias y procuraba resolver todos los problemas indicados en cada uno de los libros que estudiaba, sin saltarse ninguno, independientemente de su dificultad) comenzaba a vincular esas relaciones con el problema original que, siempre conseguía resolver.

Se puede inferir que el desenvolvimiento pleno de la imaginación creativa en ambientes escolares requiere de una inversión de tiempo que generalmente la escuela (que exige “aprendizajes rápidos”) no está dispuesta a conceder. Una consecuencia de esta característica del currículo convencional es que se privilegie la “enseñanza algorítmica” que permite el hallazgo de soluciones rápidas.

Por otro lado, a la par que la escuela (tradicional) arrincona la imaginación creativa de los estudiantes, también inhibe la emocionalidad. Ello ocurre cuando la actividad escolar se vuelve rutinaria y aburrida, sin ofrecer oportunidades para la emergencia de lo inesperado; con aulas donde debe reinar el silencio y el bullicio del *Eureka Arquimedeano* está proscripto.

Lo vertido hasta aquí permite formular dos primeras hipótesis de trabajo:

1. El trabajo creativo requiere, imprescindiblemente, de información y fundamentalmente, emoción.

Figura 1. La creatividad requiere información y emoción

2. Para que sea viable la Emoción Creativa Informada (ECI) se requiere de un contexto donde el sujeto (estudiante) pueda "volar con libertad usando las alas de su imaginación".

Figura 2. La libertad es una condición esencial de la creatividad

Mas, ¿Cómo lograr eso? ¿Qué se podría hacer? En relación con esto, una condición esencial es HUMANIZAR la enseñanza de la Matemática. Es decir, mostrarla como una CREACIÓN HUMANA COLECTIVA proceso éste en el cual, como en todo proceso social, existen AUTORES PROTAGONISTAS o, como diría (Toulmin, 2007), AUTORES (individuales o grupales) DE REFERENCIA, que son personajes socialmente reconocidos por los restantes miembros de la comunidad disciplinaria, como los más prolíficos, productivos, y cuyas ideas, conceptos, nociones, teorías influencias sobra las de los demás integrantes de dicha comunidad (Figura 3).

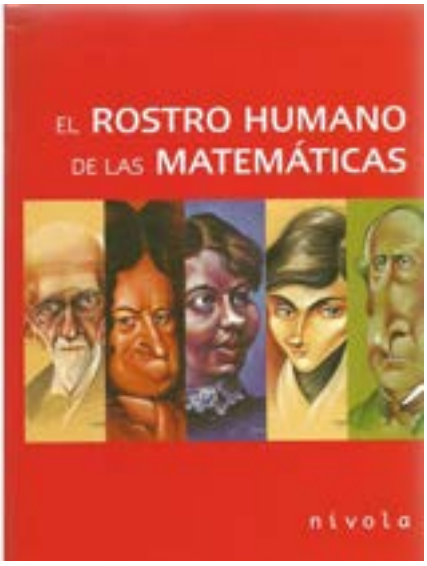


Figura 3. Mostrar el rostro humano de la Matemática ayuda a la emocionalidad

Por tal razón, es tan importante **recurrir a las biografías** tanto de los grandes y célebres mujeres y hombres que nos han legado sus creaciones individuales, como a la historia de las diversas comunidades anteriores y actuales que hacen uso y desenvuelven conocimientos y saberes matemáticos en sus prácticas socioculturales cotidianas. La idea es incorporar la HISTORIA DE VIDA de las Matemáticas en sus procesos de enseñanza y aprendizaje.
Se sostiene que la **lectura reflexiva y comentada de biografías** de los personajes que han desenvuelto los conceptos e teorías que han servido para construir el Edificio Matemático, puede generar oportunidades para la emergencia de emociones placenteras que, asociadas con la disciplina en estudio, propician una sensación de proximidad estimulante de la creatividad. Una fuente interesante de obras biográficas que podrían ser usadas para el fin indicado es la colección: (Jonasson, 2016), de la Editorial Nivola. Algunos de los títulos[6] son visualizados en la Figura 3; es muy interesante notar cómo los subtítulos aluden a hitos fundamentales en la historia de la Matemática asociados con el matemático sobre el cual versa la biografía.

[6] Los títulos incluidos en esta colección pueden ser visualizados en https://www.nivola.com/listado_libros.php?idcol=2&nombre=4%20-%20La%20matem%E1tica%20en%20sus%20personajes%20-%20Biograf%EDas%20de%20los%20grandes%20matem%E1ticos

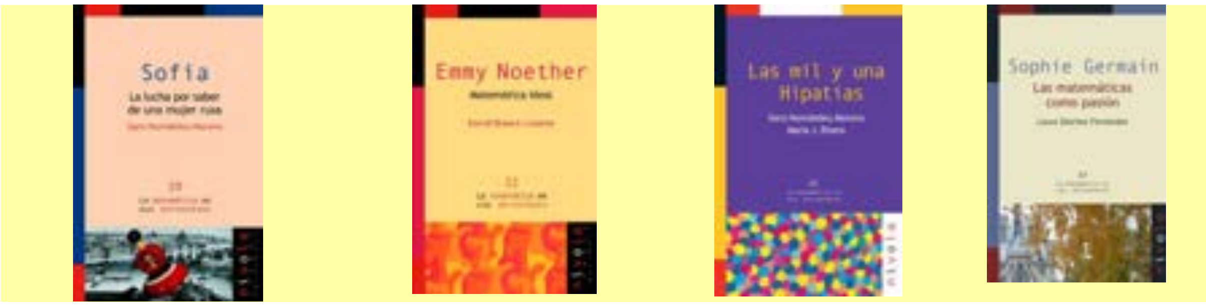


Figura 4. Tapas de algunos de los títulos incluidos en la colección *La Matemática en sus Personajes - Biografías de los Grandes Matemáticos* de Editorial Nivola

Otros textos relevantes son las novelas y otros romances en el formato de historia novelada, es decir, según (Garrido, 2018), quien expresa que:

> un ensayo divulgativo, mediante el cual los historiadores presentan los resultados de sus investigaciones al público -normalmente específico de la disciplina- y en muchos casos, éste tiene un claro componente narrativo más allá de la mera exposición científica, pero siempre basándose en datos históricos contrastados (Garrido, 2018; §5)

Algunos textos considerados como historias noveladas se muestran en la Figura 5.

Figura 5. Portada de Historias Noveladas alusivas a temas matemáticos

En *"La Analfabeta que era un genio de los números"* el autor sueco (Jonasson, 2016) nos cuenta la historia de *Nombeko* una niña nacida en el sur de África, que se destaca por su astucia y su facilidad para calcular. *"Borges y la Matemática"* es un ensayo de (Martínez, 2006) en el que son examinadas varias de las ideas matemática que se pueden encontrar en la literatura de Jorge Luis Borges tales como la teoría de conjuntos, recursión, la teoría de caos, y sucesión matemática infinita. En "*El Elegido de los Dioses*", (Infeld, 1978) nos narra una historia de la vida de Evariste Galois donde los personajes centrales (Galois y el pueblo de Francia) son narrados maravillosamente, componiendo una novela biográfica magistral.

Otras obras que bien utilizadas puede despertar apego hacia la Matemática son las que relatan historia de las grandes civilizaciones en cuyo seno se gestaron muchos de los conceptos matemáticos que estudiamos hoy día, tanto las próximas de nuestra región latinoamericana (azteca, incaica, maya) como lejanas (egipcia, griega, babilonia) (Ver Figura 6).

Figura 6. Portada de libro sobre la historia de civilizaciones en cuyo seno surgieron importantes nociones matemáticas

Mostrar la historia de las civilizaciones antecesoras a la nuestra permite evidenciar el carácter humano y articulado con prácticas socio culturales que la Matemática tiene. Además, hace posible atribuir significado a los sistemas simbólicos que hoy usamos al saber que son herencia de nuestros antepasados. En la Figura 6, se muestran imágenes que ilustras procedimientos de cálculo usado por los Incas e sistemas de numeración utilizado por los mayas.

Figura 7. Imágenes que ilustran los Quipus incaicos (Izquierda y Centro) y el sistema maya de numeración (Derecha)

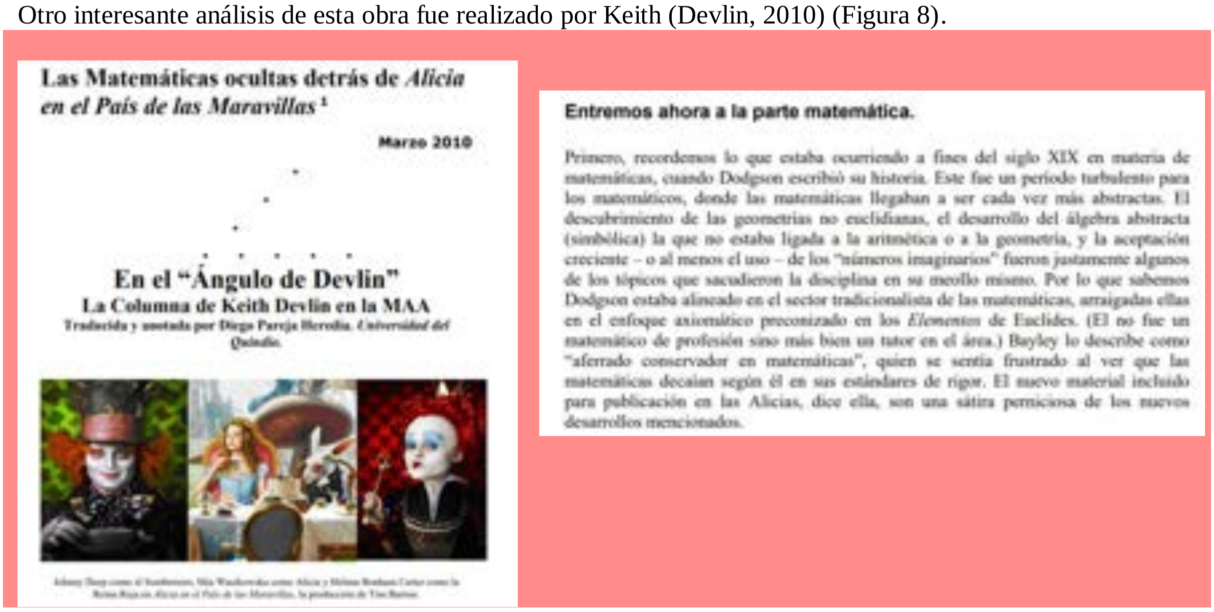
Otra opción es apelar a la literatura. Hay muchas obras literarias donde la Matemática es incluida en el contexto de tramas fantásticamente articuladas Algunos ejemplos son los siguientes: *Alicia en el País de las Maravillas*, escrita por el matemático, lógico, fotógrafo y escritor británico Charles Lutwidge Dodgson, bajo el seudónimo de Lewis Carroll, fue publicada por primera vez en 1865 (Figura 7).

Figura 7. Imagen (Izquierda) de la primera edición original de Alicia en el País de las Maravillas (Archivos de la Universidad de Oxford) y de una de las ilustraciones incluidas en esa primera edición (Derecha)

Esta obra se ha convertido en un clásico de la literatura y su contenido matemático ha sido objeto de interesantes análisis. De acuerdo con (Morales Medina, 2010).

> Alicia en el país de las maravillas no es solamente un cuento infantil. De hecho, una lectura profunda y razonada de la misma puede hacernos ver que es cualquier cosa menos un cuento dirigido a niños. La condición de matemático de Carroll ejerce una influencia tremenda en esta obra. Alicia en el país de las maravillas está lleno de guiños matemáticos, entre los que podemos encontrar referencias al álgebra, a la teoría de números, a la lógica, al análisis…En esta presentación podéis encontrar alusiones a las propiedades reflexiva y simétrica de una relación, máximos y mínimos de una función, propiedades de la circunferencia y sobre rectas y segmentos, lógica y razonamiento deductivo… […] Pero la cosa no queda aquí. Hay otros muchos detalles del libro que sugieren conceptos matemáticos (Morales Medina, 2010; §§ 3-4).

Haciendo un análisis de cada uno de los capítulos de este cuento, Morales Medina (2010) ha identificado referencias a los siguientes conceptos matemáticos: Concepto de límite (Cap. 1); Sistemas de Numeración (Cap. 2), Cambio de variables (Cap. 5), funciones inversas (Cap. 7),
Otro interesante análisis de esta obra fue realizado por Keith (Devlin, 2010) (Figura 8).



Las Matemáticas ocultas detrás de *Alicia en el País de las Maravillas* [1]

Marzo 2010

En el "Ángulo de Devlin"

La Columna de Keith Devlin en la MAA

Traducida y anotada por Diego Pareja Heredia. *Universidad del Quindío.*

Entremos ahora a la parte matemática.

Primero, recordemos lo que estaba ocurriendo a fines del siglo XIX en materia de matemáticas, cuando Dodgson escribió su historia. Este fue un periodo turbulento para los matemáticos, donde las matemáticas llegaban a ser cada vez más abstractas. El descubrimiento de las geometrías no euclidianas, el desarrollo del álgebra abstracta (simbólica) la que no estaba ligada a la aritmética o a la geometría, y la aceptación creciente – o al menos el uso – de los "números imaginarios" fueron justamente algunos de los tópicos que sacudieron la disciplina en su meollo mismo. Por lo que sabemos Dodgson estaba alineado en el sector tradicionalista de las matemáticas, arraigadas ellas en el enfoque axiomático preconizado en los *Elementos* de Euclides. (El no fue un matemático de profesión sino más bien un tutor en el área.) Bayley lo describe como "aferrado conservador en matemáticas", quien se sentía frustrado al ver que las matemáticas decaían según él en sus estándares de rigor. El nuevo material incluido para publicación en las Alicias, dice ella, son una sátira perniciosa de los nuevos desarrollos mencionados.

Figura 8. Ilustración de la versión en español de La Columna de Keith Devlin que publica en la Mathematics American Association - MAA.
Fuente: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Marzo2010AliceinWonderland.pdf

Otra de las obras esenciales que puede ser aprovechada para articular la Literatura con la Matemática y propiciar el desencadenamiento de emociones placenteras asociadas con esta disciplina es El Hombre que Calculaba, fue publicado por primera vez en 1938, cuyo autor Junior Cesar de Mello (considerado "El Pelé de los Números") lo firmó con el seudónimo de Malba Tahan (Figura 9).

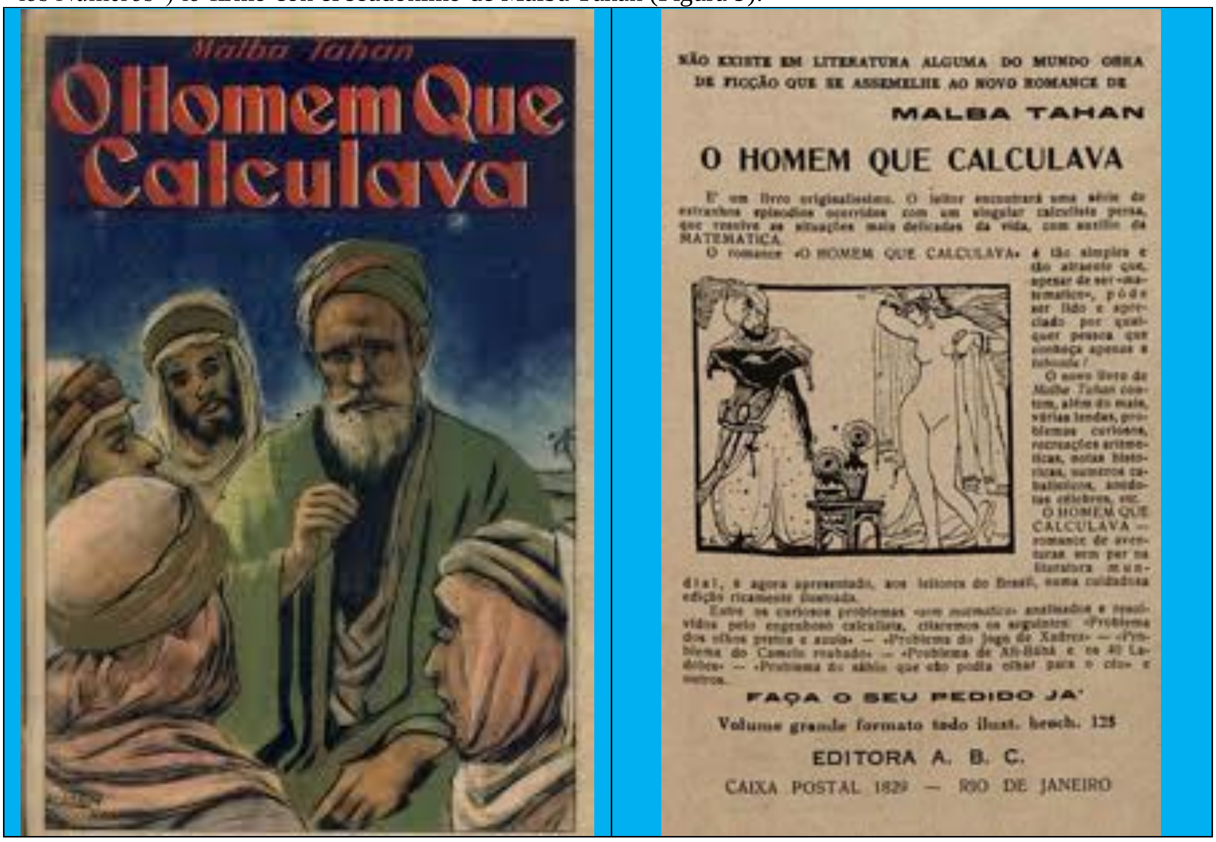


Figura 9. Imagen de la portada de una de múltiples ediciones de El Hombre que Calculaba

El aprovechamiento adecuado del contenido de este, así como de otros textos literarios, requiere identificar lo que (Ochoviet, 2015), denomina "Cruces entre matemática y textos literarios" y "encontrar matemática en un texto literario". Esta autora expresa:

> Encuentro matemática en un texto cuando su autor utiliza ideas, objetos matemáticos o vocabulario propio de la disciplina con el objetivo de formular metáforas, proponer imágenes, plantear problemas cotidianos resolubles matemáticamente o problemas de naturaleza propiamente matemática. También cuando el autor crea historias en mundos matemáticos con personajes (matemáticos o no) que deben deambular y sostener sus vidas en estos. Así mismo cuando lo matemático es el tema. Esta lista no agota los posibles cruces entre dos campos como la literatura y la matemática, pero me permite ejemplificar con algunos casos para orientar a aquellos lectores que todavía no han observado estos cruces (Ochoviet, 2015; P. 10).

La caracterización de Ochoviet (2015) sobre el significado encontrar matemática en un texto literario, cabe perfectamente al libro "El Hombre que Calculaba" que, simultáneamente es una novela y un libro de problemas de Matemática en un formato que, como el mismo autor alguna vez confesó, tiene una finalidad divulgativa, poniendo la matemática al alcance de un amplio público, presentándola no de forma abstracta o simbólica, sino insertándola en el contexto de prácticas socio culturales cotidianas.

Otra de las novelas por donde la Matemática ingresa en la literatura es *El Teorema del Loro* (Guedj, 2000) (Figura 10).

Figura 10. Portada de El Teorema del Loro (Editorial Anagrama)

En la reseña escrita por (Martínez Liarte, 2000) puede leerse que, a lo largo de la obra, el autor conduce al lector por los meandros de la:

> […] Historia de las Matemática, sin quedarse en la mera enumeración cronológica de hechos e hitos. Utilizando hábilmente a los personajes de la novela, establece relaciones, emite juicios, brinda opiniones, cuenta anécdotas, etc. Se crea, así, una corriente de familiaridad entre quien lee y las personas que hicieron posible el desarrollo y avance de las Matemáticas (a las que el autor expresa explícitamente su agradecimiento, enumerándolas, por orden de aparición en el texto, en una lista al final del libro). Bonito detalle de quien reconoce, como todos deberíamos reconocer, que nuestro conocimiento descansa en el esfuerzo y aportaciones de quienes nos precedieron (Martínez Liarte, 2000; P. 812)

Conforme a lo expresado en esta reseña puede apreciarse que la novela El Teorema del Loro constituye un material que, idóneamente utilizado, podría contribuir con el desenvolvimiento de emociones placenteras con la Matemática al generar "una corriente de familiaridad entre el lector y los creadores de esta disciplina.

Además de las novelas, biografías y textos históricos, para asociar emociones positivas y placenteras con la Matemática, también se destacan los cuentos; uno de ellos es *El Diablo de los Números* (Enzensberger, 1997), constituyendo una divertidamente singular forma de enseñar, donde *Teplotaxl* (El Diablo de los Números) le enseña matemáticas, a través de doce sueños, a un joven estudiante a quien no le gusta la Matemática.

Otro interesante libro es *Cuentos con Cuentas* (Figura 11) publicado por (De Guzmán, Miguel, 1984), quien mediante un juego de lenguaje accesible a la mayoría de las personas, especialmente las más jóvenes, les invita a recorrer el mundo de la Matemática por los senderos del juego y resaltando la belleza matemática.

Figura 11. Portada de la primera edición del libro Cuentos con Cuentas

En el ámbito de los cuentos utilizables para enseñar matemática a los niños más pequeños están las obras del poeta Orlando Planchart. Entre las obras de este autor se destacan *La Tortuga Fulana, Un Cuadrado que quiso ser Círculo, El Sueño Geométrico de Miguel con el Tangram y La Cinta de Moebius y la Hormiga Guita* (Figura 12); todos estos cuentos han sido creados para incentivar el pensamiento geométrico en niños de pre-escolar hasta los primeros grados de Elemental.

Figura 12. Portadas de algunos de los cuentos creados por Orlando Planchart

Otro recurso idóneo son las obras de arte, especialmente las pinturas que, al ser visualizadas adecuadamente, ofrecen oportunidades para la aparición de emociones positivas y adecuadas para el desarrollo de procesos cognitivos asociados con el fortalecimiento del pensamiento matemático (Figura 13).

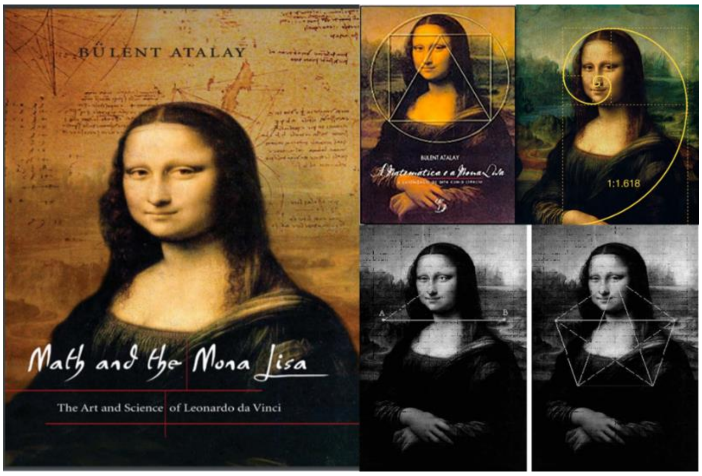


Figura 13. Imágenes de Mona Lisa (Da Vinci) donde se resaltan algunos aspectos matemáticos observables en esta creación artística

También es valioso aprovechar la arquitectura de la ciudad. En ese sentido puede ayudar muchísimo la fotografía. En la Figura 14 se pueden apreciar las posibilidades para enseñar nociones matemáticas de algunas edificaciones espectaculares ubicadas en diferentes países; por ejemplo: a) el edificio de la *Universidad Politécnica de Florida* (Lakeland, USA), especializada en las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas que fue diseñado por el arquitecto español, Santiago Calatrava; b) el *Taichung Metropolitan Opera House de Toyo Ito* (Japón); c) el *Aeropuerto Internacional de Pekín* (China); d) la *Floralis Genérica* (Buenos Aires, Argentina) (Figura 14).

Edificio Universidad Politécnica de Florida (Lakeland, USA),

Taichung Metropolitan Opera House de Toyo Ito (Japón)

Aeropuerto Internacional de Pek2oín (China)	Floralis Genérica (Buenos Aires, Argentina)

Figura 14. En la arquitectura moderna es apreciable el uso de nociones matemáticas

Las obras cinematográficas son un recurso valioso para estimular la emocionalidad en el estudio de la Matemática. Al respecto (Beltrán Pellicer & Asti, 2014) expresa que:

> proponen un marco teórico inicial para el diseño de secuencias de aula basadas en las situaciones didácticas que pueden generarse a partir de fragmentos de películas o series. Para ello, se sigue un proceso de ingeniería didáctica en el que se tienen en cuenta ciertas peculiaridades, como la referente a la transposición didáctica, ya que se hace necesario considerar cuál es el conocimiento en juego dentro del fragmento y cómo aparece (Beltrán y Asti, 2014; P. 123).

Dado que inicialmente, los films no han sido creado con finalidades didácticas específica, parece ser claro que la propuesta de Beltrán y Asti implica la realización de una transposición didáctica a partir de la identificación de los fragmento o escenas de la obra que serán utilizados en la enseñanza de los conceptos de la matemática escolar en los que se tenga interés.

Para identificar algunas películas que están basadas en cuestiones matemáticas puede accederse al siguiente site https://www.educaciontrespuntocero.com/recursos/30-peliculas-basadas-matematicas/ En la Figura 15 se muestran las imágenes usadas para promocionar algunos de esos films.

Figura 15. Imágenes usadas para promocionar algunos de films relacionados con Matemática

Otra de las artes que se puede utilizar en la enseñanza de la Matemática es la fotografía. La misma (especialmente la fotografía digital, en formato jpeg) se puede tratar tanto en sus aspectos técnicos como artísticos. Este segundo aspecto es probablemente el más emocionante. En este sentido, (Castellanos Aparicio, 2016) afirma que:

> […] la fotografía digital puede ser una herramienta pedagógica, que gracias a su aceptación, favorece la motivación y contribuye a generar hábitos y mejores actitudes frente a la resolución de un problema, mientras que la propuesta didáctica aporta a los estudiantes una estrategia metódica, al plantear y resolver problemas en una forma más estructurada, estimulando el desarrollo de la creatividad y facilitando la aprehensión de la cultura, logrando aprendizajes más significativos, donde el pensamiento espacial y el pensamiento métrico resultan ser los ejes temáticos que más se benefician […] (Castellanos Aparicio, 2016; P. vi)

De acuerdo con los resultados del estudio de Castellanos, la fotografía constituye una herramienta pedagógica cuyo uso incrementa los niveles de motivación de los estudiantes hacia la resolución de problemas matemáticos, así como también estimula el desarrollo de la creatividad.
Por su parte (Codina Pascual & Burgués Flamerich, 2017) afirman que:

> el uso de imágenes fotográficas en clase de matemáticas, contribuye a. potenciar la comprensión de las ideas matemáticas que contienen y su aplicación a contextos reales. Esta conexión adquiere una mayor relevancia (en un contexto curricular, según el cual) el aprendizaje matemático debe conllevar el uso autónomo de las matemáticas en situaciones de todo tipo en el entorno vivencial. La capacidad de ver matemáticas (es decir) de identificar conceptos y relaciones matemáticas en las fotografías se puede y se debe entrenar. Codina Pascual & Burgués Flamerich, 2017; P. 73)

Finalmente, Tirado, Guadrón y Ávila (2019), consideran que la fotografía es un recurso idóneo para acceder al saber matemático porque permite que:

> los estudiantes registren de su entorno situaciones que estén relacionadas con conceptos matemáticos, para que con base en sus pre-saberes interpreten, relacionen, establezcan propiedades y patrones, usen lenguaje formal, construyan representaciones y modelos, que luego pondrán a prueba en la solución de situaciones matemáticas aplicadas en otros contextos (Gualdrón Pinto, Tirado Carvajal, & Ávila Zárate, 2019, p. 106).

En la Figura 16 son mostradas fotografías que relacionan aspectos matemáticos en situaciones cotidianas.

Figura 16. Fotografías que ilustran elementos matemáticos en lo cotidiano

El planteo de estos autores es hacer un uso adecuado de los recursos tecnológicos disponibles prácticamente por todos los estudiantes, para que desarrollen una actitud de acercamiento a la Matemática, mediante el desarrollo de actividades contextualizadas en su entorno cercano.

Conviene acotar que, para acceder a la implementación de todas las estrategias aquí sugeridas, se deben considerar distintos aspectos, como la edad, el contexto, los factores sociales, entre otras condiciones de desenvolvimiento de la vida cotidiana de los estudiantes.

<u>Referencias Bibliográficas</u>

Barrancos, D. (23 de junio de 2020). Reflexiones sobre la plena inclusión de las mujeres en el sistema científico. (M. Vignolli, Entrevistador) San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://www.instagram.com/p/CByx9rUpu6T/

Beltrán Pellicer, P., & Asti, A. (2014). Utilización didáctica del cine en Matemáticas. *Enseñanza & Teaching, 32*(2), 123-145. doi:https://doi.org/10.14201/et2014321123145

Buitrago Bonilla, R. E. (2013). EMOCIONES, CREATIVIDAD Y EDUCACIÓN MUSICAL, TEJIDO ESENCIAL PARA LA. *Memorias del Congreso de Investigación y Pedagogía (III Nacional, II Internacional). 2*, pp. 1-19. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em http://rdigitales.uptc.edu.co/memorias/index.php/cong_inv_pedagogia/con_inv_pedag/paper/viewFile/6/6

Castellanos Aparicio, N. (2016). *PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA FOTOGRAFÍA PARA FORTALECER LA FORMULACIÓN, TRATAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS.* Bucaramanga: UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA, FACULTAD DE EDUCACIÓN, MAESTRIA EN EDUCACIÓN. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/1817/1/Propuesta_didactica_%20en%20la_fotografia.pdf

Codina Pascual, R., & Burgués Flamerich, C. (2017). – FOTO-EDUCACIÓN MATEMÁTICA: DEJEMOS QUE LAS FOTOGRAFÍAS ENTREN EN NUESTRAS. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM)* (p. 73). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em http://www.novauniversitas.edu.mx/transparencia/Articulo_70/Fraccion_XLI/Publicaci%C3%B3n%20ID-25.pdf

De Guzmán, Miguel. (1984). Barcelona: Labor.

Devlin, K. (1 de marzo de 2010). *Matemáticas y Filosofía en el Aula.* Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em Matemáticas y Filosofía en el Aula: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Marzo2010AliceinWonderland.pdf

Duarte Briceno, E. (1998). La creatividad como un valor dentro del proceso educativo. *Psicologia Escolar e Educacional*, 43-51. doi:https://doi.org/10.1590/S1413-85571998000100005

Enzensberger, H. M. (1997). *El diablo de los números: Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas* (8 ed.). Madrid: Siruela.
Flores G., M. d. (2011). Las Emociones en la Filosofía de la Ciencia. *ASTROLABIO, Revista Internacional de Filosofía*, 37-46. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://www.raco.cat/index.php/Astrolabio/article/download/248543/332670/
García Martínez, E. (2003). *LA TRADICIÓN EN F A HAYEK* . UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, Facultad de Filosofía; Departamento de Filosofía del derecho, Moral y Política. Madrid: UCM. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://eprints.ucm.es/id/eprint/5178/1/T26445.pdf
Garrido, S. (10 de noviembre de 2018). *CREAR*. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em Los Sueños de un Escritor: https://escritura838946896.wordpress.com/2018/11/10/novela-historica-o-historia-novelada-estan-tan-claras-sus-diferencias/
GONTIJO, C. H. (2006a). Resolução e Formulação de problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. *SIPEMAT* (p. 11). Recife: PPGEd, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco.
Gontijo, C. H. (2006b). ESTRATÉGIAS PARA O DESENVOLVIMENTO da criatividade em matematica. *LINHAS CRÍTICAS (en línea)*, 229-244. Acesso em 18 de qbril de 2021, disponível em https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=193517419005
Gualdrón-Pinto, É., Tirado-Carvajal, Beatriz, & Ávila-Zárate, Adriana. (2019). Estrategia didáctica para fortalecer la competencia de comunicación matemática por medio de la fotografía. *REvista Logos, Ciencia & TEcnología, 11*(2), 102-112. doi:https://doi.org/10.22335/rlct.v11i2.827
Guedj, D. (2000). *El Teorema del Loro. Novela para aprednder matemáticas.* Barcelona: Anagrama.
Hadamard, J. (1947). *Psicología de la Investigación en el Campo Matemático.* (L. A. Sors, Trad.) Madrid: Espasa-Calpe, S.A.
Infeld, L. (1978). *El Elegido de los Dioses: Historia de Evariste Galois.* (R. Bixio, Trad.) Ciudad de México: Siglo XXI Editores.
Jonasson, J. (2016). *La Analfabeta que era un genio de los números.* Barcelona: Salamandra.
Martínez Liarte, J. H. (2000). REseña: El Teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 23*(48), 812-814. Fonte: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2961174
MARTÍNEZ PADRÓN, O. J. (diciembre de 2005). DOMINIO AFECTIVO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. (F. E. González, Ed.) *Revista Paradigma, 26*(2), 07-34. doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2005.p07-34.id336
Martínez, G. (2006). *Borges y la Matemática.* Barcelona: Seix Barral.
Morales Medina, M. Á. (16 de abril de 2010). Gaussianos. *Alicia y el país de las matemáticas: una maravillosa relación*. Granada, Andalucía, España: Universidad de Granada.
Ochoviet, C. (1 de marzo de 2015). La lectura literaria en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario: vínculos entre campos, canon de lecturas posibles. (C. A. Ana Tosetti, Ed.) *UNIÓN*, 09-19. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/revista41.pdf
Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Península.
Barrancos, D. (23 de junio de 2020). Reflexiones sobre la plena inclusión de las mujeres en el sistema científico. (M. Vignolli, Entrevistador) San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://www.instagram.com/p/CByx9rUpu6T/
Beltrán Pellicer, P., & Asti, A. (2014). Utilización didáctica del cine en Matemáticas. *Enseñanza & Teaching, 32*(2), 123-145. doi:https://doi.org/10.14201/et2014321123145
Buitrago Bonilla, R. E. (2013). EMOCIONES, CREATIVIDAD Y EDUCACIÓN MUSICAL, TEJIDO ESENCIAL PARA LA. *Memorias del Congreso de Investigación y Pedagogía (III Nacional, II Internacional). 2*, pp. 1-19. Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em http://rdigitales.uptc.edu.co/memorias/index.php/cong_inv_pedagogia/con_inv_pedag/paper/viewFile/6/6

Castellanos Aparicio, N. (2016). *PROPUESTA DIDÁCTICA BASADA EN LA FOTOGRAFÍA PARA FORTALECER LA FORMULACIÓN, TRATAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS.* Bucaramanga: UNIVERSIDAD COOPERATIVA DE COLOMBIA, FACULTAD DE EDUCACIÓN, MAESTRIA EN EDUCACIÓN. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/1817/1/Propuesta_didactica_%20en%20la_fotografia.pdf

Codina Pascual, R., & Burgués Flamerich, C. (2017). – FOTO-EDUCACIÓN MATEMÁTICA: DEJEMOS QUE LAS FOTOGRAFÍAS ENTREN EN NUESTRAS. *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VIII CIBEM)* (p. 73). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em http://www.novauniversitas.edu.mx/transparencia/Articulo_70/Fraccion_XLI/Publicaci%C3%B3n%20ID-25.pdf

De Guzmán, Miguel. (1984). Barcelona: Labor.

Devlin, K. (1 de marzo de 2010). *Matemáticas y Filosofía en el Aula.* Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em Matemáticas y Filosofía en el Aula: http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Filosofia/Marzo2010AliceinWonderland.pdf

Duarte Briceno, E. (1998). La creatividad como un valor dentro del proceso educativo. *Psicologia Escolar e Educacional*, 43-51. doi:https://doi.org/10.1590/S1413-85571998000100005

Enzensberger, H. M. (1997). *El diablo de los números: Un libro para todos aquellos que temen a las Matemáticas* (8 ed.). Madrid: Siruela.

Flores G., M. d. (2011). Las Emociones en la Filosofía de la Ciencia. *ASTROLABIO, Revista Internacional de Filosofía*, 37-46. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://www.raco.cat/index.php/Astrolabio/article/download/248543/332670/

García Martínez, E. (2003). *LA TRADICIÓN EN F A HAYEK* . UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID, Facultad de Filosofía; Departamento de Filosofía del derecho, Moral y Política. Madrid: UCM. Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em https://eprints.ucm.es/id/eprint/5178/1/T26445.pdf

Garrido, S. (10 de noviembre de 2018). *CREAR.* Acesso em 18 de abril de 2021, disponível em Los Sueños de un Escritor: https://escritura838946896.wordpress.com/2018/11/10/novela-historica-o-historia-novelada-estan-tan-claras-sus-diferencias/

GONTIJO, C. H. (2006a). Resolução e Formulação de problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. *SIPEMAT* (p. 11). Recife: PPGEd, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco.

Gontijo, C. H. (2006b). ESTRATÉGIAS PARA O DESENVOLVIMENTO da criatividade em matematica. *LINHAS CRÍTICAS (en línea)*, 229-244. Acesso em 18 de qbril de 2021, disponível em https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=193517419005

Guedj, D. (2000). *El Teorema del Loro. Novela para aprednder matemáticas.* Barcelona: Anagrama.

Hadamard, J. (1947). *Psicología de la Investigación en el Campo Matemático.* (L. A. Sors, Trad.) Madrid: Espasa-Calpe, S.A.

Infeld, L. (1978). *El Elegido de los Dioses: Historia de Evariste Galois.* (R. Bixio, Trad.) Ciudad de México: Siglo XXI Editores.

Jonasson, J. (2016). *La Analfabeta que era un genio de los números.* Barcelona: Salamandra.

Martínez Liarte, J. H. (2000). REseña: El Teorema del Loro. Novela para aprender matemáticas. *Llull: Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas, 23*(48), 812-814. Fonte: https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2961174

MARTÍNEZ PADRÓN, O. J. (diciembre de 2005). DOMINIO AFECTIVO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. (F. E. González, Ed.) *Revista Paradigma*, *26*(2), 07-34. doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2005.p07-34.id336

Martínez, G. (2006). *Borges y la Matemática.* Barcelona: Seix Barral.

Morales Medina, M. Á. (16 de abril de 2010). Gaussianos. *Alicia y el país de las matemáticas: una maravillosa relación*. Granada, Andalucía, España: Universidad de Granada.

Ochoviet, C. (1 de marzo de 2015). La lectura literaria en la enseñanza de la matemática en el nivel secundario: vínculos entre campos, canon de lecturas posibles. (C. A. Ana Tosetti, Ed.) *UNIÓN*, 09-19. Acesso em 19 de abril de 2021, disponível em http://www.fisem.org/www/union/revistas/2015/41/revista41.pdf

Toulmin, S. (2007). *Los usos de la argumentación.* Barcelona: Península.

Conferencia 06

El dilema indagación – transmisión de conocimientos en la enseñanza de las matemáticas

Juan D. GODINO
Universidad de Granada, España

Resumen[1]

Plantearse la cuestión de cómo enseñar las matemáticas podría ser impertinente después del tiempo que se viene haciendo esta actividad y de la ingente cantidad de investigaciones pedagógicas y didácticas que se han realizado (English & Kirshner, 2015). A estas alturas debería haber ideas claras de cómo proceder cuando un profesor tiene que planificar y llevar a cabo la actividad de enseñar unos conocimientos matemáticos o científicos determinados. Sin embargo, sigue sin estar despejado el *dilema* entre transmitir conocimientos de una manera directa, o facilitar la indagación de los propios estudiantes para que ellos vayan descubriendo y construyendo el conocimiento (Zhang, 2016).

En esta conferencia después de plantear el problema de una manera más detallada y mencionar algunos antecedentes incluyo algunas ideas sobre la naturaleza y complejidad ontológica y semiótica del conocimiento matemático. De aquí se deriva que los modelos didácticos que pueden ser útiles para el aprendizaje de algunas disciplinas pudieran no ser apropiados para las matemáticas y las ciencias. Seguidamente describo las características de un modelo didáctico mixto, indagativo - transmisivo, basado en los presupuestos del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007; 2019) mediante el cual se trata de optimizar localmente los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El contenido que se desarrolla en esta conferencia está basado en trabajos previamente publicados (Burgos y Godino, 2019; Godino y Burgos, 2020; Godino, Rivas, Burgos y Wilhelmi, 2019).

Referencias

Burgos, M. y Godino, J. D. (2019). Trabajando juntos situaciones introductorias de razonamiento proporcional en primaria. Análisis de una experiencia de enseñanza centrada en el profesor, en el estudiante y en el contenido. *Bolema, 33* (63), 389-410.

English, L. D., y Kirshner, D. (Eds.). (2015). *Handbook of international research in mathematics education*. Routledge.

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39* (1), 37- 42.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). ¿Cómo enseñar las matemáticas y las ciencias experimentales? Resolviendo el dilema de la indagación y transmisión. *Revista Paradigma, Vol. XLI*, 80 – 106.

Godino, J. D., Rivas, H., Burgos, M. y Wilhelmi, M. D. (2019). Analysis of didactical trajectories in teaching and learning m: overcoming extreme objectivist and constructivist positions. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 14* (1), 147-161.

Zhang, L. (2016). Is inquiry-based science teaching worth the effort? Some thoughts worth considering. *Science Education, 25*, 897-915.

Conferencia 07

El tránsito del dictado de clases a la creación de espacios de aprendizaje: ¿cómo cambia ese desafío con estudiantes en casa y salas vacías?

El desafío: diseñar entornos ricos en desafíos matemáticos que faciliten interacciones entre aprendices, el medio, sus pares y los adultos que median el aprendizaje.

Fidel OTEIZA MORRA
foteiza@gmail.com

Introducción

Las competencias que deben desplegar docentes que tienen a sus alumnos a una pantalla de distancia son muy diferentes a las que desplegaban en una sala de clases. Sin la pizarra, sin abarcar su audiencia de una sola mirada; sin el control de un espacio en que se cierra la puerta, sin que su voz domine la situación, sin percibir ojos, cara ni expresiones, ¿Qué hacer? ¿Cuáles son las prácticas adecuadas de un docente efectivo en esta situación?

Este confinamiento ha activado una variedad de conversaciones virtuales entre y con colaboradores, ex colaboradores, docentes, directivos docentes, administradores educacionales, creadores de recursos educativos e investigadores, tanto nacionales como internacionales. Pronto, en esas conversaciones, se fueron decantando los temas prevalentes. Las preguntas comenzaron a coincidir. No son muchas y casi todas apuntan a lo mismo: ¿Cómo facilitar el aprendizaje de otros sin estar presentes? Y, luego, ¿cómo aprovechar los recursos que nos brinda el espacio digital? Estas preguntas son frecuentes en el diseño, desarrollo, puesta en práctica y validación de ambientes de aprendizaje diseñados. Todo esto marcado por las enormes diferencias en las posibilidades de acceso que tienen niños, niñas y jóvenes, según dónde viven y en qué condiciones viven.

En esta oportunidad me propongo explorar una experiencia en la creación y experimentación en y con espacios de aprendizaje con el fin de encontrar posibles respuestas a las preguntas que hoy enfrentamos la inmensa mayoría de los docentes.

En particular, explorar el potencial -para la situación de contingencia actual- del diseño de recursos para el autoaprendizaje y cursos a distancia.

Estas líneas terminan con el enunciado -un poco extemporáneo, pero que en su momento sentí válido- de los supuestos que orientaran mi trabajo como investigador y desarrollador del currículo matemático escolar.

Una Oportunidad

Lo que no han logrado las reformas que de tanto en tanto remecen a la escuela, la pandemia lo logró de un día al otro. La escuela, los docentes, los directivos docentes, los administradores educacionales, los ministerios de educación, las escuelas de educación, en fin, todo lo que conforma el campo de la educación está revuelto.

En este ambiente las prácticas asociadas al diseño de la enseñanza, la generación de recursos de aprendizaje y las diferentes formas de educación a distancia sincrónica y asincrónica, de ser practicas marginales, pasaron a ser las requeridas en la corriente principal del hacer educativo.

De otra parte, ya se superó el estupor inicial ¿Cuáles son los aprendizajes? ¿Cómo a variado la situación? Se percibe algo de calma, pero estamos lejos de llegar a todos los estudiantes, siquiera a una parte de lo que logró la escuela en condiciones de presencialidad. Las condiciones siguen increíblemente disimiles. La información acerca de los aprendizajes, de lo que es efectivo, es escasa y difícil de evaluar.

Una experiencia, algunas señales, muchas incógnitas

En estos momentos, dos investigadores dos directivas docentes y una decena de docentes de secundaria buscan responder a esta situación. La distancia física entre asesores y ejecutores es de 700 km. Los alumnos pertenecen a un liceo Técnico Profesional de la Novena Región del país, la Región de la Araucanía. La institución está en una comuna aledaña a una ciudad capital de región y los estudiantes repartidos en entre ese municipio, pequeños pueblos y sectores rurales.

Un antecedente importante es que con este grupo de docentes tenemos una larga historia de trabajo conjunto. Fueron ellos, los directivos docentes y el director del establecimiento, que en 2002 eligieron al Centro Comenius de la Universidad de Santiago, como sus asesores. A partir del año 2003 fueron parte de proyectos de investigación y desarrollo en el área de la educación matemática.

La conectividad en la región en que viven los estudiantes de la institución escolar mencionada, es muy variada y tanto la institución, como administradores del gobierno local como los padres, trabajan por mejorarla. Algunos docentes aventuran un 50%, también hay quién pone en duda esa cifra. Se puede afirmar que luego de la experiencia del año pasado todos los actores realizan un renovado esfuerzo para sumar estudiantes a la comunidad escolar que se conecta. Parte importante de los estudiantes conectados, lo hace por vía telefónica. Parte de esos teléfonos son de "prepago" y las condiciones de hogar, hace que no siempre estén cargados. De más está decir que todo dispositivo experimenta el obvio "tironeo" por parte de los diferentes miembros de la familia.
¿Cuáles serían, de acuerdo con la experiencia, las características de una intervención diseñada para acompañar el trabajo de un equipo de docentes de matemática en el nivel secundario en las condiciones actuales? ¿Cómo podría, la experiencia en cursos a distancia utilizarse en ese acompañamiento? El acceso a dispositivos digitales y a Internet es amplio y en expansión, pero no universal. La brecha entre los que tienen y los que no tienen vuelve a manifestarse en forma odiosa. ¿Cómo maximizar el acceso al conocimiento matemático en esas condiciones? ¿Qué tecnologías digitales utilizar? Los docentes difieren mucho en sus competencias en materia de tecnologías digitales. También en su actitud hacia estos recursos. Y, como ya mencionado con anterioridad, es muy diferente ser docente de aula en un aula que serlo frente a una pantalla y de forma remota.

Un "puente" un nexo entre desarrolladores y docentes

Estamos usando una plataforma "Moodle" como el elemento de conexión entre los docentes que atienden cursos de educación media y los desarrolladores de la plataforma. A su vez Moodle es la tecnología que integra otras tecnologías. En estos momentos el número y calidad de tecnologías específicas que se pueden administrar desde la referida plataforma es significativo y la experiencia nos está abriendo nuevas posibilidades. GeoGebra, H5P, Wiris, Excel, vídeos y naturalmente las propias de los ambientes habituales para procesar texto, imagen, presentaciones y sondo.
De común acuerdo se seleccionó el "Primero Medio", el grado 9° del sistema curricular nacional. Nivel en el que los estudiantes ingresan a la educación media, el cuarto final de la escuela de 12 años.
Los docentes, organizados como un Departamento de Matemática proveen los requerimientos. Generalmente como directivas enviadas desde el Ministerio de Educación en "guías" para los estudiantes. Estos son documentos en PDF que orientan las acciones del estudiante entregando información y formulando preguntas. Entre nosotros las llamamos "planas" en el sentido que no hacen uso del potencial de espacios virtuales. Estas son entregadas a los alumnos usando las diversas opciones que permiten las tecnologías de las comunicaciones. De este modo se orienta el estudio en períodos de una a dos semanas. Los docentes organizan clases sincrónicas buscando tener dos contactos con sus alumnos. De acuerdo con lo indicado con anterioridad los alumnos acceden a las iniciativas de los docentes, especialmente a las clases sincrónicas, de acuerdo con sus posibilidades. En situaciones en que hemos sido invitados tuvimos evidencia de que aproximadamente un tercio de los alumnos tomaba contacto con video-conferencias. Hemos sido todos testigos de este tipo de situaciones y de que el ausentismo se agudiza en sectores de pobreza, marginalidad y ruralidad. En este caso se presentan esas condiciones. También tenemos evidencia de sectores en las conexiones son débiles o inexistentes.

De guías planas a guías activas

En estos momentos se está organizando un proceso que, en los tiempos que se dan entre la llegada del material y su entrega a los estudiantes, se busca "enriquecer" esos recursos e incorporarlo a una plataforma en la que pasa a ser el eje conductor de un sistema que acompaña a los estudiantes en su aprendizaje.
Esta es la parte central del mensaje que me mueve en este momento. La tecnología digital está en un punto en que permite, simultáneamente, comunicaciones que tienden a hacerse universales y cada vez más accesibles para una inmensa mayoría e interacciones entre ser humano y sistemas flexibles, variadas y también en un crecimiento y difusión muy, muy importante.
¿Puede imaginar lo que puede hacerse como "Guía de aprendizaje" mediante las tecnologías digitales disponibles?
De partida tiene carácter multimedial, imágenes, texto, sonido, movimiento, superposición y las variaciones de esos elementos al actuar en forma conjunta.
Videos, imágenes 3D, simulaciones y otros dispositivos que facilitan y motivan la interacción. Los videos son, habitualmente, unidireccionales, pues la tecnología permite intervenirlos para provocar interacciones, preguntas, retrocesos, avances y otros hitos que permitan la acción del que aprende.

Un dispositivo que ha resultado interesante es la unión entre un objeto digital dinámico creado en GeoGebra y un breve contexto, seguido de preguntas que reciben retroalimentación inmediata. Nos proponemos sistematizar el conocimiento en estos objetos.
Las guías son trabajadas por el equipo asesor con participación de los docentes. Al resultado se lo llama "Guías interactivas", por ser la interacción el aspecto que consideramos más relevante. Preguntas, respuestas y retroalimentación inmediata. Se ha ampliado en forma notable el tipo de preguntas y la forma de retroalimentar la actuación de quien aprende.
La generación de reportes potencia la componente de evaluación permitiendo utilizar la información generada por las interacciones en todos los niveles en que haya sido programada. Desde el feedback a una pregunta a la evaluación de una unidad o un curso completo. Pasando por reportes acerca de las variables relevantes, como tiempo, persistencia, avance, aspectos críticos y, naturalmente, resultados del aprendizaje.
Este no es un informe técnico acerca de la tecnología, sólo menciono algunos aspectos que contribuyen al argumento central, el diseño de espacios de aprendizaje.

De guías interactivas al inicio de un sistema

Un formato básico es el siguiente: un docente inscribe a sus alumnos en el sistema y se puede usar como un repositorio de recursos, sus alumnos pueden acceder a actividades, documentos, guías de aprendizaje, objetos digitales y avanzar en secuencias de aprendizaje previamente diseñadas. El o la docente actúa, primero, como docente en aula que presenta, motiva y asigna trayectorias de aprendizaje, luego, actúa como "tutor" de sus alumnos que siguen las secuencias propuestas, desde algún dispositivo digital. Puede que los estudiantes accedan desde un computador en la sala de clases, o en el laboratorio del establecimiento o desde su casa o desde su teléfono. ¿Es éste el germen de un espacio donde puedan vivir una forma de pensar y de actuar en matemática escolar? Vale la pena.

El medio es el mensaje

Nos encontramos en un punto semejante al que vivimos en los años sesenta – setenta en que buscábamos las características adecuadas del material impreso y las condiciones para su uso efectivo. La época del "diseño de la instrucción" y la "tecnología educativa". Ahora las preguntas se refieren a configuración de pantallas, a la navegación en el sentido se los sitios web, a la interacción niño, niña o joven y los sistemas digitales. ¿Cómo tratar la pantalla de un computador personal a diferencia de una tablet o la de un smartphone? A lo que se agrega la infinidad de preguntas de un ambiente multimedia, en que intervienen sonido, imagen y acción. Estas últimas condiciones correspondieron a la explosión de los medios en los años ochenta.
Es una vuelta al diseño, el trabajo con pequeños grupos, la experimentación, la observación. En este ambiente lo evaluado es nuestro mensaje. Los aprendices, somos los creadores de medios. Del mismo modo son los creadores los que están en la mira de la de evaluación y son los que están, estamos, aprendiendo.
Este regresar a lo básico trajo, a tiempo presente las intuiciones que sostuvieron el proceso de desarrollo y validación del currículo en los proyectos que tuve oportunidad de conducir durante años. Concluyo estas páginas con una breve expresión de dos de las que considero fueron determinantes. Una, la intuición inicial de la ubicación epistemológica del conocimiento matemático escolar y la segunda, una mirada particular del rol de la materialidad, de los recursos, de la expresión del conocimiento matemático "fuera de la cabeza del que la enseña": los medios diseñados para apoyar el aprendizaje. Puede que al lector le sorprenda este doble salto, lo incluyo porque es lo que está bullendo en mi mente al responder a los desafías de esta escuela repartida por los hogares del mundo. Estoy en el proceso de pensarlo todo de nuevo.

Un salto en el tiempo, las intuiciones de base

La primera intuición, la que orientó mi experiencia como docente de aula. Los primeros pasos, desde segundo año en la facultad de educación. Una concepción de la matemática para adolescentes, una epistemología al decir de Bateson, con contexto, sobre la base de metáforas, con sentido, con historia, con consecuencias y un nivel de abstracción tan alto como el que aceptase mi audiencia. La demostración y el lenguaje matemático también tan presentes como fuese aceptable para los jóvenes con que me inicié como docente. Usando como modelo a Euclides, un énfasis en la geometría basada en la deducción y la construcción. El laboratorio de Física como un espacio en el que experimentar y buscar regularidades que luego fueron la base o el desafío para los modelos matemáticos. La cultura y la historia del conocimiento como trasfondo. De allí, matemática como un logro de la humanidad en la búsqueda de su propio lugar en la naturaleza y el universo. Mucha referencia a la astronomía y a las preguntas de la astrofísica. Buscando la conexión con lo aprendido y por aprender, regresando a la clase elemental y mirando esas prácticas con los ojos de un adolescente. ¿Cómo aprendimos la división, las fracciones, los números o lo que fuese pertinente a lo estudiado en tiempo presente? Y, ¿cómo vemos hoy? "Regresemos a cuarto grado y reproduzcamos la experiencia". Eran las "ventanas en el tiempo, hacia el pasado". En oportunidades acompañando a uno o unos pocos voluntarios y en otras, representando entre todos, situaciones hipotéticas. "Odio las tablas y no las aprendí" lo mismo con fracciones o la división. Fueron verdaderas situaciones terapéuticas guiadas por un terapeuta improvisado. Lo haría de nuevo. Entre serio y broma, con bastantes risas, se generó un ambiente para tratar el tema en "tiempo presente". En sesiones posteriores, una vez tratado lo que era necesario tratar, una mirada hacia adelante. ¿Cómo podría, alguno encontrar este conocimiento en el futuro? Las "ventanas en el tiempo futuro". ¿Alguien interesado en medicina, negocios, ingeniería, arte, ciencias sociales, entre otras preferencias? Una mirada al concepto de razón y proporcionalidad en tiempo de diferenciación y derivadas; números decimales como series infinitas de potencias de diez, incluyendo la noción de límite: la sorpresa que esconden los decimales periódicos, por ejemplo $0,\overline{9}$. Aprovechando la Física, el trabajo mecánico como producto, luego requiriendo ángulos, diferenciales y sumas de torrejas que disminuyen su grosor mientras aumenta su número indefinidamente, un vislumbre al modelo de Riemann. Ya que menciono Física, las leyes de Newton de la mecánica clásica y la necesidad de corrección debido a la velocidad en el modelo relativista incluso relatos de la búsqueda en mecánica cuántica.

Al menos cinco generaciones de estudiantes de noveno grado, se iniciaron en álgebra buscando regularidades en juegos con rotaciones, composición de vectores en el plano (los cuadritos de su cuaderno de matemática), permutaciones para tener un caso no conmutativo. Hasta que alguno, en cada generación de ese nivel, dijo "pero esto se resuelve siempre igual", con un poco de maña, habíamos capturado, en la sala de clases, la axiomática de un grupo. "Qué rotación después de tal rotación nos lleva a tal rotación" En el laboratorio resolvían sus primeras ecuaciones con diversos elementos, antes, de resolverlas con las mismas reglas, en los sistemas numéricos. En los cuatro niveles siguientes, irían "construyendo" los racionales, reales y los números complejos.

Sin asustarse -como sucedió con los examinadores de mis cursos en una oportunidad- estas "ventanas" como las llamaba, quedaban al margen, hasta físicamente en los bordes de la pizarra. No había que memorizar nada, sólo hacer el esfuerzo, en forma conjunta, de imaginar cómo se podría ver ese conocimiento cuando estuviesen en la universidad o en una actividad laboral o de vida en el futuro. Fue una locura, pero fue un ambiente amable de aprendizaje y los aprendices pasaron las pruebas que sus examinadores les pusieron. No hubo heridos. Mi mayor fracaso fue con las matrices, no logré el enfoque adecuado, ¡tres o cuatro semanas perdidas!

Hay mucho más, confieso que nunca hice este relato en ambientes profesionales. Fue arriesgado, lo sé, pero los resultados fueron gratificantes y positivos. Grupos de estudiantes de esa época, jubilados hoy, me han invitado en varias oportunidades, siempre en la positiva. Los que se lo propusieron ingresaron a la universidad en la carrera deseada y, tuvieron éxito. "Profe, éramos los únicos que sabíamos lo que era una derivada" y lo que no sabían es que, en alguna prueba del último curso de la educación secundaria, respondiendo una pregunta opcional "El que se atreva", habían encontrado las primitivas de una función en varias oportunidades; varios, sumando 4 u otro número, "porque se pierde". Un alumno, sólo uno, dijo el famoso "más cualquier constante". La oportunidad que intenté entrar desde las integrales definidas haciendo uso de los números decimales y su desarrollo en series, fracasé y debí regresar a la derivada a partir de la rapidez instantánea, Física nuevamente.

Lo que sucedió más tarde con lo que se llamó "Matemáticas Modernas" me decepcionó. El potencial de la matemática del siglo es enorme y las capacidades de los jóvenes muy grandes, la profesión asustada se replegó: "back to basic" y adiós aprendizaje significativo. Aún hoy pagamos el error del temor a lo nuevo y -me consta- natural para los jóvenes del siglo XX, ¿lo será en el presente?

Esa fue la primera intuición, una matemática sin barreras, sin las limitaciones de un currículo, más bien de un nivel negociado con los intereses y capacidades de los estudiantes, menos de lo que se pretendo hoy con más conexiones, visitando lo aprendido en la escuela elemental, anticipando algo de lo que podrían encontrar los que continuasen sus estudios en el tercer nivel. Sin miedo al formalismo y con el contexto como trampolín a la comprensión. Con un énfasis permanente en el sentido: ¿Qué estoy aprendiendo?, ¿Pará qué puede ser importante aprenderlo? En clima de confianza y aceptación mutua provisto por una escuela más bien pequeña, gratuita e innovadora.

Ahora la segunda intuición. "Si el conocimiento matemático está sólo en la cabeza del que enseña, los aprendices nunca aprenderán a encontrarlo por sí mismos" a lo que se sumó Paulo Freire: "Nadie le enseña nada a nadie, todos aprendemos en interacción con el mundo".

¿Qué hacer si nos apartamos de contar el cuento de la matemática y queremos que sean los estudiantes los que conjeturen, argumenten y luego aprendan con un buen nivel de abstracción? Un profesor en Penn State, la Universidad del Estado de Pensilvania me puso en contacto con la noción de "desarrollo del currículo". Mediante una exploración a proyectos de investigación y desarrollo, nos hizo conocer ocho aproximaciones diferentes al currículo de matemática escolar. ¿Conocen los trabajos realizados por el matemático húngaro Zoltan Dienes? Principalmente los que condujo en la ¿Universidad de Sherbrook, en Canadá? Esa experiencia sería más adelante el eje de mi trabajo como investigador: diseñar espacios para dar la matemática que deseamos enseñar. Espacios en los que los estudiantes, en su "interacción con el mundo" se encuentren con la matemática. El material de enseñanza es un vehículo natural para conectar la investigación con la sala de clases. Ese fue el tema, en 2002, en mi primer contacto con la universidad que hoy nos convoca, la Universidad Nacional de Luján, en el Centro Regional Chivilcoy[7].

La puesta en práctica de esta intuición introduce nuevas y diferentes competencias en el repertorio de un educador matemático. El título de esta intervención refiere a "crear espacios de aprendizaje"; y luego busca ser algo más explícito al decir: diseñar entornos ricos en desafíos matemáticos que faciliten las interacciones deseadas entre aprendices, el medio, sus pares y los adultos que median el aprendizaje. Diseñar, es una competencia muy diferente a la de hacer clases. Apunta a una formación inicial de docentes muy diferente a la que prepara a un profesional que enseña usando toda su presencia y sus capacidades de comunicación. Diseño, desarrollo, experimentación, evaluación empírica, optimización es un vocabulario que difiere del habitual en las escuelas de educación.

Entre las varias consecuencias de seguir esta intuición puedo señalar el interés por los recursos de aprendizaje, en los juegos como espacio de aprendizaje, el interés en los recursos digitales, los procesadores matemáticos, el diseño de la instrucción de los años 60 y, naturalmente, una de las aplicaciones más significativa de estas tecnologías y enfoques, la educación a distancia.

El enfoque de investigación natural en este enfoque es el ciclo antes esbozado: teoría que fundamenta principios de diseño, diagnóstico, diseño, desarrollo, puesta en práctica, observación / medición, revisión a la luz de resultados, rediseño y nuevo ciclo. El clásico enfoque experimental con aproximaciones sucesivas. Un enfoque algo costoso y poco habitual en el ambiente que me correspondió actuar en investigación educacional. La creación de recursos de aprendizaje técnicamente generados y validados resultó difícil de financiar. Durante quince años mi país se jugó por elevar el nivel de la educación. Ese período nos permitió diseñar y pone en práctica un modelo para facilitar el aprendizaje a partir de preguntas y exploración por parte de los estudiantes. En los últimos diez años, los intereses variaron y el espacio para este enfoque se cerró en demasía.

¿Algún avance, ¿Algunos resultados?

Estamos comenzando. El tren está corriendo. Ahora más que nunca es difícil evaluar lo hecho y casi imposible mantenerse al día. Comparto el proceso, comparto las preguntas y la sorpresa.

El cierre de la sala de clases y la necesidad imperiosa de llegar con el conocimiento al hogar o dónde residen los aprendices, nos encontró, a todos, a todas, en una sequía de recursos y con personal, docentes, directivos docentes, técnico y administradores y responsables de los sistemas educativos e investigadores con capacidades limitadas para crear experiencias de aprendizaje en forma remota.

Estas limitaciones son un llamado a la acción.

[7] IV Simposio de Educación Matemática, Chivilcoy, Argentina, 7-10/05/2002.

Conferencia 08

Integración del Aprendizaje Matemático y la Programación

Chronis KYNIGOS
kynigos@ppp.uoa.gr
National and Kapodistrian University of Athens, Greece

Marcelo MILRAD
marcelo.milrad@lnu.se
Linnaeus University, Sweden

Abstract

In this paper, we look closely at one example of an interdisciplinary approach regarding mathematics and programming. How can a mathematics teacher integrate a programming activity in their attempt to engage students in mathematical meaning making? To address this issue, we review interdisciplinary approaches to learning mathematics and programming while trying to develop a more articulate language to think about the challenge of integrating them. Accordingly, we decompose the problem on how to think of the joint learning of these two domains in order to serve mathematical thinking. Our proposed approach can be employed by teachers to design and think of activities integrating the two subjects in unit-disciplinary or interdisciplinary settings.

1. Introduction

Computational thinking (CT) is an approach to problem-solving which many researchers within the computer science education community advocate for its inclusion in the current K-12 educational curriculum. One strong argument for such recommendations is to provide students with the required knowledge and necessary skills to face the challenges of our modern society (Wing, 2006; Grover & Pea, 2018). As Wing argued, we live in a society of ubiquitous computing, however, we do not yet live in a society of CT (Wing, 2006). During the last few years, Sweden has started a process of adapting the curriculum of different subject matters, including mathematics and technology, so that K-12 students can acquire different skills for being able to produce creative and innovative solutions to solve authentic problems. Although the goals set by the Swedish National Agency for Education are clearly defined (Skolverket, 2018) in terms of the knowledge and skills that are to be developed by students in these particular subjects, it is, however, not specified what learning strategies and methods should be used to reach these goals and effectively teach CT concepts in the classroom (Kohen-Vacs & Milrad, 2019). One of the aims of this paper is to explore possible ways in which CT learning activities and teaching modules can be designed in a collaborative way between teachers and researchers so that they can be integrated into the schools' curriculum for middle education within mathematics aiming at reaching the goals established by the Swedish Agency for Education (Skolverket, 2018).

In this paper, we look closely at one example of an interdisciplinary approach regarding mathematics and programming. How can a mathematics teacher integrate a programming activity in their attempt to engage students in mathematical meaning making? To address this issue, we decompose the problem on how to think of the joint learning of these two domains in order to serve mathematical thinking. Our proposed approach can be employed by teachers to design and think of activities integrating the two subjects in unit-disciplinary or interdisciplinary settings. In the reminder of the paper, we address some of these issues while talking briefly about interdisciplinary approaches to learning mathematics and programming with the intention to develop a more articulate language to think about the challenge of integrating them.

2. Programming at the Service of Mathematical Meaning Making

It has been a long time now since a connection was made between learning to program and learning mathematics. This connection was firstly elaborated as early as in the 1960's by Seymour Papert as a theory of learning mathematics which he called *'Constructionism'*, i.e. the generation of mathematical meaning through programming a computer (Papert, 1980). Back then, programming was not yet perceived to have some value as a learning subject in general education. Indeed, Papert saw *Constructionism* as a mathematical learning activity involving the construction of and the tinkering with a digital artifact. He perceived of such an artifact as a public entity which can be shared, changed, discussed over. Such an artifact is thus never considered as 'complete' or as 'unquestionable', it is always under reform and improvement and it can be considered either as an object in itself or as a building block for higher order constructions (Kynigos, 2015).

So, the initial connection between mathematics and programming in the field of education, rather than addressing a two-way connection, referred to the latter servicing the former, so to speak. Papert (1980) focused on the issue of the learning of mathematics by writing a computer program. He designed a programming language with his colleagues (which he called Logo, a hybrid version of LISP) which enabled young learners to do just that. Logo was distinctive as it was invented and designed as an object and a context to program suitable for young children. Papert called this a 'microworld' (*also known as "Turtle Geometry")* where programs constitute structured commands to a digital avatar to change its state of position and orientation on the plane and by leaving a trace in each displacement to create figural models. He and others defined the Turtle as a means to create contours affording potentials to employ ideas from Differential, Euclidean and Cartesian Geometries. In addition, these affordances were proposed as absolute position and heading commands were included (Kynigos, 1992).

3. Big Ideas from Mathematics

Papert coined the term 'big ideas' in mathematics to draw attention to some generic mathematical concepts which can be used as tools for solving problems in Turtle Geometry and understanding the underlying structure of computational objects (Papert, 2000). Some examples of big mathematical ideas include generalization, fractions, ratio and proportions. Some of these ideas and concepts are also related to angles, rate of change, periodicity. Others address class of objects defined by their properties as well as orientation in space. In this promising early work, programming was nevertheless considered in the role of servicing mathematical meaning-making. Not much attention was given to educational design aspiring on optimized intertwinement between learning mathematics and programming. An exception to this was Brian Harvey who developed his Berkeley Logo and a 3-volume book about 'programming Logo style' where Turtle Geometry only features as one chapter, the rest addressing issues of LISP-like learning to program (Sinclair & Moon, 1991). For more than a decade, substantial research was carried out with a focus on learner's mathematical meaning-making through programming. However, even though this resulted in the elaboration of a lot of potential yielded by children's expressions, explanations and exchanges, it also raised a debate as to the applicability and the effectiveness of such activity regarding the demands made by schooling and sustained educational institutions (Noss & Hoyles, 1996). This debate has hence remained unresolved. Moreover, in the 90s the interest in learning to program withered as if it had become obsolete in the wake of the spread of multimedia interfaces and the internet in its early form, drawing attention to individuals and collectives' use of digital media rather than their creations with tools affording constructionist activity.

3. 1 Intertwining Applied CT with Math Challenges

Jansen et al., (2018), address the need to re-think what are the big programming ideas in connection to Computational Thinking (CT) in a way parallel to the quest for the definition of mathematical big ideas which began back in the 80's. They take an epistemological point of view searching to define those big ideas in the foundational work of Turing, i.e. related to the process of learning to solve problems in the way computers do. But then again, there are few efforts re-connecting the learning of mathematics and programming. This is despite the recent elaboration of the wider value of approaches to STEM where technology and mathematics feature in a transdisciplinary setting which affords such efforts. Furthermore, in mathematics education, attention has progressed from highlighting the value of students' learning of mathematical concepts and ideas as an end in itself. There is now more emphasis on the learning of mathematics to involve the adoption of higher order mathematical processes. That is, to develop a disposition to mathematize their world by seeking for patterns, creating generalizations, looking for expression economy (Noss & Hoyles, 1996). In the same sense, with respect to programming and computational thinking (CT), Wing (2006) has articulated the value of broadening the view of programming from the learning of concepts and techniques to the adoption of computational practices and strategies. As is well known in the Computational Thinking Education (CTE) community addressed the educational point of CT and programming to involve not only computational concepts but also practices and strategies (Jansen et al., 2018), i.e. higher-order problem solving competences such as abstraction, decomposition and pattern recognition.

An Example

Consider the following problem given to 8th grade students to resolve using MaLT2, a web-based platform freely available on http://etl.ppp.uoa.gr/malt2 (Kynigos & Grizioti 2018).

Here is a procedure called 'parallelogram' which has been executed with the following variable values: parallelogram 30 50 35 145.

Problem: Is this a model of a mathematical parallelogram? if not, can you fix it so it becomes one?

The 'parallelogram' procedure has been defined as follows

```
To parallelogram :a :b :c :d
Fd :a   rt :c
Fd :b   rt :d
Fd :a   rt :c
Fd :b   rt :d
end
```

where the 'fd' command displaces an avatar in the direction of its heading and 'rt' changes its heading to the right. This program has been didactically engineered to create an instance of a parallelogram when the input values are appropriate according to its properties. However, the code is such that not all the properties have been built in the procedure. The missing property is a dependency between variables 'c' and 'd'. As the code stands there is no such dependency. The dependency is mathematical, a linear function and at the same time a geometrical property of turn complementarity.

The point is what kind of activity do we want the students to engage in. They will need to experiment by dynamically manipulating the values given to the execution of the procedure. The apparent breaking down of the parallelogram instance will enable them to start looking at the formal code to discriminate mathematical relations within, identify the property responsible for the breaking down of the figure, try to argue how to express a generalized relationship between the turns and what this relationship needs to be. Debug the program in order to embed the properties of a mathematical object as follows.

```
to parallelogram :a :b :c
repeat 2 [ fd :a rt :c fd :b rt 180-:c]
end
```

This procedure expresses the class of objects 'parallelogram' since it contains variables for the independent linear and angular elements, expresses the property of equality by means of a loop to repeat half the figure twice and the angular dependency by means of a linear function between two consecutive avatar turns. The students themselves then engaged in problem posing, trying to solve a follow-on problem after having constructed and discussed this procedure. Their expression of the new problem was as follows: 'Can you construct a procedure which makes a parallelogram but cannot make a rectangle?' They found many solutions mostly from the following kind:

```
to parallelogram :x :c
repeat 2 [forward :x right :c forward :x+20 right 180-:c ]
end
```

Figure 1 below depicts the visual outcomes of the students´ proposed solutions based on trying out 3 different combinations of parameters and then dynamically varying each one.

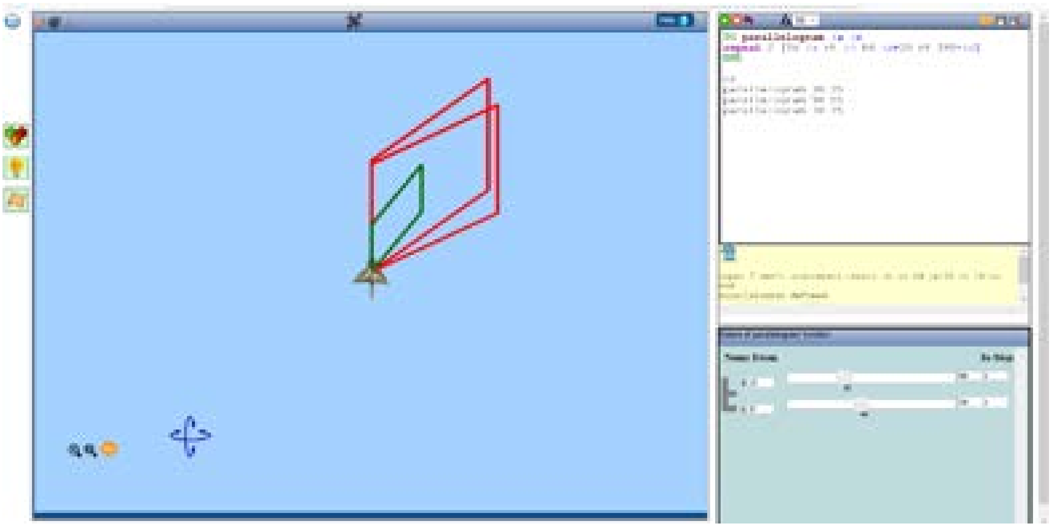


Figure 1- The outcomes of the program suggested by the students

In this solution, the students imposed an otherwise redundant functional relation between two consecutive linear elements of a parallelogram (:x+20 or in other cases :x*2, etc.). The definition of a parallelogram implies that there must be no dependency between the length of two consecutive sides. The students solved the problem of constructing a parallelogram which can never be a square by imposing a functional relationship between those lengths which makes it impossible for a property of the square to apply, i.e. that the lengths can never be equal since they must have a difference of 20. So here, the big aim, is represented by a generalized property of a geometrical figure combined with the idea of function and generalized number. And, most of all, that the students' experience led them to enjoy not only solving problems they were given but posing their own idiosyncratic problems and finding mathematical solutions.

4. Discussion - Conclusion

In this paper, we have presented an example illustrating how mathematics and programming can be integrated to serve mathematical meaning-making both in connection to concepts but also in connection to mathematical thinking. Our goal is to help curriculum designers to place joint programming and mathematics activities in either of the respective curricula or consider them in trans-disciplinary educational activities. Based on the example and ideas presented in this paper, we have developed several similar exercises in which in-service teachers are learning and trying out these ideas as part of professional development courses we offer them. For a mathematics teacher being explicit about the positioning and the role of the two subjects would help designing activities which make more sense to students. This kind of discussion may help clarify educational policy and curriculum design with respect to the aims of designed activities for students. What kinds of domains are rich in opportunities for them to develop a mathematical way of thinking, practices and strategies in the context of using big ideas either in mathematics or in programming? What kinds of specific connections can be pedagogically engineered between such ideas from each domain, for instance between functional relations and generalized number from mathematics and variables and model animation properties from computer science. The special characteristic of this approach is that students may engage in mathematics and use programming as a tool to make mathematical concepts 'come alive' as animated 3D models. Concepts are thus discussed over and 'put to use' by the students, and a mathematical way of thinking can be cultivated in situations which become relevant and interesting to them. Interdependent formal, figural and dynamic representations are connected in a unique way. Teachers have a new ground to design activities for their students and discuss mathematical learning with their colleagues in the process.

5. References

Grover, S. & Pea, R. (2018). Computational Thinking: A Competency whose Time has Come. *Computer Science Education: Perspectives on teaching and learning.* London: Bloomsbury Academic, 19-37.

Jansen, M., Kohen-Vacs, D., Milrad, M. (2018). A Complementary View for better Understanding the Term ComputationalThinking. *Proceedings of the International Conference on Computational Thinking Education 2018*. Hong Kong: The Education University of Hong Kong, 2-7.

Kohen, D., & Milrad, M. (2019). Computational Thinking Education for In-Service Elementary Swedish Teachers: Their Perceptions and Implications for Competence Development. *Proceedings of the International Conference on Computational Thinking Education 2019.* Hong Kong: The Education University of Hong Kong, 109-112.

Kynigos, C. (1992). *The Turtle Metaphor as a Tool for Children Doing Geometry in Learning Logo and Mathematics*. Cambridge, MA: MIT press.

Kynigos, C. (2015). Constructionism: Theory of Learning or Theory of Design? *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*. Cham: Springer, 417- 438.

Kynigos, C., Grizioti, M. (2018) Programming Approaches to Computational Thinking: Integrating Turtle Geometry, Dynamic Manipulation and 3D Space, *Informatics in Education,* 17.2, 321-340 Vilnius University

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Dordrecht: Kluwer. *Science and Technology, 3*(3), 249-262.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. New York: Basic Books.

Papert, S. (2000). What's the Big Idea? Toward a Pedagogy of Idea Power. *IBM Systems Journal, 39*(3.4), 720-729.

Sinclair, K., & Moon, D. (1991). The Philosophy of LISP. *Communications of the ACM, 34*(9), 40–47.

Skolverket (2018). *Curriculum for the compulsory school, preschool class and school-age care.* Retrieved January 10, 2021, from https://www.skolverket.se/getFile?file=3984

Wing J. M. (2006). Computational Thinking. *Communications of the ACM, 49*(3), 3

Conferencia 09

Situaciones Didácticas de Paralelismo: Percepción y Visualización

Miguel DELGADO PINEDA
Facultad de Ciencias
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España

Resumen

La forma de percibir el paralelismo de dos rectas por parte de profesores y estudiantes es extensible a otras líneas curvas. Esta percepción tiene carácter local y, en cierta medida, se justifica en la concepción de rectas paraleles de Euclides. La imagen de segmentos paralelos permanece invariante aunque el estudiante adquieran la definición de paralelismo en otros contextos que no son puramente geométricos.

La visualización del paralelismo de dos rectas tiene una concepción global, donde al menos se requiere visualizar una recta. La visualización de segmentos paralelos se distorsiona entre estudiantes y profesores cuando dichos segmentos no poseen rectas perpendiculares comunes.

Este artículo incide en los procesos de visualización del paralelismo de rectas, circunferencias y otras curvas diferenciables en casi todo punto de su dominio.

Palabras clave: Paralelismo. Segmentos paralelos. Rectas paralelas. Circunferencias Concéntricas. Curvas paralelas. Lugar geométrico equidistante.

Introducción

La percepción de las cosas no siempre se ciñe a la razón intrínseca de esas cosas. Qué clase de contestaciones podemos esperar al preguntar: ¿Son las cuerdas de la guitarra cuerdas paralelas? Más de un 70% de las personas encuestadas lo afirmaron, aludiendo que las cuerdas de la guitarra no se juntan. Esto se debe a la idealización de la guitarra. Esta respuesta aflora un problema relativo a la percepción del concepto paralelismo y de la forma de visualizar un par de rectas paralelas.

Escribir sobre paralelismo requiere tener claro el significado de la palabra paralelismo. La Real Academia Española (RAE) y la Asociación de Academias de la Lengua Española (ASALE) establece el significad: "*Cualidad de paralelo*". De paralelo indica que es un adjetivo con el siguiente significado geométrico: "*Dicho de dos o más líneas o superficies: que mantienen la misma distancia entre sí en todos sus puntos*". La definición no restringe los puntos elegibles, luego parece imposible que puedan existir rectas paralelas. Sin duda, podrían ser elegidos dos puntos cualesquiera que están a distancia tan grande como se quiera. Quizás se pueda discrepar de esta última afirmación, pero seguro que tal discrepancia se centra en la percepción personal de rectas paralelas y de cómo se valora la distancia, no tanto en la definición. El concepto distancia requiere el auxilio del concepto de recta perpendicular común.

Es necesario conocer su significado académico-matemático recogido en textos matemáticos y enciclopédicos. La enciclopedia más conocida de nuestros tiempos; Wikipedia en versión en español muestra: "*En la geometría, el paralelismo es una relación que se establece entre cualquier variedad lineal de dimensión mayor o igual a 1 (rectas, planos, hiperplanos, entre otros). En el plano cartesiano dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente o son perpendiculares a uno de los ejes ,… Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir, si estos nunca se unen o cruzan".*

En el párrafo se habla de rectas en un plano con ejes coordenados, y cómo la condición de paralelismo se caracteriza con un número. A la vez se habla de vectores directores que nunca se cruzan, pero no se aclara que significa cruzar dos vectores, y por tanto se alude a una determinada percepción personal.

La versión en inglés de la enciclopedia dice: "*In geometry, parallel lines are lines in a plane which do not meet; that is, two straight lines in a plane that do not intersect at any point are said to be parallel. Colloquially, curves that do not touch each other or intersect and keep a fixed minimum distance are said to be parallel. A line and a plane, or two planes, in three-dimensional Euclidean space that do not share a point are also said to be parallel…"*

En Busser y Costa (2010) se indica, respecto al plano, dos rectas que son iguales o que no tienen ningún punto común se llaman paralelas.

Estas tres referencias nos hace dudar de la idea que tienen los estudiantes acerca de dos rectas paralelas. Por ello, se captó la opinión de una muestra de 130 estudiantes: 59 de Enseñanza Secundaria y 71 de primeros cursos de universidad, con dos sencillas preguntas que no hacían referencia ni al plano ni al espacio.

¿Cuál es la naturaleza matemática de dos rectas paralelas? Todos reconocían el carácter geométrico y nunca se caracterizó como un objeto algebraico. Esto parece ir casi en contra de lo dicho en Wikipedia.

¿Qué son dos rectas paralelas? En este caso se recogieron las respuestas siguientes:

a) Dos rectas son paralelas cuando no tienen ningún punto en común.
b) Dos rectas son paralelas si no se cortan.
c) Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son paralelos, es decir, si éstos son linealmente dependientes.
d) Dos rectas son paralelas si tienen sus vectores directores iguales.
e) Dos rectas son paralelas si tienen sus pendientes iguales.
f) Dos rectas son paralelas si forman un ángulo de 0º.
g) Dos rectas son paralelas si los coeficientes de sus ecuaciones respectivos son proporcionales.

Nos sorprendió que ningún estudiante hizo referencia a la distancia fija de cualquier punto de una recta a la otra. Otras sorpresa fue que las respuestas no explicitaban si era en en el plano o el espacio geométrico. Por ello, se pidió a cada estudiante que dibujara dos rectas paralelas. El objetivo era comprobar cómo visualizaban dos rectas paralelas. En todos los casos dibujaron dos segmentos paralelos sobre una hoja de papel.

También se pidió que indicaran un objeto o situación de la vida real donde se ejemplificaran dos rectas paralelas. El objetivo era comprobar como percibían el paralelismo de rectas del plano o del espacio. Los objetos reales se agruparon en dos categorías: La primera relativa a los lados de un rectángulo. Por ejemplo, hoja de papel, libro, servilleta de papel, pared, etc. La segunda relativa a las aristas de un paralelepípedo. Por ejemplo, las aristas de un edificio, las de una caja de embalaje, las aristas de una puerta, etc.

Si se considera que todos los estudiantes, de cierto nivel en adelante, tienen una idea de lo que son rectas paralelas, entonces el análisis profundo de lo dicho en estos primeros párrafos serviría de inicio a una investigación de índole educativa. Sin embargo, la intención de este escrito no es seguir esa línea de pesquisa, pues pretende ser una reflexión sobre algunas ideas y algunas situaciones relativas al paralelismo ante la variedad de concepciones personales, las formas de visualizarlo y las formas de percibirlo. Estas concepciones se simularon mediante objetos Geogebra para ver si se los objetos se ajustaban a sus percepciones y sus visualizaciones en el sentido de Delgado (1996), en relación a la imagen que generaba la visualización del concepto.

La condición de rectas paralelas

Quizás la primera imagen emergente a la voz de paralelismo se corresponda con el paralelismo en el plano. Si se alude al número de puntos que comparten un par de rectas para caracterizar el paralelismo, entonces esta es relativa al plano, puesto que en el espacio dos rectas del plano que no tienen algún punto común, son paralelas o se cruzan. Lo gracioso de esta concepción estriba en que el estudiante tiene una concepción muy algebraica para buscar los puntos comunes. Esto se entiende en la medida que traspone el concepto de ecuación por el de recta, y la búsqueda de puntos comunes por la resolución de un sistema de ecuaciones lineales.

La referencia geométrica al ángulo no es muy adecuada. No se considera que la naturaleza de ángulo requiere disponer de un par de segmentos rectilíneos tales que uno de sus extremos es común. Además, el ángulo cero es un caso límite del concepto de ángulo. Si las rectas son paralelas, la construcción de un ángulo con dos segmentos rectilíneos de esas dos rectas resulta imposible, tanto en el plano como en el espacio. A esto aportamos la opinión de un profesor especialista en Geometría, el punto común indicando, para rectas paralelas, sería el punto del infinito. Entendemos que el punto del infinito es algo complejo para los estudiantes y los segmento deberían ser sustituidos por semirrectas. No nos parece muy adecuada esta interpretación pues el punto del infinito está excesivamente lejos.

La referencia a vectores directores, ecuaciones y uso de algunos parámetros requiere, implícitamente, la utilización de una estructura de espacio vectorial tanto para el plano como para el espacio. El uso de esas herramientas impone distinguir entre rectas paralelas de las llamadas rectas coincidentes. Otra vez emerge una trasposición de lo algebraico por lo geométrico; una concepción muy algebraica relativa a los sistemas de ecuaciones lineales compatibles indeterminados o incompatibles.

Ante tanta definición es imprescindible recurrir a los clásicos, por ello, es el momento de hacer referencia a la concepción de paralelismo de la Grecia Clásica recogida en los Elementos de Euclides. Debemos recordar que, en ese periodo de tiempo, las definiciones de los Elementos son descripciones de objetos reales, de objetos existentes, de objetos describible con los sentidos; punto, recta, ángulo…; véase Euclides (1991) y (1774). Además, la figura de rectángulo es el objeto medible por excelencia en esa cultura, dada la facilidad de dibujarlo. Por ello, se entiende que se definan: *Un punto es aquello que no tiene partes*, *una línea es una longitud sin ancho* y *una línea recta es aquella línea que yace igualmente respecto a sus puntos*. Entender esas definiciones requiere aceptar, en cierta medida, que la recta era una sublimación del concepto segmento rectilíneo que es lo que podían percibir, y el punto es un caso extremo de segmento rectilíneo sin longitud. Desde esa perspectiva se puede entender lo siguiente:

El postulado V. *Si una recta, cortando a otras dos, forma los ángulos internos a una misma parte, menores de dos rectos, las dos rectas prolongadas se encontrarán en la parte en que son los dos ángulos menores de dos rectos.*

La definición LXXIII: *Paralelas son las rectas de un plano que prolongadas por sus dos partes en ninguna de ellas se encuentran.*

Otro dato importante es que la Geometría Helénica admitía el uso del compás, lo cual permitía trasportar segmentos, por ello Euclides admite el postulado III: *Con cualquier centro y cualquier distancia se puede describir un círculo.*

Palabras como largo, ancho, distancia, recto, ángulo, círculo y otros son referencia a objetos incuestionables para la época pues se percibían. Lo mismo sucede con el de recta perpendicular a una recta dada. De lo observable elemental indiscutible se enunciaban definiciones, postulados y axiomas. Una vez establecido los elementos sencillos, se construían las demostraciones, por síntesis, de lo más conocido y simple a lo desconocido y complejo. El proceso de análisis, de lo complejo a lo simple, no era ajeno a los matemáticos griegos puesto que les permitió descubrir demostraciones. Sin embargo, no aplicaron esta técnica en las demostraciones de los Elementos.

Hoy podemos justificar de una forma más sofisticada la existencia de rectas paralelas, si bien, lo más que podemos percibir son segmentos paralelos en determinadas condiciones. Como los griegos, necesitaríamos prolongar esos segmentos para tener la certeza de que fuesen paralelos. Si duda de esto último, piense en dos segmentos tales que no exista ninguna recta perpendicular que pase por un punto de cada segmento. Supongamos que la proyección perpendicular de los segmentos sobre una tercera recta paralela generan segmentos disjuntos como el caso de los segmentos de la izquierda en la figura 5.

Metáforas didácticas sobre segmentos paralelos y líneas paralelas

El convoy de tren que se acerca nos permite comprender que las vías no se juntan, aunque percibamos que si lo hacen en la lejanía. ¿Podemos pensar que las vías del tren están formadas por dos líneas paralelas? Esta metáfora de las vías de un tren nos permite abordar las cuestiones de paralelismo, su percepción (las vías parecen juntarse) y su visualización (una rueda del tren siempre está a la misma distancia de la otra vía).

Figura 1: Vista de un tramo recto de vías

Otra metáfora nos facilita entender la percepción a la idea de segmentos paralelos. Las piezas rectas del juego del Scalextrix de la figura 2, es la imagen con la cual proponemos una primera situación didáctica con dos segmentos paralelos. Se trata de decidir si las guías metálicas son segmentos paralelos o no. Para ello, disponemos de varias piezas iguales y nos permitimos unirlas. Quizás podamos imaginar cómo sería la pista con un número enorme de piezas. Esa unión de pieza refuerza la estrategia griega de prolongar los segmentos. Ahora bien, la pregunta esencial es: ¿Una guía de una pieza es paralela a la otra guía de otra pieza? En el caso de usar una única pieza, se trata encontrar alguna característica que asegure que los segmentos de guías son paralelos.

Figura 2: Piezas recta y curva de Scalextrix

Al emplear piezas curvas de la figura 2, se comprueba que unir piezas curvas iguales, manteniendo la curvatura, permite construir pistas que tiene la forma de coronas circulares. ¿Una guía de una pieza es paralela a la otra guía de otra pieza? Al utilizar una única pieza, se puede encontrar alguna característica que aseguren ese supuesto paralelismo. Hubiera tratado las mismas cuestiones si las piezas elegidas son las de vías de un tren de juguete.

El profesor mencionado nos indicó que imaginaba las rectas paralelas como dos segmentos paralelos con perpendiculares comunes. Esto era una respuesta rápida y sin necesidad cierto formalismo y nos mostraba la imagen generadora de su visualización. Además, añadió: “me imagino un par de rectas paralelas como un rectángulo al cual se alarga un par de lados opuestos”. Es claro que su idea coincide con la concepción de Euclides, incluso cuando, desde el inicio, definió las rectas paralelas mediante la distancia entre ellas.

Las piezas rectas y las piezas curvas se pueden unir para crear un circuito de carreras, desde circuitos simples circulares a hasta pistas muy complejas con cambios de curvatura. A la vista la figura 3 ¿se puede hablar de que las guías conforman dos curvas paralelas? La respuesta del profesor a esta pregunta era afirmativa. Además, de afirmar la existencia de curvas paralelas, lo ejemplificaba con circunferencias concéntricas.

Figura 3: Un circuito de carreras

Se podría pensar que este problema es contemporáneo por el juguete. Sin embargo, existen construcciones en el mundo antiguo; calzadas y teatros romanos en los cuales se empleaban los mismos elementos rectos y curvos del juguete.

Figura 4: Calzada romana y teatro romano de Mérida en España

Resulta que la concepción de Euclides de prolongar el segmento no siempre es aplicable a los tramos curvos ni a los circuitos, puesto que las pistas circulares no son prolongables, si bien si son ampliables con más piezas. ¿Debemos cambiar la concepción de paralelismo de segmentos de una forma más general?

Percepción y Visualización de segmentos paralelos

Percibir que las piezas rectas de Scalextrix tienen guías paralelas, no tiene nada que ver con la concepción de Euclides del paralelismo de dos segmentos. La percepción de esos segmentos guías tiene más que ver con la existencia de rectas perpendiculares comunes a los dos segmentos. Que cada recta perpendicular en un punto de una guía tenga un punto de la otra guía y nos permite comprobar que la distancia entre esos puntos en cada perpendicular es constante. La existencia de segmentos perpendiculares comunes facilita la percepción del paralelismo y esta percepción se ciñe a la definición RAE.

Realizamos una experiencia con diez profesores de Enseñanza Secundaria solicitando la utilización de una hoja Geogebra que no tenía herramientas, ni ejes de coordenadas ni rejilla.

En una vista gráfica se mostraban cuatro puntos que definían dos segmentos. Se solicitaba que los colocaran de forma que fueran dos segmentos paralelos. En otra vista gráfica se presentaba una casilla para que la aplicación le asegurara que esos segmentos eran paralelos o no.

Ningún profesor acertó en los tres primeros intentos en dar un par de segmentos paralelos con esa aplicación. Todos presentaron segmentos de similar longitud y con recta perpendicular conjunta en cada punto.

La concepción de Euclides si interviene en la forma de visualizar a dos segmentos rectilíneos paralelos. Si los segmentos no tienen segmentos perpendiculares comunes, basta ampliar dichos segmentos de forma que se puedan disponer de normales comunes a los segmentos ampliados. Visualizar el paralelismo requiere un marco global con referentes últimos las rectas que contienen a esos segmentos.

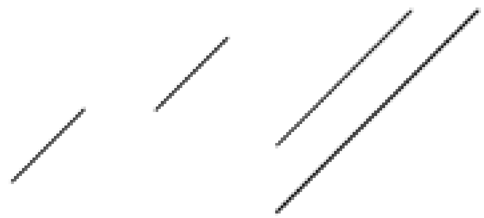


Figura 5. Visualización de segmentos rectos paralelos

Percepción y visualización avalan que dos segmentos rectilíneos son paralelos si los puntos de un segmento están todos a la misma distancia de la recta que contiene al otro. Esto último puede ser tomado como definición.

Figura 6. Igualdad de distancia a la recta

Para evidenciar esta consideración, se hizo otra experiencia con los 10 profesores y otra aplicación Geogebra que contenía los elementos anteriores y la herramienta de construir rectas perpendiculares y paralelas. Estas herramientas se utilizaban después de situar los segmentos, y luego se rectificaba.

Todos los profesores rectificaron la posición de los puntos siguiendo dos estrategias:

1. Se hizo una perpendicular que pasaba por uno de los puntos del otro segmento y luego una perpendicular a la perpendicular en ese punto. El otro punto se ponía sobre la recta de forma similar a la mostrada en la figura 6.
2. Se hizo una recta paralela a un segmento que pasaba por uno de los puntos del otro segmento. En este caso no se cambió la longitud del segmento rectificado.

Los similares efectos de percepción y visualización permiten decir de dos arcos de circunferencia son segmentos paralelos si están sobre dos circunferencias concéntricas.

Figura 7. Visualización de segmentos circulares paralelos

Estas posibles definiciones de segmentos paralelos no se ajustan a la definición dada por la RAE. La distancia entre un punto de un segmento al otro no es constante, si no existen esos segmentos normales a los dos. En este caso la equidistancia de los puntos de un segmento a la línea global que contiene a otro es esencial. Esto es coherente con nuestra última definición.

Figura 8. Referencia global para percepción de paralelismo

La equidistancia entre rectas y entre circunferencias es lo que nos permite decir que dos rectas o dos circunferencias son paralelas. La equidistancia no define una única recta paralela, pues define dos rectas paralelas a una dada. También define dos circunferencias si la separación es menor que el radio de la circunferencia dada.

Lugar geométrico equidistante de un segmento

Es claro que no es lo mismo recta, o circunferencia, paralela y lugar geométrico equidistante de una recta o de una circunferencia. Se podría pensar que con estas figuras se conserva las apariencias de lugar geométrico, en cierta medida. Pero, esto no es así. Basta ver un par de ejemplos.

El lugar geométrico equidistante relativo a un segmento rectilíneo no está constituido por un par de segmentos rectilíneos paralelos en el sentido de Euclides. Ese lugar es una curva cerrada constituida por los citados segmentos paralelos unidos por dos semicircunferencias que unen sus extremos.

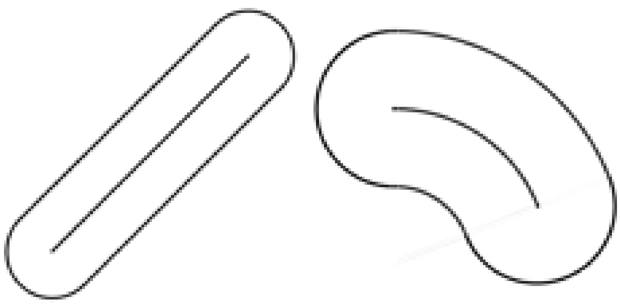


Figura 9. Lugar geométrico equidistante de un segmento

La simplicidad de la curva cerrada es identificable en la construcción de los circos romanos. Si bien, uno de los dos semicírculos de los circos romanos solía estar deformado como se observa en la figura 10.

Figura 10: Circo romano de Mérida (España)

Si nos imaginamos un segmento rectilíneo cada vez más lago, construimos una familia de curvas cerradas sobre el segmento tal que se transforma en un par de rectas paralelas en el límite. Algo análogo sucede con los segmentos curvos, si bien las longitudes de ellos están acotadas.

Otro ejemplo es el lugar geométrico exterior equidistante relativo a un cuadrado. Éste no está constituido por cuatro segmentos rectilíneos paralelos a cada lado del cuadrado no conexos. Ese lugar es una curva cerrada constituida por los citados segmentos unidos por cuatro cuartos de circunferencias que unen los extremos de los segmentos. Es decir, se trata de un cuadrado con vértices redondeados.

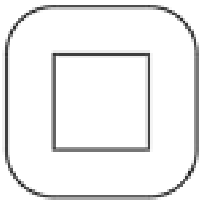


Figura 11. Lugar geométrico exterior equidistante de un cuadrado

Análogamente, podemos imaginar la curva cerrada correspondiente a una línea poligonal se segmentos rectos o curvos.

Paralelismo y equidistancia

La percepción del paralelismo hace uso de un marco muy local donde se observa el objeto. En cierta medida esta idea es lo que puede hacer pensar que las cuerdas de una guitarra son segmentos rectos paralelos en un mismo plano o que las cuerdas de una viola son segmentos curvos paralelos en el espacio. Realmente no lo son.

Las figuras 9 y 11 nos surgieren la pregunta: ¿Es lícito pensar que equidistancia y paralelismo son sinónimos? Si aceptamos lo dicho por la RAE ¿se puede decir que un segmento de la curva cerrada es paralelo a una porción del segmento recto o del cuadrado?

La pregunta nos incomoda pues no se ajusta la idea intuitiva de paralelismo iniciada con las vías del tren. Por otro lado, la intuición nos hace negar que un segmento del cuadrado curvo no siempre es paralelos a un segmento recto del otro cuadrado.

Otra pregunta es: ¿Podría circular un tren por unas vías con la forma de las figuras 9 y 11? La respuesta es clara: un tren normal no, pues el cuadrado con bordes redondeados y el cuadrado normal no tiene la misma forma. La curva exterior es diferenciable en todos sus puntos y la interior no. Ahora bien, es posible diseñar un circuito con un par curvas equidistantes del cuadrado exteriores a este, y en este caso los ejes del tren deben movibles para ser perpendiculares a las dos vías en cada par de puntos. Esto nos permite hablar de la pareja de cuadrado de bordes redondeados y concéntricos como un par de curvas paralelas puesto que se conserva la distancia y se conserva la forma y las rectas perpendiculares son comunes. Ahora si podríamos decir que un segmento de una curva es paralelo otro segmento de la otra en el sentido por prolongación de Euclides. Lo mismo sucede con dos curvas equidistantes a un segmento pues conservan la distancia, la forma y las rectas normales.

Un ejemplo nos sirve de ejemplo comprobar que el traslado de una figura no es lo mismo que una figura paralela. La gráfica de la función $g(x) = x^2 + 1$ es la trasladada de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ y esas parábolas no son normal-equidistante.

La construcción de una gráfica paralela impone la necesidad de la existencia de recta normal en cada punto de la gráfica y, por tanto, la existencia de recta tangente.

La condición de ser diferenciable en cada punto asegura la existencia de rectas tangente y normal, por ello, el concepto de curva paralela dada de la literatura se plantea como la determinación de una curva que sea equidistante con una inicial diferenciable. Sin embargo, la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no es diferenciable en 0, pero si tiene recta tangente vertical en 0 y, por tanto, recta normal.

Una restricción al problema de las curvas paralelas podemos formularlo de la siguiente manera: Dada una función real de variable f derivable en todo punto, se determina una curva de puntos (x, y), $g(x, y) = 0$, que cumplen que existe un punto $(x_0, f(x_0))$ tal que $(x, y) \in r_0$ y $\left\|(x, y) - (x_0, f(x_0))\right\| = k$, con k fijo. Donde r_0 la recta tiene la ecuación $r_0 \equiv x - f'(x_0)y - f'(x_0)f(x_0) - x_0 = 0$ y la recta normal a la gráfica de f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

El problema tiene dos soluciones posibles expresables en forma paramétrica:

$$g_1 \equiv \begin{cases} x = t - \dfrac{kf'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \\ y = f(t) + \dfrac{k}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \end{cases} \quad \text{y} \quad g_2 \equiv \begin{cases} x = t + \dfrac{kf'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \\ y = f(t) - \dfrac{k}{\sqrt{1+f'^2(t)}} \end{cases}.$$

Surge la duda: ¿Podremos diseñar vías de tren empleando un perfil gráfico, distinto de rectas y de circunferencias?

Conclusión

La respuesta a la última pregunta no sólo depende de la condición la gráfica inicial puesto que depende de la separación k elegida. Esta dependencia permite saber si dos curvas paralelas a una curva inicial tienen la misma forma o no, puesto que g_1 y g_2 pueden tener formas distintas. Depende de si ambas curvas son las gráficas de una función real de variable real diferenciable, o son curvas planas con puntos dobles o con puntos no diferenciables.

En el primer caso se puede diseñar unas vías de tren con dos curvas de tipo g_1 o de tipo g_1, partiendo del perfil de la gráfica de f. Es decir, la semejanza de formas lo es todo en este problema y esta semejanza tiene que ver con la curvatura en cada punto; del radio de curvatura y de la circunferencia osculatriz. Esta situación nos permite percibir la propuesta de Euclides de paralelismo para dos segmentos curvos en esas curvas paralelas y visualizar en términos de equidistancia de los puntos de un segmento curvo a la curva que contiene al otro segmento.

En el segundo caso, obviando la curvatura, sólo se podrá diseñar vías de tren haciendo uso de las partes de las curvas donde el teorema de la función implícita nos asegure la existencia de las expresiones explícitas.

Esta última consideración se debe tener en el caso de que la función inicial de referencia f no sea diferenciable en algunos puntos, pero que tenga recta tangente vertical en ellos. En estos casos se podrá trabajar con algunas ramas de las curvas paralelas, como en el caso segundo.

Bibliografía

Busser, P.; Costa González, A. F. Geometría Básica. Sanz y Torres ed. Madrid, 2010.

Camilo Valencia, J.; Hernán Bedoya, A. *Curvas paralelas explícitas de las curvas cónicas no degeneradas para el torneado CNC de lentes y espejos esféricos-cónicos.* Revista EIA, ISSN 1794-1237 Número 10, p. 31-43. Diciembre, 2008.

Cordero, L.A.; Fernández, M. Gray, A. Geometría Diferencial de Curvas y Superficies. 1995.

Daub, W.E. *Monografía sobre las curvas paralelas*. http:revistas.uns.edu.ar/ee/article/download/1209/729.

Delgado Pineda, M. (2016). *Registros para una función real cualquiera de variable real. El Cálculo y su Enseñanza*, 6, pp. 1-28. México.

Delgado Pineda, M.; Ulecía García, T. *Visualización en el Análisis Matemático: Aprendizaje Matemático basado en el tratamiento de imágenes dinámicas que posibilitan el modelado de objetos de esta área del conocimiento.* EDUMAT-2009. Argentina 2009.

Delgado Pineda, M.; *Objetos Matemáticos dentro del marco de una Matemática visual.* EDUMAT-2009. Argentina 2009

Euclides. Elementos. Libros I-IV, Editorial Gredos. Madrid, 1991.

Euclides. Los seis primeros libros, y el undécimo y duodécimo de los Elementos. Libros I-IV, Joachin Ibarra Impresor de Cámara de S. M. Madrid, 1774.

Gray, A.; Abbena, E.; Salomon, S. Modern Differential Geometry of curves and Surfaces wiht Mathematica. Chapman & Hall/CRC. 2006

Pita Ruiz, C. *Curvas paralelas*. Miscelánea Matemática 21,29-52. 1994.

Sancho de San Román, J. *Cuevas alabeadas de anchura afín constante*. Collectanea Mathematica. V. 8, Nº 1, 85-98. 1955

Wikipedia. Paralell curve, https://en.wikipedia.org/wiki/Parallel_curve. 2021

Conferencia 10

Gamificación en sistemas tutores inteligentes: una aplicación en la enseñanza de las matemáticas

Carina Soledad GONZÁLEZ GONZÁLEZ
Departamento de Ingeniería Informática y de Sistemas
Universidad de La Laguna, Tenerife, Islas Canarias, España
cjgonza@ull.edu.es

Resumen

En este trabajo se describirán los principios de diseño de la gamificación como estrategias de enseñanza-aprendizaje y como base para proporcionar experiencias de aprendizaje inmersivas significativas. También se presentará la relación entre la neuroeducación, el aprendizaje inmersivo y los videojuegos con la gamificación. Se presentará además una experiencia de aprendizaje inmersivo en entornos virtuales de aprendizaje, como ejemplo práctico de aplicación de dichos elementos de gamificación y utilización de herramientas de realidad virtual y aumentada para la creación de entornos inmersivos.

Palabras clave: Neuroeducación. Aprendizaje Inmersivo. Gamificación. Videojuegos. Enseñanza.

1. Introducción

La Neuroeducación es un área emergente interdisciplinar de investigación que tiene el objetivo de enlazar la investigación sobre el cerebro y las conductas relevantes a nivel educativo. El objetivo de la neuroeducación es avanzar el conocimiento sobre los mecanismos cerebrales que subyacen a los procesos de aprendizaje y al diseño y desarrollo de entornos óptimos de enseñanza-aprendizaje. La Neuroeducación por tanto trata de dar respuesta a las preguntas de cuándo, qué, cómo y por qué el cerebro aprende y brindar evidencias a la pedagogía sobre estos procesos (Ansari, De Smedt y Grabner, 2012).

En los últimos años las simulaciones se han convertido en herramientas populares para facilitar la creación de entornos inmersivos que permiten la representación de las ideas en formato tridimensional, conllevando numerosos y claros beneficios para el aprendizaje (González y Blanco, 2008; Ferreira y González, 2020). A través del poder y creatividad de las simulaciones y la ubicuidad de Internet, se pueden crear entornos de aprendizaje inmersivos que promuevan un aprendizaje más significativo, relevante y motivante para los estudiantes. Sus aplicaciones van desde la industria a la academia, teniendo además diferentes tipos de formatos. Así vemos que estos entornos inmersivos pueden ser de realidad virtual, aumentada o mixta y pueden ser utilizados de forma individual o colaborativa en la red. Actualmente, los laboratorios virtuales y remotos se aprovechan de las ventajas de estas tecnologías para brindar nuevas formas de experimentación en modalidades de enseñanza en línea.

Por otra parte, millones de personas juegan actualmente a videojuegos (online, en consolas, en smartphones, y en otros dispositivos) y la mayoría de estas personas no son conscientes que los diseñadores de videojuegos incorporan conocimientos de neurociencia en el diseño y desarrollo de estos. Por ello, existen comunidades científicas que están estudiando la neurociencia de los videojuegos o lo que es lo mismo, cómo los videojuegos afectan al cerebro (Green y Bavelier, 2006). Algunas de las cuestiones que se investigan se relacionan con el estudio de los efectos fisiológicos de jugar a videojuegos, efectos positivos y negativos del uso de videojuegos, utilidad y oportunidades del uso de videojuegos en la educación, la rehabilitación y la salud, problemas de la adicción a las tecnologías (en particular a los videojuegos), así como consideraciones éticas y sociales en el diseño y desarrollo de los juegos para los desarrolladores y los jugadores.

Teniendo estos conceptos en mente y tratando de integrarlos, podemos decir que hacer uso de los elementos y dinámicas de los videojuegos para el aprendizaje potenciaría y haría más efectiva la transmisión de conocimiento. Realizar esta acción implica "gamificar" el aprendizaje para conseguir una mejor experiencia, haciendo uso de elemento comunes de los videojuegos tales como la retroalimentación inmediata, la libertad de decisión, la progresión, las reglas claras, etc. (Mora et al., 2015). Además, si hacemos uso de la diversión, podemos decir que la nueva información se fijará mejor en el cerebro y, además, basaremos el aprendizaje en el ensayo y error, sin temor a la equivocación.

Por ello, en este artículo veremos cómo "gamificar" entornos de enseñanza y aprendizaje, describiendo principios de diseño de videojuegos, aprendizaje inmersivo y neuroaprendizaje.

2. Gamificación: Elementos de Diseño

Según Cook (2013), cualquier proceso que cumpla las siguientes premisas puede ser transformado en un juego o ser gamificado: a) la actividad puede ser aprendida; b) las acciones del usuario pueden ser medidas y c) los feedbaks pueden ser entregados de forma oportuna al usuario. Por tanto, vemos factible que las actividades formativas pueden ser gamificadas. Básicamente, la gamificación intenta satisfacer algunos de los deseos o necesidades humanas fundamentales que la gente necesita, tanto en el mundo real como en el virtual, tales como: el reconocimiento, la recompensa, el logro, la competencia, la colaboración, la autoexpresión y el altruismo. Para ello, utiliza distintos elementos que, junto a la estética del juego, crearan la experiencia del jugador o jugadora. Según Kevin Werbach (2012), los tres elementos son las dinámicas, las mecánicas y los componentes, y podemos verlos en una estructura piramidal, dependiendo si el elemento es táctico o conceptual. Las dinámicas son el concepto, la estructura implícita del juego. Las mecánicas son los procesos que provocan el desarrollo del juego y pueden ser de distintos tipos, tales como: a) mecánicas sobre el comportamiento (centrado en el comportamiento humano y la psique humana), b) mecánicas de retroalimentación (en relación con el ciclo de retroalimentación en la mecánica de juego) y c) mecánicas de progresión (acumulación de habilidades significativas). Los componentes son las implementaciones específicas de las dinámicas y mecánicas: avatares, escudos, puntos, colecciones, rankings, niveles, equipos, bienes virtuales, etc.... Hay unos componentes más populares que otros, siendo los principales los puntos, los escudos y las tablas de clasificación ó PBL. Dentro de las técnicas más utilizadas en gamificación mencionaremos, a la retroalimentación y recompensas, la monitorización, la presión social, la competición, el impacto y la oportunidad. Cabe destacar que los elementos no son el juego, lo que hace el juego es cómo están éstos elementos se entrelazan para conseguir que el jugador o jugadora se divierta.

Según el Observatorio del Instituto Tecnológico de Monterrey (2016), los elementos del juego que pueden aplicarse en un proceso de gamificación son los siguientes: metas y objetivos, reglas, narrativa, libertad de elegir, libertad para equivocarse, recompensas, retroalimentación, estatus visible, cooperación y competencia, restricción de tiempo, progreso y sorpresa (Figura 1).

Figura 1. Elementos del juego que pueden aplicarse en gamificación
Fuente: Observatorio del Instituto Tecnológico de Monterrey (2016)

Existen tres teorías sobre la motivación que son muy aplicadas en los juegos que son: la teoría del flujo de Csikszentmihalyi (1990), la teoría de la autodeterminación de Deci y Ryan (1985) y el modelo de Fogg (2009) sobre como influenciar el comportamiento humano (Figura 2). En este sentido, Csikszentmihalyi (1990) a través de su teoría de flujo aplicada al diseño de la gamificación nos permite el logro de una experiencia óptima. En el estado óptimo de flujo existe un equilibrio perfecto entre la complejidad de la tarea a realizar y las habilidades de los jugadores. Para que ésta experiencia óptima se produzca los jugadores deben conocer previamente los objetivos a alcanzar en la actividad, y deben suponerle un desafío con una complejidad que pueda ser alcanzada de acuerdo a sus destrezas. La dificultad en la tarea debe ir creciendo progresivamente de acuerdo al progreso en sus habilidades.

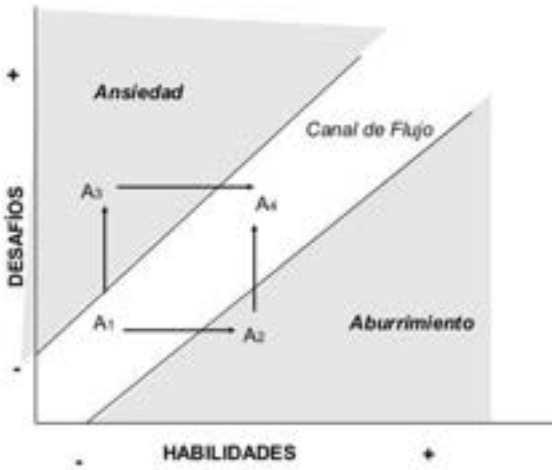


Figura 2. Canal del flujo. Relación entre la motivación intrínseca y extrínseca
Fuente: Csikszentmihalyi (1990)

En el caso de la Teoría de la Autodeterminación de Deci & Ryan (1985), la misma se relaciona directamente con el crecimiento personal y describe las necesidades básicas de las personas sobre: a) la autonomía o capacidad para tomar libremente sus propias decisiones, b) la necesidad social, o imperativo de relacionarse con los demás y ser reconocido socialmente, y c) la necesidad de ser competente o posibilidad de mejorar sus habilidades, conocimientos y destrezas. Algunas estrategias para promover la autodeterminación son: promover la retroalimentación positiva, promover metas orientadas al proceso, definir objetivos de dificultad moderada, dar alternativas para la toma de decisiones, explicar los objetivos y significados de la actividad, incentivar las relaciones sociales, utilizar recompensas, promover el desarrollo de experiencias óptimas (flujo), crear conciencia sobre el aprendizaje, entre otras.

En el caso del Modelo de Comportamiento Humano de Fogg (2009), se centra en estudiar las causas que influyen en las conductas y cómo se puede provocar el cambio de las mismas. Para Fogg, existen tres elementos clave: a) el disparador, o acción que dispare el comportamiento, b) la habilidad, o capacidad del usuario para poder desarrollar exitosamente la tarea y c) la motivación, o ganas de la persona de realizar voluntariamente la actividad propuesta. Esta teoría es especialmente aplicable si se desea cambiar hábitos o conductas a través de la gamificación. La fórmula aplicable es B = m*a*t, donde "B" es el comportamiento, "m" es la motivación, "a" es la habilidad y "t" es el disparador (Figura 3).

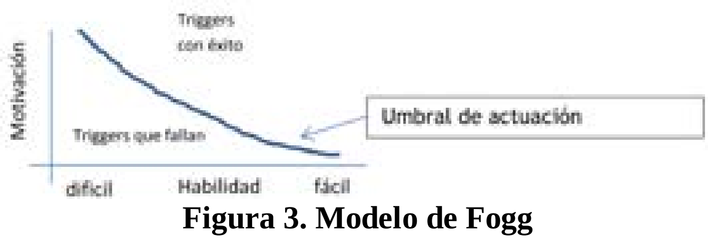


Figura 3. Modelo de Fogg
Fuente: http://www.behaviormodel.org

A la hora de diseñar una experiencia gamificada debemos considerar que la misma debe tener elementos que motiven a todos los tipos de jugadores, además, no existen perfiles únicos, sino que una persona puede tener características de diferentes perfiles de jugadores (Mora et al., 2015) (Figura 4).

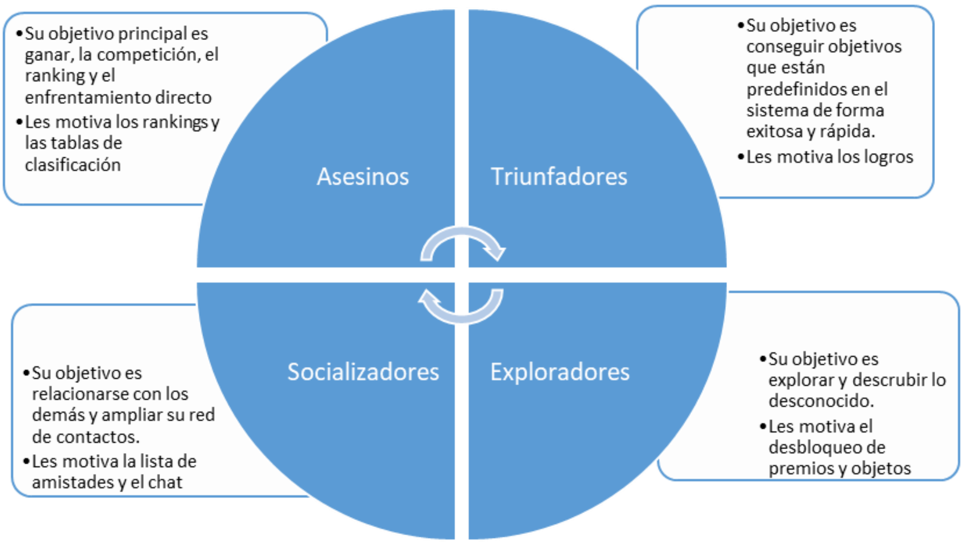


Figura 4. Tipos de jugadores según Bartle
Fuente: Elaboración propia adaptada de Bartle (1996)

También es importante el componente social, o lo que es lo mismo, el contar con otras personas con las que competir, colaborar y comparar logros. En el juego social, los objetivos pueden ser competitivos o colaborativos. Por ello, en juegos de equipo deben ser considerados por separado las mecánicas que influyen en el equipo (proyectos, puntuaciones de grupo, etc.), de las mecánicas que solo se aplican al individuo (motivación, el refuerzo positivo, etc.).

Por otra parte, es bueno seguir algunas pautas para la gamificación de actividades, tales como las siguientes (Area y González, 2015):

- *Experimentación repetida:* se debe permitir que el estudiante-jugador pueda realizar repeticiones de la actividad para alcanzar una meta.
- *Inclusión de ciclos de retroalimentación rápida:* proporcionar información inmediata que ayude a los estudiantes a mejorar su estrategia y tener una mejor oportunidad de éxito en el siguiente intento.
- *Adaptación de las tareas a los niveles de habilidad:* los buenos juegos ayudan a los jugadores a estimar de manera realista sus posibilidades de éxito, los diferentes niveles con objetivos adaptados a las habilidades de los estudiantes permiten mejorar su motivación.
- *Intensificación progresiva de la dificultad de las tareas:* ayuda a los estudiantes a mejorar sus habilidades y suponen nuevos retos.
- *División de tareas complejas en subtareas más cortas y simples:* esto ayuda a los estudiantes a hacer frente a la complejidad de la tarea.
- *Diseño de diferentes rutas hacia el éxito:* la planificación de diferentes formas de alcanzar los objetivos, como forma de personalización de las actividades.
- *Incorporación de recompensas y actividades de reconocimiento social* (por ejemplo, profesores y compañeros): ser recompensado y valorado promueve el estatus social de los estudiantes.

A continuación, se presenta un caso práctico de diseño gamificado de enseñanza aprendizaje combinando los elementos anteriormente señalados aplicados a una asignatura de 3er. Curso de Ingeniería Informática con 112 estudiantes en el ciclo 2020-2021 en la Universidad de La Laguna.

3. Experiencia de prendizaje inmersivo en entornos virtuales de aprendizaje gamificados con RV/RA

El objetivo principal de este trabajo es aumentar la motivación del alumnado, disminuyendo la tasa de abandono en la modalidad online y aumentando el rendimiento académico en la evaluación continua, mediante el uso de técnicas de gamificación en entornos online.
Para diseñar una experiencia de aprendizaje gamificada se deben primero, crear los recursos de aprendizaje. En este caso, se utilizaron videolecciones (grabadas en OBS, editadas en Shotcut y/o Camtasia). Las videolecciones fueron organizadas en Genial.ly. Se crearon vídeos interactivos en H5P. Se realizó la gamificación del aula virtual de Moodle utilizando la gestión de insignias, la barra de progreso y tabla de puntuaciones (Karma) semanales. Para las videoclases, se utilizó Google Meet como software de videoconferencia. Se realizaron dinámicas de grupos de discusión, con división de salas en Google Meet para colaboración, así como dinámicas gamificadas de grupos de discusión y competición basadas en el juego Among US en salas de Realidad Virtual y Aumentada en Mozilla Hubs, donde habían "impostores" elegidos al azar y "tripulantes" en cada grupo. Se realizaron juegos en las clases de videoconferencia introduciendo Alexa como dispositivo de voz (relacionado con una de las prácticas de la asignatura). Se utilizaron cuestionarios gamificados utilizando Quizizz. Se realizaron concursos con votaciones de los propios, de acuerdo con criterios previamente establecidos por la profesora, para valorar los mejores diseños (relacionados con otra de las prácticas de la asignatura).

Luego, se debe estructurar la experiencia en etapas e hitos que contengan las secuencias de aprendizaje que se deben aprender para superar cada hito o etapa. Al mismo tiempo, se debe realizar la planificación instruccional e indicar cuando se da por superado cada hito o etapa. Una vez que están definidas las etapas e hitos que el estudiante debe superar, se deben identificar cuáles estarán gamificados y cómo lo estará. Para ello, se deben considerar los siguientes recursos de gamificación (González y Mora, 2015):

- *Mecanismo de tracking:* cómo se medirá el progreso del estudiante;
- *Unidad de medida*: que determina el logro (puntos, tiempo, etc.); c) Nivel: cantidad de unidad de medida necesaria para lograr el nivel; d) Reglas: sobre lo que los estudiantes pueden hacer o no hacer en la actividad; e) Feedback: o refuerzos que el profesorado o compañeros darán al estudiante para que aprenda y vea su progreso.

Por ejemplo, el mecanismo de tracking pueden ser las entregas parciales realizadas por los estudiantes en los plazos de tiempo (unidad de medida) establecidos para cada una de ellas. Asimismo, cada tarea puede estar asociada al logro de puntos (unidad de medida), así como cada nivel tenía un máximo de puntuación (por ejemplo, en forma de rúbricas, de modo que los estudiantes podían valorar sus propios trabajos de acuerdo a las mismas). Además, se deben decir qué mecánicas se utilizarán, que pueden ser individuales (puntos, insignias, niveles, restricciones, etc.) o sociales (competición o colaboración, por ejemplo, una tabla de clasificaciones u objetos, entre otras mecánicas). Por ejemplo, se pueden utilizar mecánicas individuales (puntos por participación, recompensas en clase de distinto valor según puntuación) y mecánicas sociales de competición entre grupos y colaboración grupal (tabla de clasificaciones, recompensas grupales en forma de objeto virtuales), entre otras.

Para el desarrollo de la experiencia se ha seguido el siguiente procedimiento de gamificación en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tal y como se indica a continuación:

- Paso 1. Análisis de los usuarios y del contexto: para poder analizar a nuestros estudiantes, hemos realizado una primera encuesta para conocerlos, ver el punto de partida y también comprender sus expectativas de aprendizaje sobre el tema.

- Paso 2. Definición de objetivos de aprendizaje: Se han definido las competencias y los objetivos de aprendizaje para cada actividad a realizar en la asignatura y un apartado de evaluación que permite a los estudiantes saber si aprueban o suspenden la actividad en cuestión.

- **Paso 3: Diseño de la experiencia**: La experiencia se ha estructurado de forma progresiva y secuenciada semanalmente. Los contenidos, en formato audiovisual, se han ido desbloqueando progresivamente en función del tiempo de las restricciones de actividades diseñada en el aula virtual.

Las actividades se plantearon en forma de problemas y retos semanales que podían realizarse de forma sincrónica o asincrónica. En las clases en línea por videoconferencia se reforzaron los contenidos principales y se realizaron dinámicas de trabajo activas, como la división del grupo grande de la clase en pequeños grupos de discusión, con cuestionarios gamificados y concursos para la evaluación por pares de las soluciones creadas por los propios estudiantes.

- Paso 4: Identificación de recursos: Se identificaron las diferentes actividades e hitos que son gamificados en la experiencia de aprendizaje:

- *Mecanismo de seguimiento:* el progreso del estudiante en el aprendizaje se midió mediante puntos "karma" que se actualizaron y se mostraron en el aula virtual a través de una tabla de clasificación con diferentes colores por puntuación obtenida a través de las entregas parciales realizadas por los estudiantes en los períodos establecidos para cada uno y la asistencia a las clases en línea por videoconferencia. Además, se habilitó una barra de progreso en el aula virtual donde los estudiantes podían ver sus progresos actuales en la materia. También se entregaron diferentes distintivos por las actividades realizadas, que podían ser considerados en el aula virtual.
- *Unidad de medida:* las unidades de medida para determinar el logro fueron los puntos (por actividad realizada y cumplimiento de la evaluación continua), el nivel, por la cantidad de unidad de medida (puntos) necesaria para alcanzar el nivel de karma, las reglas, acerca de lo que los estudiantes pueden hacer o no para subir de nivel y obtener los puntos, y la retroalimentación dada por el profesor cada semana acerca de los progresos de los estudiantes en cada actividad.
  Entonces, podemos decir que el mecanismo de seguimiento fue la entrega parcial de los estudiantes en los períodos (unidad de medida) establecidos para cada uno de ellos. Cada actividad semanal se asociaba al logro de puntos (unidad de medida), y el nivel de karma tenía una puntuación máxima total y semanal que se actualizaba progresivamente.

Para elaborar la tabla de clasificación se ha considerado:

a) Asistencia a las videoclases - 40% del total (según tiempo de conexión, no se consideran las dos primeras clases por no tener datos de conexión del meet)
b) Entrega de problemas semanales - 60% del total

Los resultados darán 4 colores de karma:
1. Azul (vas muy bien, tus acciones serán recompensadas en la evaluación de forma generosa)
2. Verde (vas bien, tus acciones serán recompensadas en la evaluación)
3. Amarillo (no has dado todo tu potencial, pero puedes mejorar y tus acciones serán recompensadas en la evaluación)
4. Rojo (no has demostrado hasta ahora tu potencial, no recibirás recompensa en la evaluación)

Paso 5: Aplicación de los elementos de la gamificación: La mecánica establecida fue individual (puntos, insignias, niveles, etc.) y social (competencia y colaboración). Por ejemplo, la tabla de clasificación por nivel de Karma, el concurso Mockup con puntuaciones individuales, o la dinámica basada en Among US (en nuestro caso Among UX), donde competían por grupos y las recompensas eran para el grupo.

Los resultados de la experiencia muestran un alto nivel de compromiso de los estudiantes, así como un alto nivel de seguimiento de las actividades y del rendimiento académico en la evaluación continua de la asignatura.

4. Conclusiones

Aquí se ha visto cómo podemos hacer uso de los elementos y dinámicas de los videojuegos aplicados al ámbito educativo para poder producir experiencias inmersivas de enseñanza-aprendizaje, haciendo uso de diferentes herramientas. En particular, vimos un caso práctico donde se han utilizado varias herramientas, como H5P o Genial.ly para los contenidos interactivos y Google Meet y entornos VR/RA en Mozilla Hubs para las aulas virtuales y el debate, así como dinámicas de gamificación, en las que también utilizamos herramientas como Quizizz.

Asimismo, podemos afirmar que gamificar permite diseñar formas más efectivas de transmisión del conocimiento y recompensar al cerebro a través de la diversión y el descubrimiento de nueva información, aumentando además la fijación de éste conocimiento.

Finalmente, se espera que este trabajo pueda ser útil para cualquier docente que desea crear experiencias más significativas de aprendizaje combinando estrategias de gamificación, aprendizaje online e inmersivo.

5. Referencias Bibliográficas

Ansari, D., De Smedt, B., & Grabner, R. H. (2012). Neuroeducation–a critical overview of an emerging field. Neuroethics, 5(2), 105-117.

Area Moreira, M., & González, C. S. G. (2015). De la enseñanza con libros de texto al aprendizaje en espacios online gamificados. Educatio Siglo XXI, 33 (3 Noviembre), 15-38.

Cook, W. (2013) Training Today: 5 Gamification Pitfalls. Training Magazine. Recuperado de: http://www.trainingmag.com/content/training-today-5-gamification-pitfall

Csikszentmihalyi, M. (1990). Flow: The Psychology of Optimal Experience. Harper Collins.

Deci, E., & Ryan, R. M. (1985). Intrinsic motivation and self-determination in human behavior. Springer Science & Business Media.

Ferreira, C. P., & González, C. S. G. (2020, September). State of the Art of Business Simulation Games Modeling Supported by Brain-Computer Interfaces. In *Iberoamerican Workshop on Human-Computer Interaction* (pp. 243-252). Springer, Cham.

Fogg, B. J. (2009, April). A behavior model for persuasive design. In Proceedings of the 4th. international Conference on Persuasive Technology (p. 40). ACM.

González, C. S., & Blanco, F. (2008). Integrating an educational 3D game in Moodle. *Simulation & gaming*, *39*(3), 399-413.

González, C., & Area, M. (2013, July). Breaking the rules: Gamification of learning and educational materials. In *Proceedings of the 2nd. international workshop on interaction design in educational environments* (pp. 47-53).

González-González, C., & Blanco-Izquierdo, F. (2012). Designing social videogames for educational uses. *Computers & Education*, *58*(1), 250-262.

González-González, C., Toledo-Delgado, P., Collazos-Ordoñez, C., & González-Sánchez, J. L. (2014). Design and analysis of collaborative interactions in social educational videogames. *Computers in Human Behavior*, *31*, 602-611.

González, C. S. G. (2019). Combinando gamificación y microlearning como estrategias de innovación en entornos virtuales de enseñanza-aprendizaje. *Comunicación y Pedagogía: nuevas tecnologías y recursos didácticos*, (315), 39-45.

Green, C. S., & Bavelier, D. (2006). The cognitive neuroscience of video games. *Digital media: Transformations in human communication*, *1*(1), 211-223.

Mora, A., Riera, D., Gonzalez, C., & Arnedo-Moreno, J. (2015, September). A literature review of gamification design frameworks. In *2015 7th. International Conference on Games and Virtual Worlds for Serious Applications (VS-Games)* (pp. 1-8). IEEE.

Conferencia Central GTD-3.1

El detrás de escena en el diseño y la Resolución de Problemas Matemáticos

Marcel D. POCHULU
Universidad Nacional de Villa María
mpochulu@unvm.edu.ar

Resumen

Abordamos algunos desafíos por los cuales atraviesa la enseñanza de la Matemática y, en particular, para quienes tienen que enseñarla en los distintos niveles educativos. Los retos actuales presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan hoy a la clase de Matemática convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario. Esto nos lleva a cambiar el modo de pensar y actuar en la clase, y mucho más importante aún, lograr que los estudiantes logren tener una educación diferente y acorde a las demandas actuales.
En esta línea, presentamos algunas consideraciones y puntos de partida que nos ayuden a pensar en un enfoque diferente donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática. Esto implica que iniciemos un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera? y evitar la reproducción de modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa. La búsqueda de respuestas a estas preguntas llevará a descubrir vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos entre distintas ciencias o disciplinas. No obstante, es necesario que nos involucremos en los conocimientos y lógica de otros campos disciplinares, lo cual nos pone en la situación incómoda de no saber sobre las aplicaciones de la Matemática en carreras no matemáticas.

Palabras Clave: Diseño de problemas. Problemas contextualizados. Interdisciplinariedad. Modelización Matemática.

1. Enseñar Matemática en los tiempos actuales

La enseñanza de la Matemática plantea grandes desafíos para quienes tienen que enseñarla en los distintos niveles educativos. En tiempos pasados era suficiente que el profesor presentara un contenido, propusiera ejemplos y ejercicios similares para que resuelvan los estudiantes siguiendo pautas previamente explicadas y, finalmente, planteara algún "problema" de aplicación de lo trabajado (Rodríguez y Barreiro, 2018). Alsina (2007, p.85) expresa categóricamente que "gran parte del tiempo dedicado a la enseñanza de la matemática se dedica a la resolución de ejercicios rutinarios alejados de la vida cotidiana". Además, Chavarría y Hidalgo (2009, p. 140) sostienen que "nos olvidamos de llevar a nuestras aulas sencillas discusiones que permitan al estudiante valorar el esfuerzo que le demandó a la humanidad llegar a los resultados matemáticos a los cuales tenemos acceso con tanta facilidad".

Los retos presentados por las diversas ciencias o disciplinas llegan hoy a la clase de Matemática convertidos en problemas que plantean la necesidad de un abordaje interdisciplinario. Esto nos lleva a cambiar el modo de pensar y actuar en la clase, y mucho más importante aún, lograr que los estudiantes logren tener una educación diferente y acorde a las demandas actuales. No podemos seguir siendo profesores del siglo XIX enseñando una Matemática del siglo XVII a estudiantes del siglo XXI.

Al profundizar en los detalles de estas propuestas de enseñanza, advertimos que son necesarias capacidades y saberes que trascienden el propio campo de la Matemática. Por ejemplo, para el MECCT (2019, pp. 23-24) un profesor de Matemática debería contar con conocimientos interdisciplinarios que lo lleven a diseñar tareas para los estudiantes que implican:

> Comprender si es conveniente una oferta o promoción de venta de un producto; transitar barrios o ciudades desconocidas conservando la orientación; recalcular los ingredientes de una receta cuando cambia el número previsto de comensales; interpretar resultados de análisis médicos contrastando los valores en relación con los de referencia, los factores de riesgo, la esperanza de vida, etc.; tener una actitud crítica ante las informaciones presentadas en los medios de comunicación en formato de cifras o gráficos, distinguiendo opinión de proposición; manejar criterios confiables de generación y gestión de palabras clave y otros tipos de códigos de seguridad; entender facturas de consumo de servicios domésticos (electricidad, gas, agua, entre otras); comprender y explicar los motivos por los que todos los juegos de azar que involucran dinero han sido diseñados para que gane la banca y se arruine al jugador; decidir cuál es más conveniente entre distintos planes de crédito; conocer cómo se elaboran los índices económicos y sociales y analizarlos críticamente; estar mejor preparado para comprender conceptos de otras disciplinas: interés, velocidad, amortización, susceptibilidad, etc.; abstraer y generalizar de estas situaciones de la vida las relaciones, categorías y propiedades matemáticas que están involucradas.

Si nos pasamos al nivel universitario, la Secretaría de Políticas Universitarias realizó, en febrero de 2019, la convocatoria para el Programa Logros, línea de trabajo Enseñanza de la Matemática (EMA). El Programa Logros EMA expresa, en sus bases y que encontramos en SPU (2019), que es necesaria la actualización de la formación docente en didácticas innovadoras para la enseñanza de la Matemática, como parte de una alfabetización contextualizada de los estudiantes de diferentes disciplinas. Además, el documento expresa que no es posible sostener propuestas formativas que fueron originadas en el contexto del siglo XX para la formación de ciudadanos del siglo XXI. Por otra parte, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) decidió cambiar estructuralmente la formación de ingenieros en Argentina, proponiendo un enfoque de enseñanza que debe estar centrado en el estudiante y en contribuir al desarrollo de las competencias profesionales requeridas para cada carrera. Entre las razones de esta innovación en ingeniería se afirma que "el mundo cambió y sigue cambiando, y la sociedad actual exige más a la Universidad; no sólo exige la formación profesional (el "saber"), sino también, la dotación de competencias profesionales a sus egresados (el "saber hacer")" (CONFEDI, 2014, p. 9). Por consiguiente, es necesario formar a un ingeniero pensando en lo que efectivamente hace en su profesión, desde todas las asignaturas que conforman un plan de estudio de la carrera, proponiendo procesos de enseñanza y aprendizaje para que tiendan al desarrollo y evaluación de las competencias. Naturalmente la Matemática conforma el bloque de las ciencias básicas para ingeniería y no escapan a este pedido de formación.

Para las carreras técnicas del nivel superior no universitario de la Provincia de Córdoba, los diseños curriculares requieren la incorporación de prácticas formativas que apunten al perfil profesional de las mismas y desde cada espacio curricular. Nuevamente esto impone al profesor el desafío de diseñar clases de

Matemática que puedan hacer un aporte a un perfil profesional que puede ser distante al de su propia formación. Basta que pensemos en la formación de técnicos en Administración de Empresas, en Alimentos, en Agro-Bio-Economía, u otra orientación, donde las incumbencias profesionales implican actividades como: administrar los fondos y las finanzas, administrar la producción, realizar análisis de ensayos e interpretar sus resultados, entre otras.
Tales planteos, muchas veces fruto de largas discusiones entre especialistas de diferentes campos disciplinares o de resultados de investigaciones, ponen en escena algún tipo de condicionamiento didáctico-matemático que el profesor a cargo de una materia tendría que atender en su propuesta de enseñanza, ante los nuevos roles que le está imponiendo la profesión. A su vez, esto pone a la luz la necesidad, tanto a nivel secundario como superior, de que los profesores a cargo de una materia puedan adaptar y/o diseñar sus propuestas de enseñanza a los requerimientos académicos que reciben o les son impuestos desde las instituciones u organismos oficiales.
Pensar en cómo enseñar materias que están en la formación de otras profesiones o con enfoques diferentes a los que atravesaron los futuros profesores, requeriría transformarlas y reorganizarlas para hacerlas objeto para la enseñanza. Inicialmente rigen criterios epistemológicos, que responden a la organización lógico-conceptual de cada disciplina, pero se suman otros que fundamentalmente aportan a entender cómo plantear la enseñanza, teniendo presente a los destinatarios de ella. Esto nos lleva al planteo de un sinnúmero de interrogantes, con la intención de establecer algunas pautas o criterios que contribuyan a la formación y capacitación de profesores de Matemática. Entre ellos tenemos: ¿Cómo transformar la clase de Matemática para que responda a las necesidades de un mundo globalizado y de un mercado de trabajo flexibilizado cuyas demandas formativas mutan constantemente? ¿Cómo se podría confiar en el sentido de lo que enseñamos si lo que hacemos en las aulas está siendo profundamente cuestionado? ¿Qué cuestiones se podrían considerar desde la formación inicial de profesores para afrontar las nuevas tareas que impone la profesión? ¿Qué proceso debe vivir el profesor para que se apropie del saber matemático escolar y de su práctica para los diferentes contextos donde ejercerá la profesión? ¿Cuál es el proceso que debe vivir el saber matemático para que la visión del aprendizaje del profesor no esté centrada en objetos abstractos ajenos a la realidad, tal como ha ocurrido hasta el momento?

2. El Diseño de Problemas para la clase de Matemática

Muchos de los problemas actuales requieren ser abordados en una clase involucrando contenidos que suelen escapar a los que habitualmente trabajamos en la clase de Matemática. Sabemos que estas situaciones ponen a los profesores en la posición incómoda e inusual de no saber contenidos de otras disciplinas, o incluso de la propia Matemática cuando se requiere que sea aplicada. Al mismo tiempo hay que pensar que nos encontramos en una comunidad donde el profesor es un coordinador de los procesos de enseñanza y aprendizaje, y no quien tiene todas las respuestas. Asimismo, es necesario desterrar la idea de que el estudiante tiene que contar con todos los conocimientos matemáticos para abordar un problema, o que usará solamente métodos y algoritmos tradicionales enseñados en la escuela. Tampoco podemos ignorar la presencia de la tecnología que media la resolución de cualquier tipo de problema, y más aún, si pretendemos un enfoque unificado de la enseñanza de la Matemática.
Podemos ver que a lo largo de la historia existió una estrecha interrelación entre la Matemática y las demás disciplinas, las que deben ser retomadas en las clases actuales a través de la resolución de problemas, la interdisciplinariedad y la modelización como estrategia pedagógica. Además, ciencias como la Biología, Fisiología, Medicina, Agronomía, entre otras, demandan nuevas herramientas matemáticas que permitan un manejo más ágil de los datos experimentales. Esto supone la existencia de un grupo de disciplinas relacionadas entre sí y con vínculos previamente establecidos, donde se tiene que evitar el desarrollo de acciones aisladas, dispersas o segmentadas. De alguna manera, estamos ante una subordinación de las áreas del conocimiento a la percepción y comprensión del mundo. Pero, ¿es posible llegar a la inter-disciplina sin pasar por la disciplina? Andonegui (2004) plantea que la visión interdisciplinaria requiere que no se devalúe ni se mutile ningún conocimiento disciplinar, puesto que todos son necesarios, y al mismo tiempo, que no se levanten muros entre las distintas ciencias dado que ninguna de ellas es más relevante que las demás.
No obstante, la interdisciplinariedad no debe visualizarse como el proceso de utilizar a una disciplina como herramienta de la otra. Si bien es cierto que la Matemática tiene el papel de herramienta en muchas otras ciencias para la resolución de problemas, no puede ser concebido este proceso como interdisciplinariedad. Chavarría e Hidalgo (2009) sostienen que ignorar o despreciar las interrelaciones entre las ciencias, incluida actualmente la tecnología, alimenta una polémica estéril que se transfiere de forma inevitable al ámbito escolar. A su vez, es necesario que el cuerpo de profesores sea reflexivo ante las necesidades que tienen las

disciplinas y las herramientas que brinda la Matemática. Por ejemplo, si analizamos lo que acontece con problemas del mundo real pertenecientes a otras ciencias, advertimos que en general, parten de datos experimentales. Con ellos se buscan modelos matemáticos para describir las relaciones entre las variables y así poder pronosticar, predecir, estimar o anticipar comportamientos en el corto y mediano plazo. Eventualmente se presentan gráficas que muestran la relación entre las variables y en este caso, los nuevos recursos suelen ser un buen aliado. Estas temáticas, sin dudas, se encuentran insertas en la Matemática, pero ¿se abordan en una clase habitual dentro de una carrera no matemática o de formación general? ¿Qué está en el detrás de escena cuando diseñamos problemas para una clase?

Reflexionemos sobre lo que ocurre en una clase de Matemática de la actualidad. Imaginemos que nos situamos en un primer curso de Matemática donde se pretende considerar a las funciones como objeto matemático. Habitualmente el profesor suele partir de un modelo funcional previamente establecido y se preocupa por hacer y mostrar un análisis minucioso del comportamiento de la función, prescindiendo incluso de nuevas tecnologías (nuestro clásico análisis completo de una función). El estudio conlleva a determinar en forma algebraica, y con tediosos cálculos, máximos y mínimos locales, raíces, asíntotas, concavidad y convexidad de la curva, paridad, entre muchos otros objetos matemáticos. Posteriormente, procede a realizar un gráfico aproximado de la función y a mano alzada, con lápiz y papel. ¿Esto era lo que requería el campo profesional? Definitivamente no, pues no era la preocupación central de una disciplina no matemática hacer un gráfico de una función, la cual no se tiene en la mayoría de los casos o, si se tiene, se realiza fácilmente con un software. En consecuencia, existe un divorcio entre lo que requieren las diferentes ciencias y lo que está aportando actualmente la Matemática. Pero, ¿cómo iniciamos un diseño de un problema genuino para la clase de Matemática y en una carrera no matemática?

Es necesario pensar en un enfoque diferente donde se trabajen problemas reales del campo profesional en el que se inserta la Matemática, donde la modelización adquiere un rol protagónico. ¿Significa que no tenemos que pasar por la disciplina o debemos prescindir de contenidos centrales de la Matemática? No, pues podemos trabajar lo disciplinar desde la misma interdisciplinariedad, pero sí tenemos que revisar lo que estamos enseñando y la metodología empleada. Hace más de 30 años Santaló (1990) expresaba que teníamos que incorporar temas que se requieren desde las demás disciplinas, suprimiendo otros que quedaron obsoletos, pues de lo contrario, se lograría que los estudiantes se sientan poco atraído por las actividades del aula. Sin embargo, esto que planteaba Santaló sigue teniendo vigencia hoy en día y termina siendo una dificultad a sobrellevar en la formación matemática de muchas carreras universitarias no matemáticas.

Naturalmente que el foco de cada propuesta se enseñanza estará puesto en que los estudiantes aprendan algo matemático, pero los tiene que ayudar a tener pensamientos interdisciplinarios al resolver problemas complejos de la realidad. En consecuencia, cuando nos proponemos enseñar ciertos contenidos matemáticos, tendríamos que tener respuestas genuinas a los siguientes cuestionamientos:

> ¿Por qué son necesarios y se deben enseñar? ¿Qué tipo de problemas resuelven? ¿Con cuáles otros conceptos, operaciones, propiedades, definiciones, se lo asocian? ¿Qué tipo de argumentaciones se utilizan a propósito de los mismos? ¿Qué lenguaje representa y operativiza sus principales funciones y usos? ¿Qué contextos dejan al descubierto el o los significados que se pretenden generar? ¿Qué contextos ayudan a comprender diferencias y similitudes entre los objetos y otros vinculados a ellos? ¿Cuáles situaciones provocan cambios y evolución de significados de los objetos? ¿En qué contexto histórico y cultural aparecen los conocimientos matemáticos en cuestión? ¿Cómo contribuyen a la construcción y organización del saber matemático? (INFD, 2010, p. 122).

De alguna manera, responder estas preguntas nos ayudará a iniciar un proceso de cuestionamiento sobre el saber matemático y el saber matemático escolar, que se sintetiza al preguntarnos, ¿por qué debería enseñar este contenido?, ¿existen otras maneras de enseñarlo en este contexto y para esta carrera? y evitar que reproduzcamos modelos que seguramente estuvieron presentes en nuestra formación previa. La búsqueda de respuestas a estas preguntas nos llevará a descubrir vínculos que unen los fenómenos aparentemente inconexos entre distintas ciencias o disciplinas.

Pensamos que a través de la interdisciplinariedad se logran crear ambientes reales y actuales de estudio, con situaciones que pueden ser significativas para el alumno. Esto llevaría, si media un buen diseño, a que cada consigna de trabajo propuesta escape de los estándares que estamos acostumbrados para los problemas de Matemática, lo cual se materializa cuando no incluimos demasiados datos, ni los pasos a seguir o la manera en que debería hacerse la actividad. Entendemos que estas características hacen que una consigna se enmarque en lo que llamaríamos problemas no rutinarios, en tanto la información que se suministra o bien es

insuficiente o hay datos que sobran, no existe un único camino para abordarlos, se ponen en juego distintas estrategias de resolución, pueden existir varias soluciones o bien no tener solución alguna. A su vez, deberían estar diseñados para conjeturar y plantear hipótesis en un ambiente donde los nuevos recursos o TIC tienen un rol protagónico y el estudiante es el que encara la resolución.
En cuanto a las TIC, las asumimos como un recurso más de la clase y no el foco de la actividad matemática. No se trata de destinar una clase entera para trabajar con comandos específicos de un software, sino más bien, integrar las TIC para permitir la creación de una nueva Matemática y el surgimiento de una nueva cultura de aprendizaje. Esto conduciría, además, a cambiar el modo de pensar y actuar en la gestión de la clase, y mucho más importante aún, a conseguir que los estudiantes hagan cosas nuevas en Matemática, logrando tener una educación diferente o mejor gracias a la tecnología.
En estos contextos de diseño de problemas, una conjetura la entendemos como una proposición que tendrá que formular el estudiante y se prevé verdadera, pero que está pendiente de ser sometida a examen (aceptación o rechazo). Si la conjetura es aceptada, debe conducir a procesos de argumentación y validación matemáticos apropiados. Consideramos valioso que cada consigna pueda admitir diferentes posibilidades de exploración y argumentación porque le permitirá al estudiante tomar decisiones, organizar sus intentos o modos para abordar la resolución, recurrir a heurísticas o utilizar distintas habilidades generales matemáticas, reflexionar sobre sus intentos para sostenerlos o descartarlos, establecer una manera de explicar el porqué de la respuesta y validar las conjeturas que emergen del proceso. Todo este proceso se asimila al trabajo del matemático y legitima el tipo de actividad que se espera realicen los estudiantes cuando aprenden matemática.
Sabemos que una preocupación frecuente de los profesores es la "contextualización de la situación problema", donde se introducen los principales tópicos no matemáticos que la enmarcan. Entendemos que un estudiante debería acceder a estos contenidos buscando información al respecto, lo que implica hacer una selección de las variables adecuadas, la relevancia de las mismas, la exactitud de los datos y la confiabilidad de las fuentes. Si todos los datos son suministrados con el problema, se coarta la formación de estudiantes con pensamiento crítico para la búsqueda de información. Tampoco es lógico pensar que el trabajo de búsqueda de información sea tarea exclusiva del alumno. Lograr que los estudiantes encuentren información adecuada en la maraña de la web no es un trabajo menor para los profesores, pues Internet no puede ser considerado solo como un sitio de consulta.
Teniendo el diseño de un buen problema para la clase de Matemática, sabemos que no es suficiente para que logre desafiar cognitivamente a los estudiantes. Es necesario que se modifique sustancialmente el rol del profesor en la gestión de la clase, lo cual tiene una alta complejidad para que se produzca el cambio, pues implica enseñar de una manera diferente a la que se fue formado. Para ello, sería oportuno que gestione la resolución de cada situación problema teniendo en cuenta los criterios que establecen Barreiro, Leonian, Marino, Pochulu y Rodríguez (2017):

- Ante los cuestionamientos de los alumnos, evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta/respuesta del estudiante,
- Intervenir desde la lógica que siguió el estudiante y no desde la que el docente tiene pensada la resolución experta del problema,
- Estimular en el estudiante el desarrollo de estrategias de autocontrol y validación del conocimiento matemático,
- Evitar realizar intervenciones solamente cuando lo que el estudiante hizo está mal,
- Pedir explicaciones incluso cuando la respuesta dada por el estudiante sea correcta.

Como mencionamos, este modo de gestionar la clase tiene por propósito alentar los procesos de argumentación y que los estudiantes puedan conjeturar, demostrar y validar. A su vez, se busca que sea el estudiante quien llegue al conocimiento a través de sus propias conclusiones y no por medio de un conocimiento aprendido, buscando trascender las clases tradicionales de Matemática donde el protagonismo lo tiene el profesor a través de clases magistrales.

3. Consideraciones Finales

Consideramos firmemente que existen otras formas de trabajar y hacer Matemática en el aula, además de la tradicional en la que nos formamos la mayoría de los profesores. Los profesores no aprendemos a desarrollar buenas clases si replicamos malos modelos y, en este sentido, es necesario apoyarnos en los desarrollos de la Didáctica de la Matemática para fundamentar las propuestas de enseñanza y aprendizaje.
Para el diseño de situaciones problemáticas genuinas es necesario tener presente el contexto y los destinatarios de lo que estamos enseñando. Incorporar la modelización matemática en la enseñanza nos

aproxima a los campos profesionales de las carreras y no se descuidan los contenidos de Matemática, que suelen ser una preocupación central de los profesores. No obstante, es necesario que nos involucremos en los conocimientos y lógica de otros campos disciplinares, fundamentalmente cuando impartimos clases en carreras no matemáticas o brindamos una formación matemática general.

Por último, el foco de un buen diseño de una buena clase se encuentra en cuestionar el contenido y cómo enseñar, pues ayudará a trascender las clases habituales de Matemática y brindar a los estudiantes otras alternativas de enseñanza y aprendizaje que logren mejorar las vivencias por las que atraviesan en su formación.

4. Referencias Bibliográficas

Andonegui, M. (2004). Interdisciplinariedad y educación matemática en las dos primeras etapas de la educación básica. *Educere 8(26)*, 301-308.

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en Educación Matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana de Educación, 43,* 85-101.

Barreiro, P.; Leonian, P.; Marino, T.; Pochulu, M. y Rodríguez, M. (2017). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* Los Polvorines, Argentina: Ediciones UNGS.

Chavarría, J. e Hidalgo, R. (2009). La historia e interdisciplinariedad en la Educación Matemática: Una experiencia con profesores de secundaria. *Cuaderno de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4(5)*, 139-154.

CONFEDI (2014). *Competencias en ingeniería*. Mar del Plata, Argentina: Universidad FASTA.

MECCT. (2019). *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en matemática*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología.

Rodríguez, M. y Barreiro, P. (2018). Modelización y resolución de problemas. En M. Pochulu (Coord.), *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones (pp. 17-26)*. Villa María, Argentina: GIDED - UNVM.

Santaló, L. (1990). *Matemática para no matemáticos*. Conferencia inaugural del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla, España.

SPU (2019). *Convocatoria piloto programa Logros: línea de trabajo Enseñanza de la Matemática (EMA) – Anexo I*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Secretaría de Políticas Universitarias.

<u>Conferencia Central GTD-3.2</u>

La Modelización Matemática y la Resolución de Problemas en Diálogo

Mabel RODRIGUEZ
Universidad Nacional de General Sarmiento
mrodri@campus.ungs.edu.ar

Resumen

En esta presentación, la intención es proponer similitudes y diferencias entre la resolución de problemas y la modelización matemática en el ámbito de la enseñanza de la matemática.
Cada una de ellas, por su parte, hoy en día tiene un espacio reconocido como campo de estudio en la Educación Matemática. Se han acuñado términos y conceptos que son propios a cada una y tienen desarrollos que permiten sostener que su utilización en clases promueve el aprendizaje significativo de la matemática. Sin embargo, advertimos que el uso del término *problema* no siempre se hace con el significado que en este enfoque se promueve. De un modo análogo, se mencionan actividades de *modelización matemática* que no se enmarcan en la perspectiva teórica. Estas interpretaciones podrían generar confusión en quienes no estén adentrados en los posicionamientos de cada una de las líneas.
Iniciamos el escrito haciendo mención a rasgos sustantivos de la Resolución de Problemas y poniendo énfasis en el planteo de problemas, como parte del enfoque. Luego, mencionamos características de la Modelización Matemática para finalmente mencionar, específicamente en el contexto educativo, cuestiones comunes, diferencias y potencialidades de ambas.
Un trabajo en las aulas que incluya alguna de estas perspectivas podría favorecer un cambio sustantivo en la imagen negativa de la matemática que, mayoritariamente, los estudiantes tienen construida.

<u>Palabras Clave</u>: Resolución de Problemas. Planteo de Problemas. Modelización Matemática.

1. Introducción

La intención de esta presentación es poner en diálogo la Modelización Matemática y la Resolución de Problemas en el sentido de establecer similitudes y diferencias tanto en sus conceptualizaciones y alcances, como en los posibles usos para enseñar matemática.
Hoy en día, y ya desde hace años, en Argentina los diseños curriculares de matemática del nivel secundario enfatizan en la necesidad de que los estudiantes resuelvan problemas y modelicen situaciones. Expresiones como las siguientes se encuentran comúnmente en documentos ministeriales.

> Hacer matemática es, básicamente, resolver problemas, ya sea que provengan del interior o del exterior de la misma. En tercer año, la resolución de problemas y el posterior análisis de lo realizado, continuará ocupando un lugar central en la actividad matemática del aula. (DCE, 2009, p.23)

> Se propondrá continuar profundizando el concepto de función y su expresión en lenguaje simbólico, así como el análisis de la relación entre la función como modelo matemático y las situaciones que modeliza, mostrando los alcances y restricciones del modelo en relación con las situaciones. (DCE, 2009, p.62)

Entre las prácticas involucradas para distintos contenidos, figura en el mismo documento “Modelizar situaciones geométricas y extrageométricas haciendo uso de los conocimientos disponibles y reflexionando sobre la adaptación de los mismos para producir nuevo conocimiento” (p.38).
Diseños curriculares como el de Chubut, plantean de manera articulada la modelización y la resolución de problemas, como la siguiente referencia permite advertir.

> […] la modelización adquiere centralidad en la resolución de problemas toda vez que las soluciones devienen de la identificación del modelo matemático que resuelve. La modelización tiene lugar en la resolución cuando resolver implica encontrar y expresar el modelo matemático que permite recortar una parte de la realidad y operar sobre ella. (MEC, 2014, p.5)

Se podrían sumar múltiples referencias de distintas provincias argentinas, sin embargo, es valioso resaltar que esta perspectiva se extiende más allá de nuestro país. Sólo a modo de ejemplo, mencionamos que el Ministerio de Educación y Ciencia de Paraguay propone como enfoque didáctico la Resolución de Problemas (Polya, 1965) como puede verse en apartados teóricos de documentos curriculares (MEC, 2016a; MEC, 2016b; MEC 2016c).
En estos planteos se puede vislumbrar cómo cada país enfatiza y promueve la importancia de formar estudiantes del nivel secundario que tengan posibilidades de resolver y plantear problemas así como de modelizar matemáticamente situaciones.
De este modo, encontramos que, por un lado el hecho que los países postulen estas perspectivas permite explicar la importancia que se le da a estas temáticas en el campo de la Educación Matemática. Pero, por otra parte, los resultados de trabajos de investigación en esta área brindan evidencias sobre el valor formativo de estos enfoques, logrando incidir en decisiones curriculares. Esto muestra una situación cíclica que se retroalimenta.
A partir de este encuadre, en este escrito proponemos la siguiente organización. En primer lugar, ofrecemos algunas consideraciones sobre el enfoque de Resolución de Problemas dando un lugar protagónico al *planteo de problemas*, como aspecto clave de esta perspectiva. Luego, dedicamos una sección a consideraciones sobre la Modelización Matemática. A partir de esclarecer estos puntos de partida, y como cierre, generamos el diálogo prometido entre ellas.
Vale aclarar que ambas nociones y líneas tienen vastos desarrollos, con mucha producción y matices en definiciones y alcances. Este artículo no tiene pretensión de exhaustividad en ningún aspecto y los rasgos que elegimos para compartir son los que, en alguna medida, nos permiten proponer la mirada que queremos presentar.

2. Sobre la Resolución de Problemas

Si pretendemos resaltar cuestiones centrales del enfoque de Resolución de Problemas, sin duda debemos mencionar algunos elementos teóricos que en esta línea son clave, pero entendemos que lo más difícil de asumir -y en breve detallamos sobre esto- es cuál es su perspectiva. Un docente que asuma este enfoque para el trabajo con sus alumnos, lo mínimo que estará pretendiendo es que sus estudiantes puedan resolver problemas matemáticos, se conviertan en buenos resolutores, adquieran herramientas para encararlos, sean capaces de reconocerlas, usarlas ante otras situaciones y hayan reflexionado sobre este proceso de modo que les resulte consciente. Decimos *lo mínimo que estará pretendiendo*, porque podría pretender que no solo resuelva problemas que le son dados, sino que sea capaz de *plantear problemas*. En esta sintética descripción del foco de la línea, el contenido matemático está presente, siempre, pero *no condiciona la elección de los problemas*. Esto significa que el docente no piensa primero en un contenido matemático, para luego diseñar o buscar problemas que lo pongan en juego. El proceso de diseño o elección de problemas es completamente diferente, hasta podríamos decir que funcionaría de manera opuesta a lo recién mencionado. Para comprender por qué ocurre esto, vamos a recordar -o presentar- características centrales del concepto de *problema para un sujeto*. Para que una cierta consigna, actividad, situación, resulte un *problema para un sujeto*, deben darse tres condiciones: tener datos y una meta, que haya un sujeto que será el resolutor y, una cuestión insoslayable: que la actividad le produzca un bloqueo inicial que no le permita, inmediatamente, saber cómo resolver o encarar la resolución. La presencia del sujeto y que el concepto sea *problema para un sujeto* (y no solo *problema*, aunque por abuso de lenguaje nos referimos de este modo usualmente y en este texto, en particular) es lo que anticipa que el bloqueo no operará igual ante diferentes personas. Podría efectivamente generar bloqueos a algunos, y no a otros, por lo que la actividad sería problema para algunos y no así para los otros. Para quienes quieran ampliar sobre cómo manejar esto en clases, sugerimos Barreiro y Leonian (2017) y Ponce de León, Rodríguez, Barreiro y Leonian (2020). Es a partir de ese bloqueo que surgen los intentos por resolver, las búsquedas, las estrategias (que en enfoque se denominan las *heurísticas*) la reflexión sobre cómo capitalizar lo trabajado ante otras situaciones (*metacognición*), etc. Estas cuestiones serían aquellas que el docente está promoviendo que sus estudiantes aprendan. ¿Y los contenidos? Responderíamos: los que decida poner en juego el sujeto para resolver. Como el foco está puesto en el desarrollo de las heurísticas y los procesos metacognitivos que le permiten controlar su accionar, así como reconocer estrategias que podrían serle útiles ante otros problemas, la formulación de problemas no está regida por los contenidos que se deberán utilizar. Parte de lo que el sujeto tendrá que decidir es cuáles contenidos matemáticos seleccionar al abordar el problema.

Entonces, volvamos unos párrafos atrás para pensar por qué decíamos que lo más difícil de asumir es la perspectiva en la enseñanza. Esto se debe al lugar que se le da al contenido en algunas propuestas de enseñanza que declaran enmarcarse en esta línea. Si un docente expresa su adhesión a esta perspectiva, pero a continuación elige el contenido matemático a enseñar, diseña actividades y evalúa el contenido, no estaría en concordancia con lo esperado aquí. Del mismo modo, si el programa de una materia o un libro declarativamente se enmarcan en Resolución de Problemas pero presentan unidades de contenidos de tipo conceptual (más allá de la denominación, que no es el foco aquí), habría una disparidad respecto de esta perspectiva.

Aunque hay muchos más matices, esperamos que esta breve síntesis permita entender lo que se espera al trabajar bajo la Resolución de Problemas cuando efectivamente lo que recibe el sujeto es *un problema para resolver*.

Queremos mencionar que se accede a bibliografía en la que el término problema es utilizado con otros significados. Cuando su uso está enmarcado en otra línea de Educación Matemática, allí se le asignará el significado que se le otorga y esto no debería causar problemas. Las dificultades surgen cuando no se define y la interpretación queda a cargo del lector. Se encuentran, así, escritos en donde se denominan *problemas* que, desde esta perspectiva, estarían lejos de serlo o se asocia el término a enunciados dados en lengua natural, más allá de si la resolución es inmediata, el contenido es sabido, etcétera.

Más allá de la advertencia del párrafo anterior, que nos obliga a tener cuidado cuando accedemos a bibliografía, queremos focalizarnos, en lo que resta de esta sección, en la situación en la que el sujeto debe *plantear un problema* que luego intentará resolver.

El propio nombre de la línea -Resolución de Problemas- no favorece el hecho de concebir el planteo de problemas como parte de ella, aunque lo sea desde sus inicios. Al respecto, Polya (1965) consideraba que el trabajo intelectual del matemático naturalmente incluía el planteo y estudio de problemas propios. En el marco de la enseñanza, se considera que, tanto la resolución como el planteamiento de problemas brindan información sobre los conocimientos adquiridos por los estudiantes y su uso, aunque el segundo suma complejidad cognitiva y requiere mayor nivel de abstracción (Silver, 1994).

La realidad muestra que la mayoría de los estudiantes no se convertirá en matemáticos profesionales, por lo que Blum & Niss (1991) sostienen la importancia de prepararlos para resolver problemas y resaltan que

plantear problemas es una estrategia didáctica que persigue tal fin. Este es un modo de resaltar la importancia del planteo de problemas en clases de matemática.
Una cuestión muy interesante de considerar es que el planteo de problemas puede ocurrir, intencionalmente de mano del docente cuando presenta una actividad inicial en la que se promueve explícitamente la búsqueda y planteo de problemas. También puede ocurrir que, una vez terminado de resolverse un problema, se modifiquen condiciones, datos, hipótesis que plantean nuevas preguntas. Esto último podría ser promovido y por intervención docente, o podría surgir de inquietudes del alumno. Finalmente, durante la propia resolución de problemas, se podrían generar otros, o bien porque se advierte la necesidad de obtener resultados parciales que podrían ser usados en la solución del problema inicial o también porque las reformulaciones del enunciado inicial, de mano de estudiantes, es considerado en la literatura, el planteamiento de un nuevo problema.
Por último, no queremos dejar de mencionar que, en este enfoque el sistema de creencias del sujeto tiene mucha incidencia en su desempeño, cuestión que se advierte de un modo marcado en el aula. Este sistema incide en el comportamiento del estudiante en función de su perspectiva sobre la matemática y el trabajo en clase.

3. Sobre la Modelización Matemática

Desde la Educación Matemática se han venido investigando formas de modificar la enseñanza para favorecer un aprendizaje que les permita a los estudiantes conocer las potencialidades de los conocimientos matemáticos para comprender el mundo real, además de uso en la propia ciencia. Relacionar la matemática con la cotidianeidad, conocer alcances y limitaciones de ello, aprender el modo en el que ésta es utilizada para dar diferentes respuestas, etcétera, permite consecuentemente que su utilidad esté fuera de discusión. La promesa de "más adelante se verá para qué sirve lo que estudiamos hoy" no ha convocado ni motivado a los estudiantes en clases y ese futuro, cada vez más alejado, nos hace perder las oportunidades de plantear un trabajo diferente hoy, ahora.
La modelización matemática es considerada como un proceso que toma como punto de partida una situación real (o fenómeno de la realidad) que se pretende estudiar matemáticamente para, con las herramientas de esta ciencia, obtener información para comprenderla, controlarla, manipularla, predecir comportamientos, etcétera.
Diversos autores han propuesto fases que se transitan, con avances y retrocesos y de un modo no lineal, durante el trabajo de modelización de una situación real (Falsetti & Rodríguez, 2005; Pochulu, 2018; Villa-Ochoa, 2007). Más allá de distintos matices, en general se comparte que hay un primer momento de comprensión de la situación, elección de variables, establecimiento de supuestos e hipótesis y búsqueda de información con la finalidad de simplificar la situación para poder abordarla con recursos matemáticos. Cuando esto es posible, el planteo matemático de la situación que ya fue simplificada es el denominado *modelo matemático* cuyo estudio se realiza con herramientas de la ciencia. En ese momento el trabajo se desprende momentáneamente de la situación que dio origen al modelo hasta obtener respuestas matemáticas que son, finalmente, cotejadas con la realidad. Esta verificación intenta someter a un juicio criterioso si los resultados del tratamiento matemático vueltos a poner en relación con el fenómeno inicial podrían ser factibles. En caso de no serlo, se reinicia el circuito, se cambian las variables, o se las ajusta y se busca el establecimiento de un nuevo modelo.
Seguramente resulte claro que, ante una misma situación inicial, no hay un único modelo posible de ser formulado y el análisis de la adecuación, o la comparación entre ellos son asuntos que suelen ser de interés, muchas veces para matemáticos o para otros interesados en lograr mejores descripciones de la realidad.
En esta situación, el uso de las tecnologías de la información y comunicación (TIC) pasa a tener un rol clave. Por un lado, para la búsqueda de información, y por otro para el estudio matemático del modelo. Pueden consultarse, por ejemplo, Villarreal, Esteley & Mina, 2010; Villarreal y Mina, 2020; Pochulu, 2018.
Cuando se analiza lo que ocurre en clases de matemática, la realidad es un tanto diferente. Mayoritariamente, a nivel secundario, en Argentina, no se generan condiciones para que los estudiantes vivencien el proceso de modelización matemática, sino que, a lo sumo se parte de un modelo matemático ya diseñado. Se le da al estudiante el modelo y su tarea es estudiarlo matemáticamente. Este recorte de las fases iniciales le hace perder el sentido del trabajo, quedando nuevamente sin posibilidad de tomar decisiones y utilizar autónomamente la matemática que le permitiría encarar la comprensión y resolución de una situación.
Terminamos esta sección mencionando que los enfoques didácticos como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Barquero, 2009) conciben toda actividad de estudio como una actividad de modelización

matemática, incluso hacia el interior de la matemática misma. Aunque valoramos estos aportes y enfoques, señalamos que en lo que sigue nos referimos a la modelización de situaciones asociadas a fenómenos reales, como hemos descripto inicialmente.

4. La Resolución de Problemas y la Modelización Matemática en Diálogo

En esta sección nos ubicamos en el ambiente escolar para para poner en diálogo ambos conceptos.
Mencionamos algunas similitudes, diferencias y consideraciones entre ambos conceptos.

- *Plantear la modelización de una situación real es plantear un problema.*
  Si consideramos todas las fases de la modelización -desde la comprensión inicial hasta la verificación de factibilidad de la solución matemática del modelo- estaremos ante un problema para los estudiantes. Es una formulación que genera un bloqueo inicial. Por una parte, rompe con enunciados que tienen -de manera autocontenida- todos los datos requeridos para su resolución, y por otra parte, porque no hay un camino que pueda anticiparse para resolver la situación. Podemos pensar que hay una inclusión de "las actividades de modelización" en "los problemas".
- *No todo problema es una actividad de modelización.*
  Este punto podría resultar inmediato. Sería considerar si la otra inclusión, del ítem anterior, podría ser válida. Resulta que no necesariamente lo es. Es decir, no todo problema es necesariamente una actividad de modelización de una situación real. Basta considerar problemas intra-matemáticos.
- *Tanto la resolución de problemas como la modelización podrían trabajarse en clases de manera transversal a los distintos contenidos conceptuales.*
  Esto requiere un diseño y planificación de la enseñanza que articule propósitos y objetivos, pero habilita aprendizajes de otra naturaleza en los estudiantes.
- *Modelización matemática y problema son términos que suelen ser malinterpretados.*
  Se encuentran actividades denominadas problema que no lo son, no generan bloqueo, están centrados en contenido y muchos se encuentran en listados con planteos análogos. Por su parte, se encuentran consignas para modelizar que ya ofrecen un modelo matemático, ocultando el proceso que le dio origen y quitando de la actividad del estudiante, las primeras etapas del trabajo. También se encuentra el uso de problemas o de modelizaciones como motivación o como aplicación. Esto suele darse en el marco de clases tradicionales donde: se expone un contenido, se dan ejemplos y al final se presenta un "problema" o una actividad "de modelización" que es resuelta por el docente. También se ve el mismo esquema, pero con una instancia inicial de motivación. Es decir: el docente presenta una situación inicial motivadora, la deja a un lado por falta de herramientas, expone, da ejemplos y la retoma al final para resolverla.
- *Ambos enfoques ameritan incluir un espacio de trabajo de tipo metacognitivo*
  Luego del proceso de modelización o de la resolución de problemas es deseable que el estudiante tenga ocasión de reflexionar y pasar a un plano consciente sus aprendizajes, recursos, estrategias, etcétera. Esto puede generarse por medio de intervenciones docentes apropiadas.
- *Los objetivos que se persigue que los estudiantes logren, en una y otra perspectiva, son cognitivamente exigentes.*
  La riqueza matemática del trabajo que realizarán los alumnos, la toma de decisiones, necesidad de argumentar, búsqueda de caminos, de información, etcétera, son requeridos en ambas perspectivas y son elementos que imprimen exigencia cognitiva en los estudiantes.
- *El planteo de problemas, como parte de la resolución de problemas ofrece un campo sumamente rico para habilitar el planteo de problemas de modelización matemática.*
  El trabajo con situaciones reales podría favorecer actividades de planteamiento de problemas con el beneficio de capitalizar los aprendizajes para la propia resolución de problemas, como hemos mencionado, pero a la vez para poner en juego la matemática para comprender aspectos de la realidad.
- *Ambos enfoques son apropiados para acercar a estudiantes de nivel superior a sus campos profesionales.*
  Los estudiantes de nivel superior se forman para poder abordar problemas específicos de su profesión. Los problemas y las situaciones de modelización permiten acercar, durante la formación inicial, el tipo de trabajo que enfrentarán una vez graduados, a la vez que aprenden matemática y confirman el interés por su campo. Pueden verse ejemplos en Pochulu, 2018.
- *El uso de TIC es imprescindible en la modelización matemática, no así en la resolución de problemas, aunque las TIC permiten visualizar relaciones que dan lugar a planteos de problemas.*

> Así como hoy en día se accede a información en Internet y las nuevas tecnologías se utilizan naturalmente para abordar fenómenos reales, en la resolución de problemas las TIC abren un espacio sumamente valioso para establecer conjeturas y explorar relaciones matemáticas. Esto queda en el plano de las conjeturas dando lugar al planteo de problemas. Aunque no sea imprescindible, la riqueza que pueden sumar al habilitarlas hace que sea deseable que el docente lo considere a priori.

El camino por recorrer, tanto en un enfoque como en el otro, permitirá generar cambios en la imagen de la matemática (Ernest, 2000) en los estudiantes, permitiéndoles un acercamiento a vivenciar la creación, el trabajo matemático, la temporalidad y lo humano que muchas veces la matemática escolar, oculta.

Referencias Bibliográficas

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

Barreiro, P. y Leonian, P. (2017). Metacognición en clases de Matemática: un aporte para la enseñanza. *Revista Épsilon, 97*, 43-56.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects: state, trends and issues in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 37-68.

Dirección General de Cultura y Educación de la Provincia de Buenos Aires. (2009). *Diseño curricular para la educación secundaria. 3º año. Matemática* DCE. http://abc.gob.ar/secundaria/sites/default/files/documentos/dc_ter1_08_cs_matematica.pdf.

Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas*, 1-16.

Falsetti, M. & Rodríguez, M. (2005). A proposal for improving students' mathematical attitude based on mathematical modelling. *Teaching Mathematics and its Applications*. *24*(*1*), 14-28.

Ministerio de Educación de Chubut. (2014). *Diseño Curricular de Educación Secundaria. Matemática.* MEC. https://www.chubut.edu.ar/descargas/recursos/secundaria/Dis_curricular/Matematica.pdf

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016a). *Guía didáctica para docente. Matemática. 1° curso*. MEC. https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13209.

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016b). *Guía didáctica para docente. Matemática. 2° curso*. MEC. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13210.

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016c). *Guía didáctica para docente. Matemática. 3° curso*. MEC. https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13211.

Pochulu, M. D. (2018). La modelización en matemática: marco de referencia y aplicaciones (1ª ed.). GIDED. https://www.researchgate.net/publication/323995028_La_Modelizacion_Matematica_Marco_de_referencia_y_aplicaciones.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, México. [Versión en español de la obra How to solve it publicada por Princeton University Press en 1945].

Ponce de León, B., Rodríguez, M., Barreiro, P. y Leonian, P. (2020). Gamas de problemas: análisis a priori, https://www.researchgate.net/publication/346474455_GAMAS_DE_PROBLEMAS_ANALISIS_A_PRIORI.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing, *For the Learning of Mathematics*, *14*, (*1*), 19-28.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, *19*, 63-85.

Villarreal, M. y Mina, M. (2020). Actividades experimentales con tecnologías en escenarios de modelización matemática, *Bolema*, *34*(*67*), 786-824.

Villarreal, M., Esteley, C. & Mina, M. (2010). Interplay between modeling and information and communication technologies. *The International Journal of Mathematics Education*, *42*, 405-419.

Disertación Invitada GTD-3.1

El tiro libre en baloncesto: ejemplo de Modelización Matemática

Fabio MILNER

Arizona State University
Estados Unidos de Norteamérica
fmilner@asu.edu

Resumen

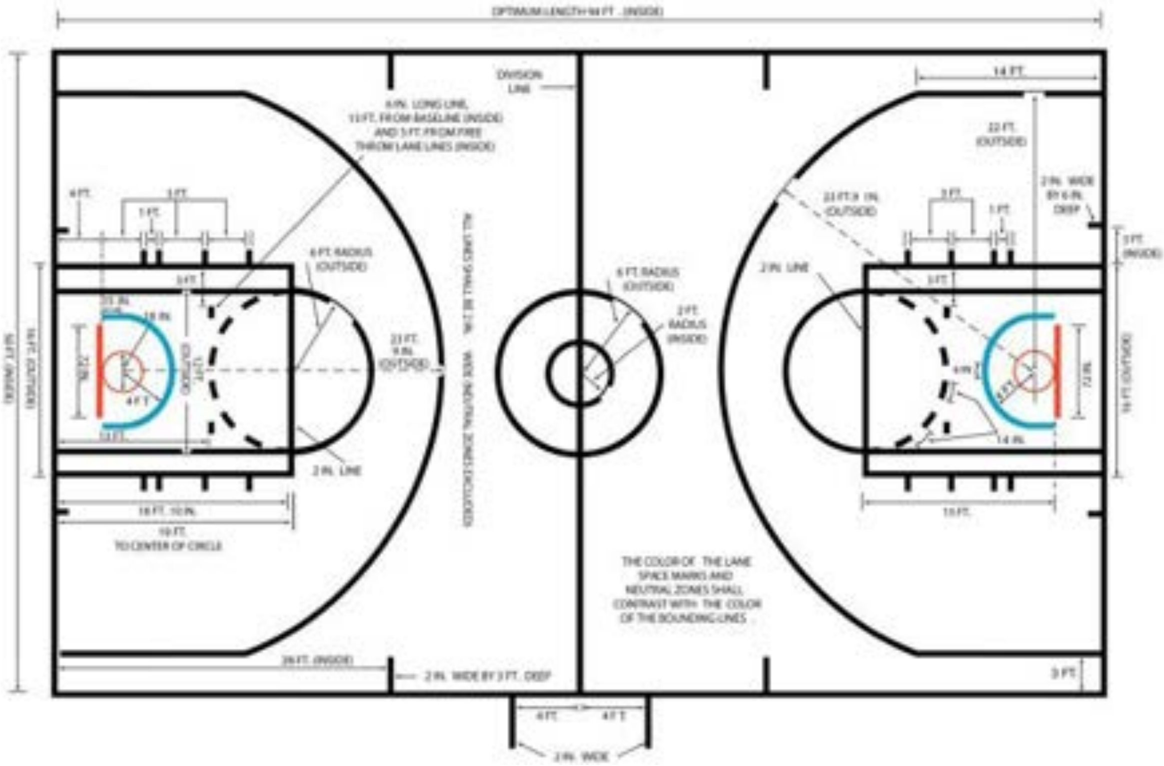
Aquí se propone una pregunta que comienza con "¿Por qué es difícil…?" para plantear en un taller de desarrollo profesional de maestros o profesores de escuela media o secundaria para estimular el pensamiento crítico y la habilidad de resolver problemas a niveles variados de preparación. En primer término, se discute la importancia de las definiciones en sentido lingüístico y luego se señala el riesgo de caer en razonamiento circular cuando se confunde la intención del *por qué* como una invitación a explicar la causa de algo con la simple verificación de que la situación propuesta verifica el significado asignado al adjetivo *difícil*. Luego se pasa a examinar posibles causas basando las conclusiones en márgenes de error de tres cantidades físicas relevantes en el tiro libre del basquetbol, a saber: la desviación lateral de la línea que une el punto de lanzamiento de la pelota con el centro del aro, la velocidad del lanzamiento y el ángulo de elevación del lanzamiento. Se señala finalmente el hecho interesante de que, aun considerando otras dos cantidades físicas de importancia, la altura del punto de lanzamiento y la rotación de la pelota, se observa que cada jugador profesional tiene mucha consistencia en la mayoría de esas cantidades y sólo variabilidad perjudicial en una o dos de ellas.

Palabras Clave: Modelización Matemática. Importancia de las Hipótesis. Importancia de las definiciones. Importancia de la precisión.

Presentación del problema a los maestros/alumnos

Se presenta la siguiente pregunta a los maestros en un taller de desarrollo profesional o a los alumnos de niveles de escuela media a universitario: "¿Por qué es difícil convertir el tiro libre en el baloncesto (basquetbol)?" Esta pregunta es mucho más compleja de lo que parece, por lo menos por dos motivos centrales. El primero es el significado del adjetivo *difícil,* y luego la completa falta de guía acerca de la base para justificar la respuesta.

La cancha de basquetbol de la NBA es un rectángulo de 28,65m (94 pies) x 15m (50 pies).



Dentro de la cancha y centrados a una distancia de 1,22m (4 pies) de las líneas de fondo se ubican los tableros que sostienen las cestas en las que debe entrar la pelota para marcar puntos. Los aros metálicos que sujetan las cestas están ubicados horizontalmente en la línea central de los tableros, a 3,05m (10 pies) del piso, con su centro a una distancia horizontal de 1,60 m (5¼ pies) de la línea de fondo, y tienen un diámetro interior de 45,7 cm (1,5 pies). El tiro libre se efectúa con los pies fijos sobre una línea paralela a la línea de fondo, distante 5,79m (19 pies) de ésta. La pelota tiene una circunferencia de 75cm (29½ pulgadas).

La importancia de las definiciones y el lenguaje

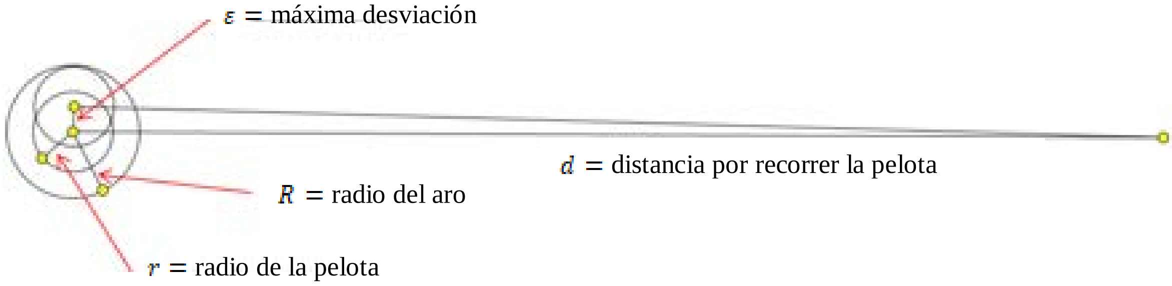
La importancia de compartir un lenguaje común en la comunicación es esencial y es un paso que no debe ni puede ignorarse: "Es responsabilidad del individuo asegurarse que es comprendido en la manera que pretendía" (Thomas & McDonagh, 2013, p.46). Estos autores declaran, más específicamente, "El lenguaje compartido es fundamental para la colaboración y la colaboración es fundamental para los negocios y la educación." (Thomas & McDonagh, 2013, p.46). En una clase de matemática, por ejemplo, puede considerarse difícil un problema que más de la mitad de los estudiantes no logran resolver correctamente. En contraste, un piloto de avión realiza el aterrizaje correctamente el 100% de las veces, pero eso de por sí no hace que el aterrizaje sea una maniobra *fácil* (como contrario de *difícil*).

Desde mediados de la década del 60 el tiro libre en el basquetbol universitario de EE.UU. se realiza con éxito aproximadamente el 69% de las veces, habiendo bajado a 67,1% pero nunca superando el 70% (Branch, 2009). En la NBA el porcentaje estuvo alrededor de 75% por más de 50 años. Las jugadoras universitarias y las de la liga femenina profesional alcanzaron porcentajes similares a los de los hombres y allí se estancaron (Branch, 2009). Sólo tres jugadores en la historia tienen porcentajes de conversión superiores al 90% (Stephen Curry, 90,71%; Steve Nash, 90,43%; Mark Price, 90,3%).

En el contexto de la escuela media o secundaria puede lograrse un acuerdo sobre el significado de *difícil* usando datos estadísticos. Así, por ejemplo, si el acuerdo para determinar si convertir el tiro libre es difícil o no fuera que "la mayoría de los jugadores profesionales lo logren al menos 90% de las veces", se podría concluir lógicamente que efectivamente es difícil porque sólo tres jugadores profesionales en la historia lo lograron.
En términos estadísticos esto equivaldría a definir un difícil como *raro*, de donde resulta que un evento difícil en el sentido de la semántica lingüística usual equivaldría a un *evento raro* en el sentido estadístico tradicional (o sea, un evento con muy baja probabilidad). Pero este acuerdo sobre el significado casi ciertamente llevaría a tales estudiantes caer en la falacia del uso de razonamiento circular al intentar responder la pregunta formulada: "¿*Por qué* es difícil convertir el tiro libre en el baloncesto (basquetbol)?" Responder "Es difícil porque menos de la mitad de los jugadores profesionales convierten 90% de los tiros libres" equivale en este caso a verificar que este evento, *convertir al menos el 90% de los tiros libres en el baloncesto*, es un evento raro, pero sin ninguna consideración del *motivo* por el cual lo es. La pregunta invita a especular sobre posibles motivos que sean *la causa* de la rareza del evento y no a controlar que el evento satisfaga la definición de la palabra *difícil*.

La Modelización Matemática del Problema

Usando un poco de geometría, en particular la fórmula de la longitud de la circunferencia, $C = 2\pi r$, se puede comenzar a intuir la causa. Sabiendo que la pelota tiene una circunferencia de 75cm, resulta que su radio es $r = \frac{C}{2\pi}$ = 11,94 cm mientras que el aro tiene un radio interno de R = ½ x 45,7 cm = 22,88 cm. Ingenuamente podríamos decir que para que la pelota caiga dentro del aro hay un margen de error muy pequeño del perfecto alineamiento del centro de la pelota con el centro del aro, de ε = ½ x (22,88 cm – 11,94 cm) = 5,47 cm en cualquier dirección sobre una distancia horizontal a recorrer de aproximadamente d = 5,79 m – 1,60 m = 4,19 m. Esto sugiere un margen de error de 1,3% (la razón de 5,47 cm a 4,19 m). Por supuesto que no es necesario que la totalidad del plano ecuatorial de la pelota quede dentro del aro en el momento del arribo porque la pelota puede rodar en el aro, rebotar, etc. Pero este tipo de pensamiento nos da una primera imagen visual sobre la posible causa de la dificultad de convertir el tiro libre.



Tratando de comprender mejor la causa de la dificultad de convertir el tiro, fijemos ciertas hipótesis para poder calcular parámetros descriptivos del problema. Usaremos medidas en pies (ft) ya que todas las medidas involucradas tienen expresiones mucho más sencillas en esa unidad que en unidades métricas. Teniendo en cuenta el largo del brazo del jugador, supondremos que el lanzamiento de la pelota hacia el aro ocurre desde un punto situado a 8 ft (= 2,44 m) de altura (tener presente que la estatura media de los jugadores profesionales supera los 2 m) y ¾ ft por delante de la línea de tiro libre. Estas hipótesis nos llevan al valor de la distancia horizontal que debe recorrer el centro de la pelota en su trayectoria al *tiro perfecto* (en el cual el centro de la pelota pasa por el centro del aro) es d = 13. Usando un poco de física y un poco de cálculo se sabe que la trayectoria de la pelota desde que es lanzada por el jugador hasta que su plano ecuatorial sea el mismo que el plano del aro es una parábola que, respecto de un sistema de coordenadas apropiado, tiene como ecuación $y = ax^2 + bx + c$. Coloquemos el eje de ordenadas verticalmente a través del centro del aro con $y = 0$ en el suelo. Coloquemos el eje de abscisas con origen en el eje de ordenadas en el suelo y en la dirección del centro de la línea del tiro libre (que queda ubicado en $x = 13{,}75$).

Para determinar los coeficientes de la parábola, tenemos la condición de que el centro del aro (ubicado en el punto de coordenadas $x = 0$, $y = 10$) satisfaga la ecuación, lo que nos lleva a $c = 10$. Del mismo modo, el punto de lanzamiento de la pelota (con coordenadas $x = 13$, $y = 8$) debe satisfacer la ecuación, de donde resulta que $13^2 a + 13b + 10 = 8$, o sea $b = -13a - \frac{2}{13}$. Como necesitamos una tercera condición para que quede determinada de modo único la parábola, usemos el ángulo de elevación α en el momento del lanzamiento de la pelota. Resulta entonces que $-\tan\alpha = y'(13) = 2a \times 13 + b = 13a - \frac{2}{13}$. Notemos ahora que debe ser $a < 0$ porque la parábola se abre hacia abajo, y el vértice, de abscisa $x = -\frac{b}{2a}$, debe estar en el intervalo (0,13) para que la pelota atraviese el aro yendo hacia abajo. Esto obliga a que sea $a < -\frac{2}{169}$. Sea v la velocidad de lanzamiento en la dirección dada por el ángulo α. Se sigue que la velocidad horizontal es $v\cos\alpha$ y la velocidad vertical es $v\sin\alpha - gt$, donde g es la aceleración de la gravedad y t es el tiempo medido en segundos. Usaremos el valor aproximado $g = 32\ \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}$. El tiempo que tarda la pelota en viajar de $x = 0$ a $x = 13$ es $t_0 = \frac{13}{v\cos\alpha}$ s. La altura de la pelota en ese momento debe ser 10 ft. La altura como función del tiempo es $y = 8 + (v\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Por lo tanto $10 = 8 + v(\sin\alpha)\frac{13}{v\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\left(\frac{13}{v\cos\alpha}\right)^2$, o sea $2 = 13\tan\alpha - \frac{2704}{v^2\cos^2\alpha} = 13\tan\alpha - \frac{2704}{v^2}(1 + \tan^2\alpha)$. La tercera condición para determinar los coeficientes de la parábola resulta entonces $\left(\frac{2704}{v^2}\right)\tan^2\alpha - 13\tan\alpha + \left[\left(\frac{2704}{v^2}\right) + 2\right] = 0$. Esta fórmula da la relación necesaria entre la velocidad de lanzamiento v y el ángulo de elevación α del lanzamiento para que la pelota lanzada desde el punto de coordenadas (13,8) pase también por el centro del aro, de coordenadas (0,10). Provistos de estas fórmulas podemos estimar el margen de error en la velocidad inicial o en el ángulo de elevación para que el centro de la pelota pase por el plano del aro a una distancia del centro del mismo que no supere $\varepsilon = 0{,}179$ ft. Así, por ejemplo, para una velocidad inicial $v = 24$ ft/s, el ángulo de elevación para el tiro perfecto es $\alpha = 34{,}365°$. Si mantenemos este ángulo podemos verificar que el margen de error de la velocidad es 0,118 ft/s, o sea menor de 0,5%.

Conclusiones

Ahora podemos conjeturar que la causa de la dificultad de convertir el tiro libre es el pequeño margen de error admisible ya sea en el ángulo de desviación de la línea del tiro perfecto como de la velocidad de lanzamiento. El primero debe ser menor de $\arctan\frac{0{,}179}{13} = 0{,}014°$ mientras que el segundo menor de 0,5%. En un estudio de 440 jugadores de la NBA considerando 5 parámetros físicos (la altura del lanzamiento, la rotación de la pelota, velocidad de lanzamiento, ángulo de lanzamiento, y desviación lateral) en más de 340.000 tiros libres, la Sloan Sports Science Conference llegó a la conclusión que cada jugador fallaba en su propia manera, generalmente con uno o dos de estos 5 factores siendo la causa de modo consistente (citado en McMahan, 2017).

Esta pregunta aparentemente inocente y sencilla, contiene una gran riqueza de razonamiento y matemática de distintos niveles y por lo tanto provee un buen ejemplo para estimular el pensamiento crítico y la elaboración de soluciones para maestros y estudiantes de muy distintos niveles.

Referencias Bibliográficas

Branch, J. (2009, March 4). *The free throw is stuck in time* (article). Retrieved from https://www.nytimes.com/2009/03/04/sports/04iht-BBALL.1.20585925.html

McMahan, I. (2017, November 22). *Hacking the free throw: the science behind the most practiced shot in sports* (article). Retrieved from https://www.theguardian.com/sport/2017/nov/22/free-throws-foul-shots-science-of-sports

Thomas, J. & McDonagh, D. (2013). Shared language: Towards more effective communication. *Australasian Medical Journal 6*(1), 46-54. DOI: 10.4066/AMJ.2013.1596

Disertación Invitada GTD-1.2

Aciertos y desafíos de la Modelización Matemática como estrategia de enseñanza de la matemática para no matemáticos

Gabriel R. SOTO
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud
Departamento de Química y Departamento de Medicina
Facultad de Ingeniería
Departamento de Ingeniería
gsoto@unpaa.edu.ar

Resumen

Uno de los problemas que enfrentamos en nuestra práctica diaria quienes enseñamos matemática en las ciencias exactas y naturales es la constante demanda de los estudiantes: *¿Y esto para qué me sirve?* La educación STEM es un paradigma que ofrece oportunidades a los docentes para dar respuestas adecuadas a esta población de estudiantes. La modelización matemática, como herramienta para la enseñanza de la matemática en el contexto de la educación STEM, permite transformar problemas de la vida real en problemas matemáticos cuyas soluciones se tienen que interpretar en términos del problema original. En este trabajo describimos la metodología y algunos aspectos de su implementación, tales como algunos problemas de modelización y algunos instrumentos de evaluación, en un curso de matemática para estudiantes de primer año de carreras asociadas a las ciencias naturales.

Palabras Clave: Matemática para no matemáticos. Modelización Matemática. Trabajo Colaborativo. Aprendizaje basado en Proyectos. Evaluación de Pares.

1. Introducción

Una de las preguntas más frecuentes en los cursos de matemática es *Profe, yo hago los ejercicios, me salen las cuentas, pero ¿para qué me sirve?* La respuesta más común que ofrecemos los docentes es *¡No te preocupes, en algún momento te va a servir!*, aunque nos deja un sinsabor pues es claro que debemos buscar otras respuestas o argumentos a esa pregunta (Soto, 2010). Luis Santaló (1990) en su conferencia brindada en el Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (CIBEM), puntualizó la necesidad de reflexionar respecto a los objetivos y propósitos que tiene la matemática como espacio curricular en la enseñanza obligatoria y en la mayoría de las carreras de nivel superior que utilizan a la matemática como herramienta. Ya comenzada la tercera década del siglo XXI, resulta evidente que dichos propósitos y objetivos deban ser revisados y estar en consonancia con la necesidad de potenciar habilidades para el desarrollo de la ciudadanía crítica y el desarrollo sustentable de las sociedades (López Gamboa, Córdoba González y Soto Soto, 2020).

Hace algo más de diez años que el término STEM (acrónimo de las siglas en inglés de Ciencia (Science), Tecnología (Technology), Ingeniería (Engineering) y Matemática (Mathematics)) es utilizado en foros de debate políticos, sociales, económicos y educativos para denotar el conjunto de habilidades que deben ser promovidas para que una sociedad sea capaz de involucrarse y tomar partido en los retos que enfrenta (López Simó, Couso Lagarón y Cimarro Rodriguez, 2020). La educación STEM surge entonces como una herramienta de formación para dar respuesta a problemas sociales relevantes mediante el uso simultáneo de diversas disciplinas (Maass, Geiger, Romero Ariza y Goos, 2019). Sus orígenes se basan en la necesidad de mantener competitividad económica en un mundo globalizado, y se convirtió en una estrategia conjunta de científicos, tecnólogos, ingenieros y matemáticos para tener una voz política influyente en el contexto de políticas públicas (English, 2016). Vázquez (2015) define la educación STEM como una "forma de aprendizaje que borra las fronteras tradicionales que separan las cuatro disciplinas involucradas (ciencia, tecnología, ingeniería y matemática), y las integra en experiencias de aprendizaje del mundo real, relevantes y rigurosas para el estudiante" (p. 11). En particular, afirma que proponer experiencias de aprendizaje STEM es una respuesta adecuada a la pregunta *¿Profe, esto para qué me sirve?*

Ahora bien, la implementación de espacios de enseñanza en el contexto STEM propone varios desafíos en diferentes niveles relacionados, entre otros, con tradiciones institucionales, diseños curriculares, prácticas docentes y formas de aprendizajes: la estructura de aulas, distribución de carga horarias, sistemas de acreditación de asignaturas son algunos de los factores que inciden sobre la implementación de espacios de educación STEM (Venville, Rennie y Wallace, 2012). A nivel de nuestras prácticas, la educación STEM nos obliga a pensar en estrategias que promuevan en los estudiantes habilidades para la integración de saberes y prácticas de diferentes disciplinas cuando enfrentan un problema dado, pues esta integración no es espontánea (English, 2016).

Es necesario entonces, crear ambientes de aprendizaje adecuados que contengan los elementos necesarios para promover aprendizajes significativos en un contexto STEM manteniendo una distribución balanceada de las disciplinas involucradas (English y Kirshner, 2016). La modelización matemática (MM) como estrategia de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la educación STEM no es nueva (Maass, Doorman, Jonker y Wijers, 2019), ha resultado adecuada por sus valores formativos, y de promoción autogestionada de la matemática (Blum y Niss, 1991), la promoción de la alfabetización matemática (Maass y otros, 2019) y la promoción de competencias cívicas (Borromeo, 2018). La modelización matemática surge como contraparte de lo que comúnmente se conoce como aplicaciones de la matemática. En la primera, la necesidad de resolver un problema real condiciona la búsqueda y uso de la matemática para encontrar alguna solución, mientras que en la segunda se buscan situaciones reales en las cuales se pueda aplicar un concepto matemático dado (Stillman, 2015). Por tanto, la MM surge como alternativa metodológica que permite dar respuestas satisfactorias y concretas a los no matemáticos respecto al uso de la matemática como herramienta.

En este trabajo presentamos consideraciones y algunos resultados de la incorporación de la modelización matemática en un curso de matemática para estudiantes de primer año de carreras asociadas a las ciencias naturales. En particular, describiremos nuestra experiencia respecto a la metodología de implementación para la potenciación de habilidades de modelización y trabajo colaborativo.

2. Marco Teórico

2.1. Modelización Matemática

Blum (2015) describe a la modelización matemática mediante un proceso dinámico en el cual se pone de relieve la idea de un *modelo matemático* cuya finalidad es establecer una posible relación entre el *resto del mundo* y el *mundo matemático*. De esta manera se define la modelización matemática como "una terna compuesta por el mundo real, el mundo matemático y una relación (modelo) que sirve para describir, explicar y predecir el mundo real" (Blum, 2015, p. 77). Esta correspondencia dinámica entre el mundo real y el abstracto pone de manifiesto el carácter *utilitario* de la matemática como afirma Basanezzi (2002) al respecto:

> El objetivo fundamental del "uso" de la matemática es de hecho extraer la parte esencial de la situación-problema y la formalización en un contexto abstracto donde el pensamiento pueda ser absorbido con una extraordinaria economía de lenguaje. De esta forma, la matemática puede ser vista como un instrumento intelectual capaz de sintetizar las ideas concebidas en situaciones que están casi siempre camufladas en un enmarañado de variables de menor importancia. (p. 18)

Una característica importante del proceso de modelización es que comienza en el mundo real, y preguntas tales como *cuál es el problema/qué preguntas queremos responder* interrogantes del tipo *qué matemática/conceptos matemáticos me pueden ayudar a resolver este problema*, además de dotar de direccionalidad al proceso. Si bien la resolución de problemas tiene un papel importante en la modelización matemática, la estructura de los mismos debe ser determinada por los modeladores (Stillman, 2015) y esa es una diferencia fundamental con respecto a la resolución de problemas como estrategia de enseñanza. Esta necesidad de estructurar un problema para poder buscar posibles soluciones pone a los modeladores en un rol activo en el proceso de modelización, apropiándose del problema real y del matemático, y vivenciando la matemática como un verbo y no como un sustantivo; esto es la matemática no es un deporte de espectadores. De las diversas conceptualizaciones del proceso de modelización (Borromeo, 2018), nosotros utilizamos la presentada por Bassanezi (2002) en el que se identifican etapas tales como la experimentación, abstracción, resolución, validación y modificación. La primera etapa se focaliza en la obtención de datos experimentalmente, cuyos métodos dependen de la naturaleza del experimento y del objeto a investigar. La etapa de abstracción se caracteriza por la formulación del modelo matemático, identificando las variables a estudiar y los parámetros del problema, la generación de hipótesis a través de la observación de los hechos, por ejemplo, diferentes representaciones de los datos experimentales, comparación con otros estudios, deducción lógica, experiencia personal del modelizador, analogía de sistemas, etc. La etapa de resolución está relacionada con la complejidad empleada para la obtención del mismo, siendo las técnicas computacionales una de las herramientas más utilizadas en la actualidad. La validación es la etapa de aceptación o no del modelo propuesto, mediante la confrontación de las hipótesis y datos experimentales. La interpretación de los resultados obtenidos puede ser hecha a través de soluciones gráficas o numéricas que faciliten avalar las predicciones del modelo. Finalmente, la etapa de modificación refiere a la posibilidad que las predicciones del modelo no conduzcan a resultados correctos por diversos factores: algunas de las hipótesis resultaron falsas, los datos experimentales fueron obtenidos de manera inexacta, errores en la formulación matemática del modelo, entre otros. Es importante destacar que ningún modelo puede ser considerado definitivo y siempre puede ser mejorado, debido a que son representaciones simplificadas del problema real. Estas etapas que conforman el proceso de modelización no necesariamente ocurren de manera secuencial y la elección por parte del modelador de la secuenciación de etapas lejos está de ser lineal (Borromeo, 2018).

2.2. Aprendizaje Basado en Problemas

Dado que la estructura de los problemas encuadrados en la MM depende de quién o quiénes se proponen resolverlo, cualquier estrategia de implementación debe generar un ambiente donde los estudiantes puedan potenciar el uso y desarrollo de conocimientos y habilidades cuando se enfrentan a problemas de la vida real. El *aprendizaje basado en problemas* (ABP) es una metodología que promueve un aprendizaje abierto, reflexivo y crítico en el cual los estudiantes buscan, clasifican y usan la información asociada al problema, para estructurarlo y así poder construir una posible solución (Morales Bueno, 2018). Esta metodología surge en la escuela de Medicina de la McMaster University en la década del sesenta del siglo pasado, apoyada en la premisa que la adquisición de conocimientos como el desarrollo de habilidades y actitudes resultan igualmente importantes. En el ABP, el conocimiento debe considerarse necesariamente de manera holística por la naturaleza abierta, compleja y cambiante del problema a resolver. Esta metodología permite conservar la esencia de la modelización matemática, como así también promueve el trabajo colaborativo para la discusión y toma de decisiones en cada etapa del proceso de modelización (Borromeo 2018).

3. Implementación de la MM y ABP

3.1. Descripción de la Metodología

Desde el año 2017 incorporamos la MM a través del ABP a la metodología de trabajo en la asignatura Matemática. Esta asignatura se dicta en el primer cuatrimestre del primer año para las carreras Bioquímica, Farmacia, Geología y Técnico Laboratorista Universitario de la Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (Díaz, González, Negrette y Soto, 2020). Los contenidos mínimos de la asignatura corresponden a cálculo diferencial e integral de una y varias variables. De las diez horas semanales que tiene la cátedra, cuatro horas se destinan a encuentros sincrónicos donde se discuten ideas y conceptos teóricos, cuatro horas en donde se resuelven problemas y ejercicios que complementan las ideas y conceptos presentados. Las dos horas restantes se destinan a un espacio denominado *tutorías,* en el cual se pone en juego el ABP. Esta implementación es un modelo introductorio para la enseñanza en el contexto STEM (Gamboa et al, 2020). Para las tutorías, cada estudiante es asignado a un grupo de al menos tres y no más de cinco integrantes, y a cada grupo se le asigna un tutor que atiende 6 grupos cada uno. A lo largo de la cursada cada grupo tiene que resolver tres problemas de modelización de manera secuencial, debido a que las ideas y conceptos que se desarrollan en paralelo a los proyectos, necesitan ser utilizados por los estudiantes para su resolución. El tiempo estimado para la resolución de cada problema es de 5 semanas aproximadamente, incluyendo las instancias de evaluación. Al finalizar cada problema, cada grupo tiene que producir un informe audiovisual (video) de no más de cinco minutos mediante el cual describirán el problema, el desarrollo de las soluciones y conclusiones obtenidas teniendo en cuenta una serie de indicadores contenidos en una *rúbrica de corrección de video.*
El trabajo colaborativo incide positivamente en el aprendizaje, particularmente en situaciones de excepcionalidad como la que estamos atravesando. Sin embargo, no siempre es posible lograr aprendizajes significativos en grupos que no logran establecer buenas relaciones de trabajo. Oakley, Felder, Brent y Elhajj (2004) proponen a la evaluación de pares como un instrumento que permite a los integrantes de un grupo potenciar sus habilidades de comunicación para establecer buenos ambientes de trabajo. Al finalizar cada problema cada integrante del grupo debe evaluar su desempeño como así también el de los demás integrantes del grupo. Una vez completada la encuesta, se obtiene un *factor de ajuste* que interviene en la calificación asignada a cada estudiante en los trabajos grupales (Soto y otros, 2019).

2.2. Descripción de algunos problemas

Una de las características que distinguen a los problemas de MM es que la estructura del mismo depende de quiénes lo resuelven. En este sentido, Borromeo Ferri (2018) define que una tarea/problema de modelización debe ser abierta, compleja, promover aprendizajes holísticos y nuevas preguntas, realista y auténtica, adecuada para los grupos que la resolverán, y ser resoluble a través del proceso de modelización. Además, estos problemas de MM deben promover el uso de herramientas digitales para la recolección y sistematización de datos de las variables que intervienen en el problema, como así también para la simulación de los procesos que intervienen en el problema (López et al, 2020). Los problemas que presentamos a continuación tienen estas características y se encuadran en la perspectiva pragmática de la MM que tiene sus orígenes en los trabajos de Henry Pollack (Stillman, 2015). Por último, estos problemas proponen un nivel de integración STEM *multidisciplinario* (Vásquez, 2015).

- Una medida para potabilizar el agua es hervirla durante cinco minutos. Esta práctica es común en hogares con niños que toman leche maternizada en polvo. A partir del momento que retiramos el agua del fuego, ¿cuánto tiempo debemos esperar para preparar una mamadera y que el niño no se queme?

- Los cortes de agua que padecemos los comodorenses, en especial durante la temporada estival, nos deberían hacer reflexionar sobre los cuidados que debemos tener para no malgastar el vital líquido elemento. Uno de los recaudos a tener en cuenta es que ninguna canilla quede goteando. Si un bidón de 20 litros de agua potable cuesta en promedio $210, ¿cuánto dinero se pierde por mes si hay canillas que gotean en los hogares comodorenses?
- Con los cortes de agua que convivimos en nuestra ciudad, a veces surge la pregunta a partir del momento que cortan el agua, ¿qué tan rápido se vacía el tanque de tu casa?
- Recibimos una donación de 100 metros cuadrados de venecitas para cubrir una pileta de natación que vamos a construir, y dados los problemas que tenemos de agua en la región, queremos hacerlo de modo que la pileta tenga el mayor volumen de agua posible, para poder utilizarla en las temporadas frías. ¿Cuáles deberían ser las dimensiones de la misma?

4. Comentarios Finales

La educación STEM surge entonces como alternativa para dar respuestas adecuadas a la pregunta *¿Profe, esto para qué me sirve?* Debido a que es una forma de enseñanza y aprendizaje que borra las divisiones que separan las cuatro disciplinas involucradas, su implementación es un desafío frente a la estructura curricular e institucional en la que generalmente se desarrolla la enseñanza. La modelización matemática como estrategia de enseñanza y aprendizaje en el contexto de la educación STEM surge como una oportunidad para afrontar el desafío que nos propone la implementación del modelo educativo STEM. Del año 2017, la metodología de Aprendizaje Basado en Problemas nos ha permitido incorporar la educación STEM en nuestra metodología de enseñanza, a través de la modelización matemática. Esta inclusión ha permitido poner en valor el uso de la matemática en contextos de la vida real. Si bien la valoración cualitativa de los estudiantes hacia la metodología es positiva, algunos manifiestan que al inicio les genera cierto grado de frustración y desconcierto pues no están acostumbrados a ser el centro del proceso de aprendizaje en el aula de matemática (Bassanezi, 2002, p. 37). La MM pone a los estudiantes frente a "dificultades empíricas" asociadas a la complejidad de dichos problemas (Blum, 2015, p. 78): ¿qué tiene que ver lo que aprendo en la escuela y el contexto en el que vivo?, ¿hay que usar todos los datos que me dan?, ¿la relación entre las respuestas obtenidas y el problema es irrelevante? Además, la MM obliga a los docentes a reflexionar sobre su propia práctica pues nos exige que sean guías que estimulen a los estudiantes a aprender, descubrir y apropiarse del propio aprendizaje como así también a potenciar las habilidades asociadas a la comunicación y al trabajo colaborativo. Además, pone en tensión las concepciones construidas acerca de la matemática como disciplina y cuál es el rol de la universalidad que nos ofrece la matemática al momento de resolver problemas de la vida real (Díaz, González, Negrette y Soto, 2020).

La incorporación del ABP como parte de la metodología de trabajo nos ha permitido focalizar y evaluar el desarrollo de habilidades comunicacionales y el trabajo colaborativo. La conformación de los grupos de trabajo para resolver problemas puede incidir en el desempeño del grupo. En cuanto a la conformación de los grupos de trabajo, la auto conformación de grupos, esto es los alumnos eligen con quién trabajar colaborativamente, no es apropiada (Oakley y otros, 2004). Hemos utilizado instrumentos cualitativos (disponibilidad horaria, zonas de residencia) y cuantitativas (encuestas de conocimiento matemático) para la conformación de grupos heterogéneos. Para el presente ciclo lectivo, utilizaremos una asignación aleatoria de grupos, siguiendo las ideas de Rouleau, A., Ruiz, N., Reyes, C. y Liljedahl (2019). La evaluación de pares nos ha servido para promover aprendizajes significativos a través del trabajo colaborativo. A partir del presente ciclo lectivo, utilizaremos la herramienta Taller en la plataforma Moodle para cuantificar la evaluación de pares y obtener el factor de ajuste.

La incorporación de la MM a través de la metodología ABP ha sido valorada positivamente tanto por estudiantes como por los integrantes de la cátedra. Es un desafío que nos propusimos enfrentar y se ha convertido en una herramienta de desarrollo profesional tanto para los estudiantes como para los docentes que integramos el equipo de cátedra.

5. Referencias Bibliográficas

Bassanezi, R. (2002). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. Obtenido en Setiembre 2020, desde www.researchgate.net/publication/256007243

Blum,W. (2015) *Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do?* En S.J. Cho (ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_9

Blum, W., Niss, M. (1991) *Applied mathematical problem solving, modelling, applications and links to other subjects. State, trends and issues in Mathematics Education*. Educational studies in mathematics, 22, 37-68.

Borromeo, R. (2018) *Learning how to teach mathematical modelling in school and teacher education*. Springer International Publishing, Suiza: Cham.

Díaz, A., González, M., Negrette, C., Soto, G. (2020) *Una experiencia de modelización en una clase de matemática para las ciencias naturales.* Revista de Educación Matemática, 35(1), 41-53.

English, L. (2016) *STEM education K-12: perspectives on Integration* International Journal of STEM Education, DOI 10.1186/s40594-016-0036-1.

English, L., Kirshner, D. (2016) *Changing agendas in international research in mathematics education*. En L. English y D. Kirshner (Eds.) *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 3-18. Routledge. EE.UU.: Nueva York.

López Gamboa, M., Córdoba González, C., Soto Soto, C. (2020) *Educación STEM/STEAM: Modelos de implementación, estrategias didácticas y ambientes de aprendizaje que potencian las habilidades para el siglo XXI.* Lat. Am. J. Sci. Educ. 7, 12002.

López Simó, V., Couso Lagarón, D., y Cimarro Rodriguez, C. (2020) Educación STEM en y para un mundo digital: el papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. Revista de Educación a Distancia. 20(62) DOI: http://dx.doi.org/10.6018/red.410011

Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., Wijers, M. (2019) *Promoting active citizenship in mathematics teaching.* ZDM, 51(6), p. 991-1003. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01048-6

Maass, K., Geiger, V., Romero Ariza, M., Goos, M. (2019) *The Role of Mathematics in interdisciplinary STEM education* ZDM, 51, 869–884.

Morales Bueno, P. (2018) *Aprendizaje basado en problemas (ABP) y habilidades de pensamiento crítico ¿una relación vinculante?* Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 21(2), 91-108.

Oakley, B., Felder, R., Brent, R., Elhajj, I. (2004) *Turning student groups into effective teams*. Journal of Student Centered Learning, 9(1), 9-34.

Rouleau, A., Ruiz, N., Reyes, C. y Liljedahl, P. (2019) *Examining Sources of Self-Efficacy in Whole-Class Problem Solving.* En P. Felmer y otros (Eds.) *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development, Research in Mathematics Education*, 219-238. Springer Nature, Suiza: Cham.

Santaló, L. (1990) *Matemática para no matemáticos.* Memorias del Primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, en Enseñanza Científica y Tecnológica, N° 42, 1-12.

Stillman, G. (2015) *Application and modelling research in secondary classrooms: what have we learnt?* En S. Chu (Ed.) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, p. 791-806. Springer International Publishing.

Soto, G. (2010) *¿Y esto... para qué me sirve? Algunas reflexiones para enfrentar esta pregunta y no morir en el intento*. Conferencia XXXIII Reunión de Educación Matemática, Tandil Buenos Aires.

Soto, G., Villagra, N., González, M., Negrette, C., Mendonça, M., Ibarra, M. (2019). *Instrumentos de evaluación en cátedras que utilizan la modelización matemática como metodología de enseñanza. Análisis inicial de un caso.* Reunión de Educación Matemática, Mendoza, Mendoza.

Vasquez, J. (2015). *STEM: beyond the acronym.* Educational Leadership, Dec/Jan., 10-16.

Venville, G., Rennie, L.J., Wallace, J. (2012) *Curriculum Integration: Challenging the Assumption of School Science as Powerful Knowledge.* En B.J. Fraser, K. Tobin y C. McRobbie (Eds), *Second International Handbook of Science Education*, 737-749. Springer International Handbooks of Education.

Disertación Invitada GTD-1.3

Reconstrucción de la organización matemática de la elipse en 1er. año de Ingeniería: Modelización del mecanismo biela-manivela

Mario DI BLASI REGNER

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional General Pacheco

mario.diblasi@gmail.com

Resumen

En esta conferencia expondré sobre el diseño e implementación de un dispositivo didáctico, una actividad de estudio e investigación (AEI), que permitió que estudiantes de primer año de Ingeniería reconstruyeran la organización matemática “elipse” y modelizarán un mecanismo biela – manivela.
El proceso de estudio y de modelización se concibieron y gestionaron enmarcados en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 2005; Otero, 2013). Por lo tanto, desde esa perspectiva, es importante que esos procesos se originen, y se desarrollen, en la búsqueda de la respuesta a una pregunta “significativa” para las y los estudiantes. En este caso esa pregunta, intramatemática, puede enunciarse de la siguiente manera: *¿cómo determinar si una curva plana cerrada es una elipse?*
Como se mostrará en la exposición, esta pregunta y el proceso que origina llevará a abordar el funcionamiento de un mecanismo muy importante para comprender la mecánica de un motor de combustión interna, entre otras muchas aplicaciones.
Un escenario de aprendizaje mediado por TIC, especialmente con escenas dinámicas, permitió a las y los estudiantes enfrentar un problema complejo de la Ingeniería en Industria Automotriz (el mecanismo biela – manivela) en una materia de primer año y facilitó las tareas en las que se pueden identificar niveles avanzados de modelización, según la descripción realizada por Ruiz Munzón (2010).

Palabras clave: Modelización. Ingeniería. Mecanismo Biela – Manivela. Geometría Analítica. T.A.D.

1. Introducción a Modelización Matemática

Para comenzar, y explicitar que conceptualización de modelización matemática utilizaré, cito a García (2019): *"…la actividad de modelización matemática se interpreta como proceso de (re)construcción y articulación de praxeologías matemáticas que se amplían y completan a medida que avanza el proceso y con el objetivo de responder a la/s cuestión/es de inicio"*. Esta concepción, adoptada en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), habilita a considerar que toda actividad matemática puede ser interpretada como una actividad de modelización. Considerando ese mismo enfoque, Ruiz Munzón (2010) describe la *modelización algebraico-funcional* partiendo de considerar que el fundamento de la geometría analítica es el hallazgo de que las ecuaciones algebraicas de la forma $f(x, y) = 0$ corresponden a lugares geométricos determinados por los puntos cuyas coordenadas la satisfacen. Distingue tres niveles de modelización. En el *tercer nivel de modelización* de un sistema el modelo se expresa mediante *familias de funciones de dos o más variables* y las correspondientes *fórmulas asociadas*. En este último nivel, el rol de los "parámetros" y de las "variables" es intercambiable y se estudia cómo repercute la variación conjunta de dos o más variables sobre la variación de una función.

2. Actividades de Estudio e Investigación

En oposición al monumentalismo de los sistemas de enseñanza dominantes en la actualidad, desde la TAD se plantea la necesidad de introducir en ellos procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver cuestiones problemáticas. Las *Actividades de Estudio e Investigación* nacen como un modelo didáctico para abordar esa problemática; se trata así, de superar la estructura binaria tradicional de la enseñanza de la matemática que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos-teóricos y luego tareas como medio para la aplicación de los primeros. Una AEI es, en principio, una organización didáctica donde la clase, bajo la dirección de un profesor, va a hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a los alumnos una cierta organización matemática local (OML). Para esto es necesario partir de una cuestión generatriz Q cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta R, y esta contenga los elementos esenciales de la OML inicial (Otero, 2013).

3. Diseño de la Actividad de Estudio e Investigación

En la siguiente figura se muestran las relaciones entre la cuestión generatriz, las cuestiones secundarias derivadas de ella, los tipos de tarea que debieron enfrentar las y los estudiantes y las situaciones que componen la AEI.

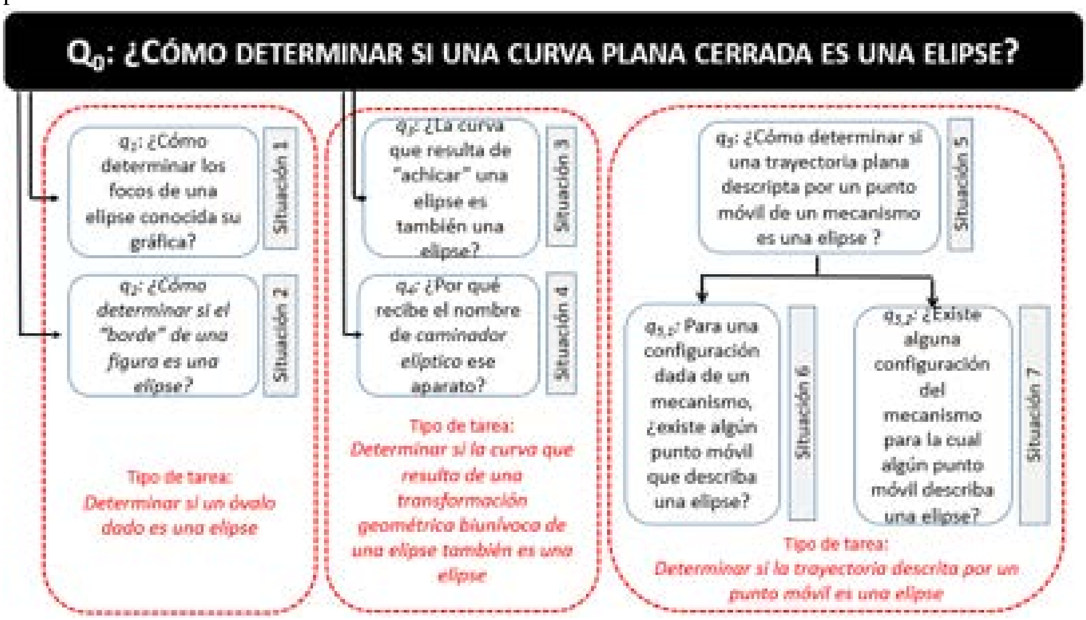


Fig. 1: Relaciones entre cuestiones, tareas y situaciones

Por razones de tiempo, en esta conferencia, me limitaré a describir brevemente las últimas tres situaciones y el proceso de estudio y modelización llevado a cabo por las y los estudiantes en la resolución del último tipo de tarea.

En las mencionadas situaciones, las y los estudiantes se encontraron frente a la necesidad de modelizar el funcionamiento de un caminador elíptico (figura 2) con la meta de decidir si el punto de apoyo del pie describía al moverse una elipse.

Fig. 2: Caminador elíptico

Para poder responder la cuestión secundaria q_5 las y los estudiantes, habituados a trabajar con GeoGebra, construyen un modelo simplificado del funcionamiento del caminador, que puede verse en la figura 3:

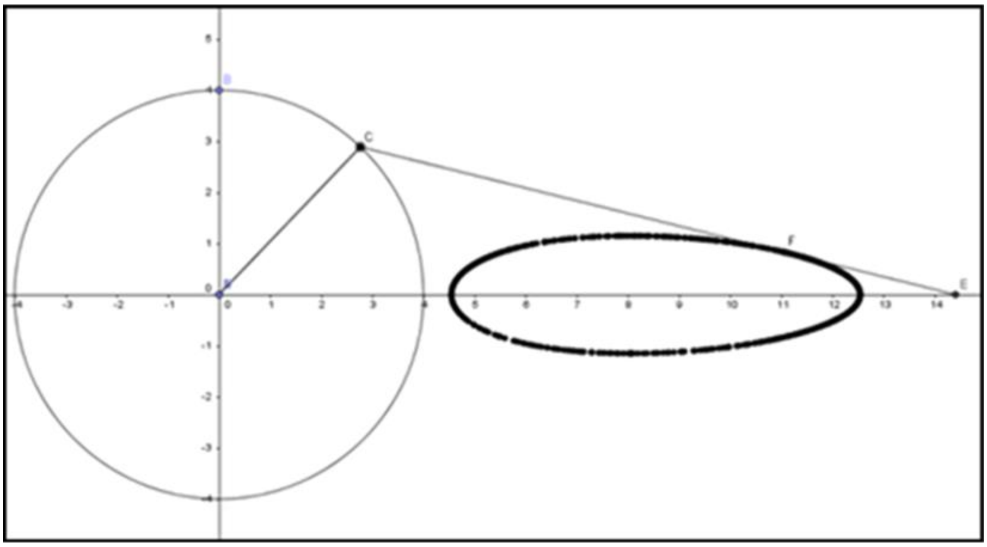


Fig. 3: Modelo simplificado del caminador

En este modelo simplificado puede identificarse un mecanismo biela (segmento CE) – manivela (segmento OC).

El punto de apoyo (idealizado) del pie en el caminador elíptico, estaría representado por el punto F. Este importante mecanismo de la ingeniería transforma movimiento rectilíneo (por ejemplo, del pistón de un motor de combustión interna) en movimiento circular como ilustra la figura 4.

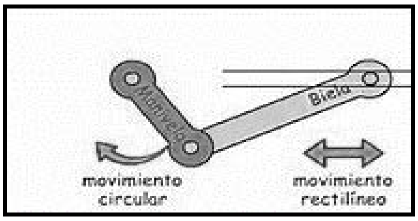


Fig. 4: Mecanismo biela – manivela

Considerando un sistema de ejes cartesianos, e identificando las variables y parámetros necesarios (figura 5), las y los estudiantes pueden abordar el problema de decidir si el punto F describe, al moverse, una elipse.

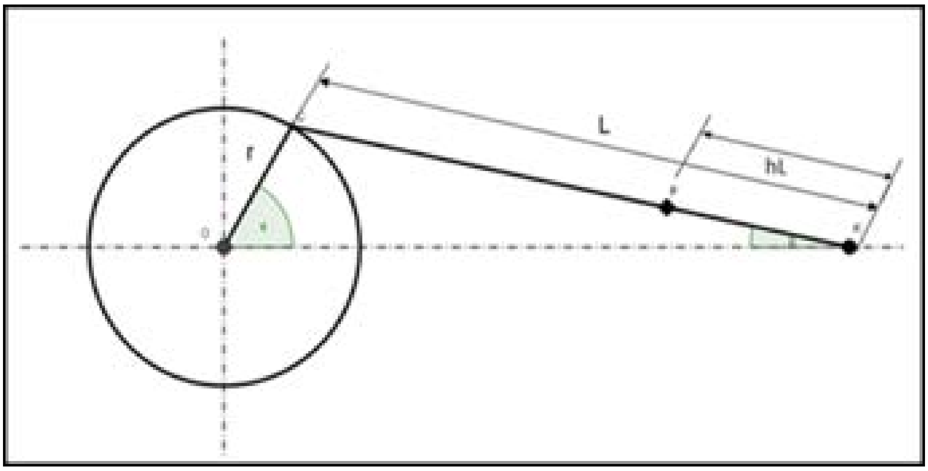


Fig. 5: Variables y parámetros en el modelo

Siendo:
r: longitud de la manivela.
L: longitud de la biela.
k: punto correspondiente al pie de la biela.
O: punto del centro de la circunferencia de radio r y origen del sistema de coordenadas (x; y).
p: punto genérico de la biela.
c: punto correspondiente al botón de la manivela.
α: ángulo de la manivela con respecto al eje horizontal, en sentido horario.
β: ángulo de la biela con respecto al eje horizontal, en sentido antihorario.

Y definiendo:

h: fracción de longitud de L, de forma tal que la longitud del segmento $\overline{\boldsymbol{pk}}$ es h.L.

En un instante cualquiera, el punto p, tendrá por coordenadas:

$x_p = r.\cos\alpha + L.\cos\beta - h.L.\cos\beta$

$$\boxed{x_p = r.\cos\alpha + L.\cos\beta\,(1-h)} \qquad (1)$$

Dada la geometría podemos observar que:

$$r.\operatorname{sen}\alpha = L.\operatorname{sen}\beta \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\beta = \frac{r}{L}\operatorname{sen}\alpha} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y reescribiendo $\cos\beta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\beta} = \sqrt{1-\frac{r^2}{L^2}\operatorname{sen}^2\alpha}$ tenemos:

$$\boxed{x_p = r.\cos\alpha + L.(1-h).\sqrt{1-\frac{r^2}{L^2}\operatorname{sen}^2\alpha}} \qquad (3)$$

En cuanto a la coordenada *y*, tenemos:

$$y_p = h.L.sen\,\beta = h.L.\frac{r}{L}.sen\,\alpha \Rightarrow \boxed{y_p = h.r.sen\,\alpha} \quad (4)$$

Donde (3) y (4) son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria de un punto genérico de la biela, a una distancia h.L del pie, en función de la variación del ángulo α.
Si suponemos que L es considerablemente mayor que r, podremos describir esas trayectorias, como una familia de elipses de semieje mayor horizontal igual a r, desde los casos límites h = 0, en el cual tendremos un segmento de recta, y h = 1, donde tendremos una circunferencia de radio r.
En importante observar, que para h = 0, nos encontramos en el punto correspondiente al pie de la biela, que, como indicamos anteriormente, es el encargado de transmitir el movimiento lineal alternativo, y para h = 1, nos encontraremos en el punto correspondiente al botón de la manivela, dotado de movimiento circular.
Definimos $\lambda = \frac{L}{r}$.
Cabe aclarar que también es común encontrar a λ como la relación inversa, pero en este caso nos resulta más conveniente a fines de simplicidad en los cálculos definirla de esta forma, queda a criterio del lector invertir la relación de ser necesario.
Operando, a partir de la ecuación (3):

$$x_p = r.cos\,\alpha + L.(1-h).\sqrt{1-\frac{r^2}{L^2}sen^2\,\alpha}$$

$$x_p = r.\left(cos\,\alpha + \frac{L}{r}.(1-h).\sqrt{1-\frac{r^2}{L^2}sen^2\,\alpha}\right)$$

$$x_p = r.\left(cos\,\alpha + \lambda.(1-h).\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}sen^2\,\alpha}\right)$$

$$\boxed{x_p = r.\left(cos\,\alpha + (1-h).\sqrt{\lambda^2 - sen^2\,\alpha}\right)} \quad (5)$$

Si asumimos

$$\lambda >> 1 \Rightarrow \lambda^2 >> 1 \Rightarrow \lambda^2 >> sen^2\,\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{\lambda^2 - sen^2\,\alpha} \cong \sqrt{\lambda^2} \cong \lambda$$

Si reescribimos (5) con la simplificación anterior, queda:

$$\boxed{x_p = r.cos\,\alpha + r(1-h).\lambda} \quad (6)$$

De la ecuación (4), tenemos:

$$y_p = h.r.sen\,\alpha \Rightarrow \boxed{sen^2\,\alpha = \frac{{y_p}^2}{(h.r)^2}} \quad (7)$$

Reemplazando (7) en (6), y operando:

$$x_p = r.cos\,\alpha + r(1-h).\lambda$$

$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.cos^2\,\alpha$$

$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.(1-sen^2\,\alpha)$$

$$\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2 = r^2.\left(1-\frac{{y_p}^2}{(h.r)^2}\right)$$

Obtenemos:

$$\boxed{\frac{\left(x_p - r(1-h).\lambda\right)^2}{r^2} + \frac{{y_p}^2}{(h.r)^2} = 1} \quad (8)$$

Que es la ecuación de una familia de elipses de semieje mayor r, coordenada x del centro variable con h y λ, y semieje menor variable con h.

Dado que L es mucho mayor que r la diferencia entre las curvas descriptas por las ecuaciones (3) y (4) son muy parecidas a las que describe la ecuación (8).
En definitiva, el punto de apoyo del pie no describe una elipse. Para mayor detalle puede verse el trabajo de Di Blasi Regner y Ramirez Daneri (2016).

La fundamentación y la descripción completa de la AEI expuesta en la conferencia pueden encontrarse en el trabajo de Di Blasi Regner y Rodriguez (2016) y en la tesis doctoral del autor, "Articulación entre los enfoques sintético y analítico en cónicas a nivel superior en entornos de geometría dinámica" en https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/2344.

4. Referencias Bibliográficas

Chevallard, Y. (2005). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.* En L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Mathemáticas - Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico. Primer Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de los didáctico, Pp. 705-746. Universidad de Jaén.

Di Blasi Regner, M y Ramírez Daneri, S. (2016). Análisis geométrico del mecanismo biela - manivela. *Vertientes del conocimiento, Vol. 3, 3.* Pp. 69-73.

Di Blasi Regner, M. y Rodríguez, M. (2016). El fenómeno de la desarticulación entre los enfoques sintético y analítico en elipses: un estudio de caso. Revista electrónica de investigación en educación en ciencias, Vol. 11, 2. Pp 16-27.

García, F et al (2019). *Diseño de tareas en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico*. Avances de Investigación en Educación Matemática, 15, Pp. 75 – 94.

Otero, M. (2013). La teoría antropológica de lo didáctico. En M. Otero, M. Fanaro, A. Corica, V. Llanos, P. Sureda, y V. Parra. (Ed.), *La teoría antropológica de lo didáctico en el aula de matemática* (Pp.15-27). Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina: Dunken.

Ruiz Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona, España. Disponible en: https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=2343969

Conferencia Central GTD-2.1

Cinco Problemas no rutinarios en un curso de Matemática Superior

Juan E. Nápoles Valdés
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, Argentina

jnapoles@exa.unne.edu.ar

Introducción

Nos enfrentamos a uno de los mayores retos que ha sufrido la Humanidad, esto no solo se traduce en la propia existencia, suficientemente importante por si sola, si no en la supervivencia de un proceso social que incluye como uno de sus pilares la Educación, en particular la Educación Matemática.
Creemos que debemos enfrentar hoy, el quehacer en las aulas, con problemas que vayan más allá de generar, con su solución, un determinado conocimiento, si no de establecer patrones de pensamiento y hábitos de razonamiento, útiles en su vida profesional y académica futura.
En esta Conferencia proponemos cinco problemas no estándares concebidos en esta dirección.
En esta dirección, cabe señalar que el marco didáctico-metodológico, en el que está enmarcada nuestra propuesta, es el siguiente:

1. Concebir de manera dinámica a la matemática, lo que se expresa en la célebre frase de Philip E. Jourdain, en la introducción a su texto *La naturaleza de la matemática*, cuando al declarar el objetivo central apuntaba: «Espero que conseguiré mostrar que el proceso del descubrimiento matemático es algo vivo y en desarrollo»[8]. Esta concepción se refleja en una enseñanza basada en la *resolución de problemas*, tanto para el desarrollo de diversas habilidades lógicas de los alumnos, como para aclarar cuáles de aquellos hechos fueron los que motivaron el surgimiento de un concepto y por qué, cuál era el marco de rigor en aquel entonces, cuál la metodología, las concepciones y cómo influyeron todos estos factores para que el desarrollo de la matemática se diera en una dirección y no en otra.

2. Aceptar el triple significado de los objetos matemáticos: institucional, personal y temporal[9] (ver Díaz y Batanero (1994); y para algunas observaciones, Nápoles (1997b)).

---

[8] Philip E. B. Jourdain, matemático francés (1879-1919), ver Jourdain (1976).

[9] El conocimiento se produce con **continuidad temporal** y no sólo en el ámbito reconocido **institucionalmente** para ese fin, se produce en **todos los ámbitos de la vida humana**. Los distintos conocimientos que se producen se pueden parcelar para su análisis y calificar a

3. Distinguir entre una *argumentación*, una *prueba* y una *demostración*, y la necesaria dosificación de éstas en el currículo escolar, así como las discusiones en torno a las concepciones clásicas sobre la demostración matemática y el marco de rigor de las mismas[10]. El concepto de prueba matemática no sólo como una verificación formal de un resultado, sino como un argumento convincente, como un medio de comunicación, ha adquirido mayor importancia últimamente sobretodo vinculado a ciertos problemas de educación matemática. Así, se prefieren en ocasiones pruebas que expliquen, en vez de pruebas que sólo "prueben". Tanto las pruebas que prueban como las pruebas que explican son válidas. Han adquirido relevancia, en los últimos tiempos incluso, las llamadas *pruebas sin palabras*, donde las representaciones geométricas vendrían a jugar el papel de las explicaciones necesarias.

Problema 1. Obtener la Solución de una Ecuación Diferencial Lineal de Primer Orden

Es bien sabido que la mayoría de los cursos de ecuaciones diferenciales ordinarias comienzan desarrollando ejemplos físicos (desintegración radioactiva), biológicos (crecimiento de poblaciones), etc. Proponemos comenzar con un problema matemático, partiendo del conocimiento que tienen los alumnos del cálculo diferencial, en esencia, sabiendo que la exponencial puede definirse por la ecuación $x'=x$. Es decir, discutimos primeramente resolver la ecuación anterior, y después llegar al siguiente lema:

Lema. Sea $t_0 \in (\alpha,\beta)$. Una función $v: (\alpha,\beta) \to R$ es solución de la ecuación diferencial

$$x'=a(t)x, \qquad (1)$$

(ihq

si y solo si, existe una constante real K tal que $v(t) = Ke^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$, para todo $t \in (\alpha,\beta)$.

Una vez presentado este resultado de manera heurística, se demuestra muy fácilmente con ayuda del cálculo. Debemos destacar que este lema describe *todas* las soluciones de la ecuación lineal homogénea (1); son todas aquellas proporcionales a $e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}$. Esta discusión preliminar

---

cada una de las facetas separadas con un nombre diferente, sin embargo, en el sujeto que conoce tal separación es imposible de modo que la actividad matemática ha de tener en cuenta tal diversidad de fuentes de conocimiento, así como los condicionantes que tiene el conocimiento matemático inmerso en el potente conocimiento cultural. Ambos planos de análisis de dentro y de fuera de las instituciones escolares, creemos que pueden ser válidos para aportar luz sobre los procesos cognitivos.

[10] Sucintamente podemos decir, que una **argumentación** es la acción de hacerle saber algo a alguien, puede que uno mismo, que una **prueba** es un tipo especial de argumentación que incorpora un valor epistémico verdadero y que **demostración** es una prueba lógicamente concluyente.

nos sirve para llegar al resultado fundamental:

Teorema. Dado el punto (t_0,x_0) perteneciente a la banda $(\alpha,\beta)x\mathbf{R}:=\{(t,x): \alpha<t<\beta, x\in\mathbf{R}\}$, existe una única solución de la ecuación diferencial

$$x'(t)=a(t)x+b(t)$$

cuya gráfica pasa por dicho punto, y que está definida para todo t del intervalo (α,β).

En dicho teorema, debe hacerse hincapié que la demostración de existencia de la solución es *constructiva*. No sólo se demuestra la existencia, sino que se da un procedimiento para encontrar la solución que cumple la condición inicial $x(t_0)=x_0$.

Como culminación de todo el proceso, se recomienda proponer el siguiente problema:

Demostrar que una función $\varphi(t)$ es la solución de la ecuación diferencial $x'(t)=a(t)x(t)+b(t)$ si y solo si existe una constante C tal que

$$\varphi(t)=\left[\int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{s} a(\tau)d\tau} b(s)ds + C\right] e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}, \quad \forall t\in(\alpha,\beta).$$

Problema 2. Obtener la Solución Aproximada de una Ecuación (o Sistema) de Segundo Orden

De acuerdo al Teorema de Poincaré-Bendixson, el caos no puede ocurrir en sistemas bidimensionales tales como:

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x,y), \\ dy/dt &= g(x,y). \end{aligned} \tag{2}$$

No obstante, cuando tales sistemas (de hecho, ecuaciones diferenciales de segundo orden) son resueltos numéricamente, pueden llevar a discusiones interesantes y motivadoras. Consideremos el primer método numérico estudiado, desde el punto de vista histórico, el Método de Euler (ver Bakhvalov, 1980) que es muy simple de implementar:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + hg(x_n,y_n) \end{aligned} \tag{3}$$

donde h es el paso de aproximación. Si h es suficientemente pequeño, la solución del sistema (2) puede ser descrita aproximadamente por (3). Desafortunadamente, si h es grande, la solución numérica se desvía significativamente de la solución real y puede aproximarse a una solución periódica, a un atractor extraño o escapar al infinito.

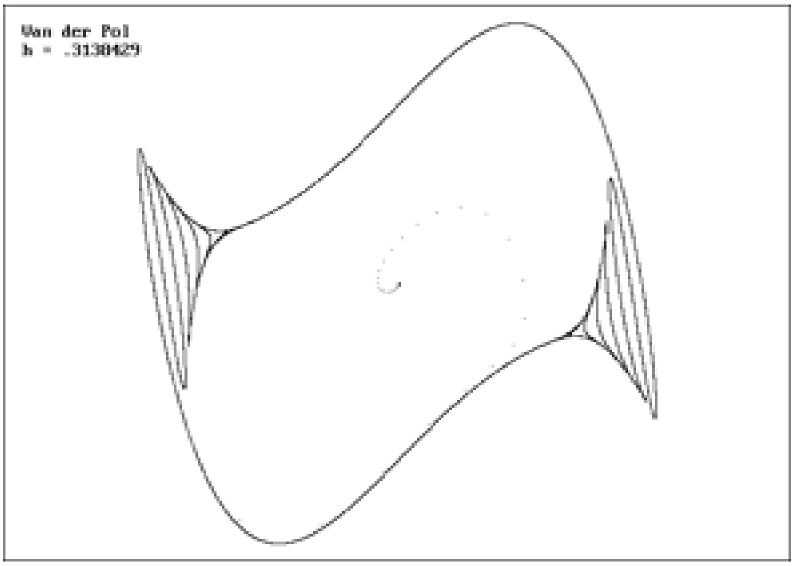


Figura 1. Solución del Oscilador de Van der Pol con b=1 y h=0.3138429

Fuente: http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm. Como ejemplo, consideremos el oscilador de Van der Pol dado por

$$dx/dt = y$$
$$dy/dt = b(1 - x^2)y - x$$

cuya solución es un ciclo límite. Este modelo es usado para describir el comportamiento de circuitos eléctricos, ciertos tipos de estrellas pulsantes y muchos fenómenos más. Esta ecuación, con b=1, es resuelta por el Método de Euler (ver el programa ejecutable en DOS EULERMAP.EXE en http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm cuyo código fuente en BASIC está disponible como EULERMAP.BAS, y con el que se han construido las figuras de este problema). Para h menor que 0.1 la solución es razonablemente aproximada, pero cuando h aumenta, el ciclo límite típico (ver Coddington y Levinson (1955)) se convierte en un comportamiento caótico. Un ejemplo de una solución en el régimen caótico para condiciones inciales x_0=y_0=0.01 se muestra abajo.

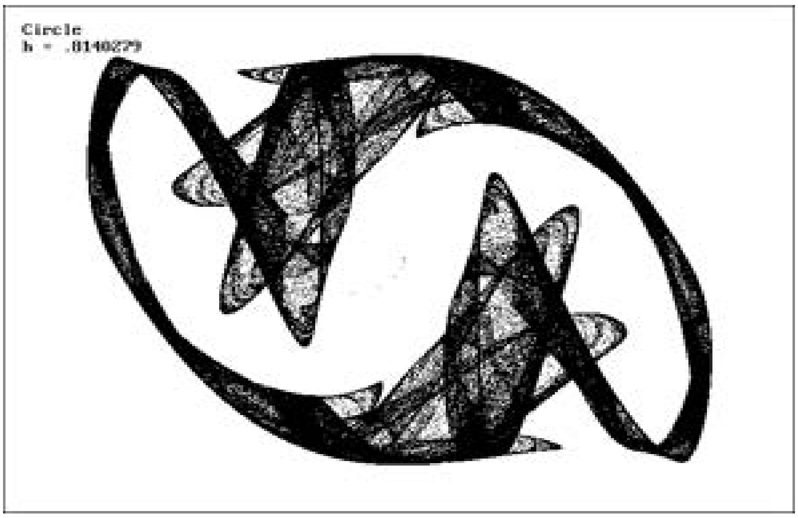


Figura 2. Comportamiento caótico del sistema x'=y, y'= (1 - x^2 - y^2)y – x; con h=0.8140279

Fuente: http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm.

Un sistema similar con un ciclo límite circular ($x^2+y^2=1$) es dado por el sistema

$dx/dt = y$,
$dy/dt = (1-x^2-y^2)\ y - x$

Su comportamiento es similar a la Ecuación de Van der Pol y con h suficientemente grande, produce el atractor extraño de la Figura 2.

En ausencia de disipación, un sistema Hamiltoniano característico es el oscilador armónico simple

$dx/dt = y$,
$dy/dt = -x$,

Fuente: http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm.

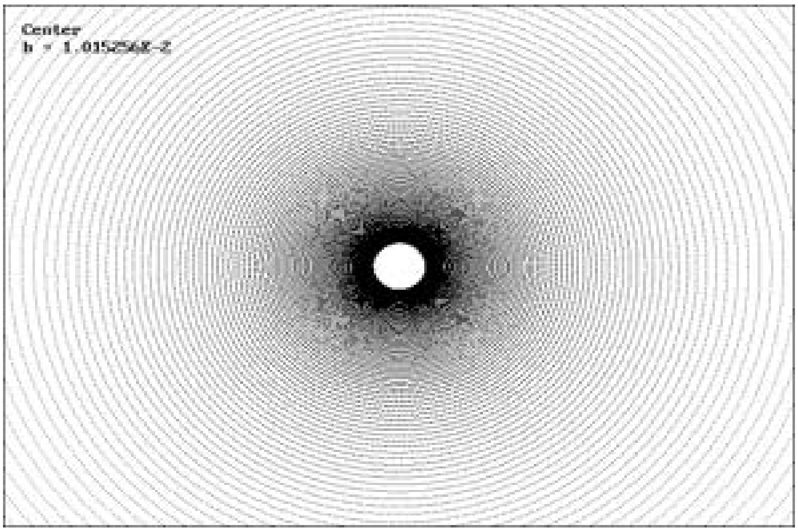


Figura 3. Soluciones del Oscilador Armónico Simple, con un centro en el origen y h=0.01015256

cuyo espacio fase solución, es una trayectoria circular, un centro, en el (0,0). La trayectoria será cerrada después de un período, independientemente de las condiciones iniciales. Cuando la resolvemos por el Método de Euler, la trayectoria no se cierra sobre sí misma para cualquier h, sino que forma espirales crecientes, debido a que cada iteración hace avanzar la trayectoria sobre una tangente al círculo en la posición de la iteración previa. Esta situación es mostrada en la Figura 3.

Un ejemplo final es dado por el sistema sugerido por Lorenz en su *The Essence of Chaos* (ver Lorenz (1995)),

$dx/dt = x - y - x^3$,
$dy/dt = x - x^2y$,

el cual también posee un ciclo límite aproximadamente circular. Con un *h* suficientemente grande, el sistema resuelto por el Método de Euler nos lleva al atractor extraño de la Figura 4.

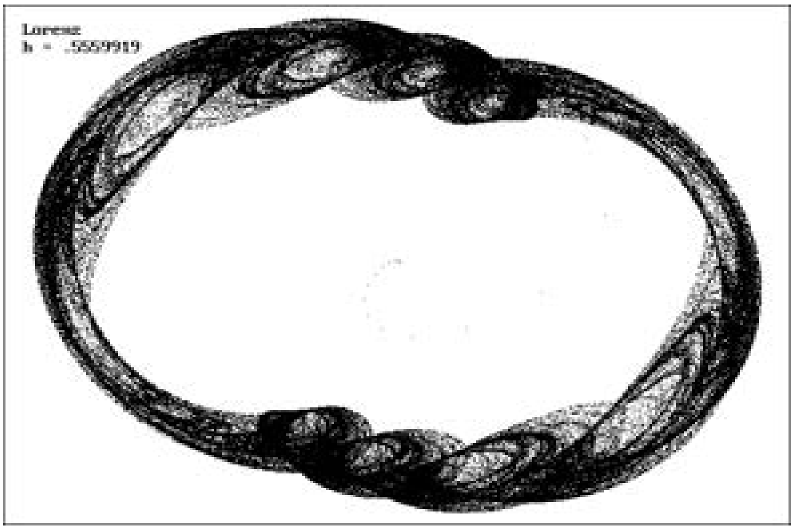


Figura 4. Soluciones del sistema x'= x - y - x^3, y' = x - x^2y, usando el Método de Euler con h=0.5559919

Fuente: http://sprott.physics.wisc.edu/chaos/eulermap.htm

Todos estos ejemplos nos muestran algo que ya sabíamos; el Método de Euler es muy sensible a los valores de h; no obstante, otros métodos numéricos también exhiben el mismo fenómeno si se toma un paso suficientemente grande.

Problema 3. Calcular la Solución General de una Ecuación Diferencial de Segundo Orden

Una cuestión crucial de la concepción actual del curso de ecuaciones diferenciales es su carácter algorítmico-algebraico, la que está determinada básicamente por la relación tan cercana que existe entre el desarrollo del álgebra (como búsqueda de las raíces de un polinomio en términos de radicales) y de las ecuaciones diferenciales lineales (en cuanto a su integración por cuadraturas) del que ya hemos hablado y que aún en la concepción moderna de operadores lineales, está presente. Un bosquejo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias nos permite hacer las siguientes observaciones respecto al programa actual:

1. El concepto *ecuación diferencial* nace (a fines del siglo XVII) como una ecuación que relaciona diferenciales. Este concepto se mantiene estable hasta que Cauchy (hacia 1821) agrega la derivada. Esta última definición es la que se conserva en la actualidad, desapareciendo los diferenciales, aunque cuando se exponen los métodos de resolución de las *ecuaciones diferenciales ordinarias* de primer orden se usa la primera concepción sin explicitarla (es decir, la derivada ya no es la derivada, sino un cociente entre diferenciales), renaciendo el manejo algebraico del que tanto hemos hablado, pues hace de este método de solución una herramienta "apetecible" desde el punto de vista docente, sin olvidar el auxilio que en dicha labor brinda el *principio de superposición*[11].

---

[11] Principio que nos permite expresar la solución de la suma de dos ecuaciones diferenciales, como la suma de sus soluciones.

2. La forma de introducir las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en la obra de Euler y Cauchy, es tomando la expresión diferencial pdx + qdy, como la diferencial de una cierta función u= u(x,y), y de aquí a du=0 y finalmente a la solución general u(x,y)=c. En el caso en que no se pueda encontrar la función u(x,y), construyen un factor de integración que convierte en exacta la ecuación diferencial. Después estudian los otros tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden (v.g., las lineales, de Bernoulli, las homogéneas, etc.), teniendo siempre en mente que necesitan construir un factor de integración.

Esta situación, en general, no se conserva en el currículo actual. Los principales hechos que propiciaron esto son la aparición y demostración del Teorema Fundamental del Álgebra (la primera demostración cierta la ofreció Gauss a los veintidós años en su tesis doctoral) que, en su formulación actual, afirma que todo polinomio de grado *n* en C, tiene exactamente *n* ceros complejos (iguales o distintos), por lo que C es un dominio numérico que proporciona solución a cualquier ecuación algebraica, y el desarrollo de la Teoría de Funciones de Variable Compleja, resultados que permitieron presentar una teoría de "solubilidad" completa para las ecuaciones lineales de orden *n*, brindando, de esta manera, una formidable herramienta docente para modelar múltiples fenómenos prácticos.

3. Respecto del programa de estudio actual, existe una clara permanencia del escenario algebraico sobre los otros dos escenarios, el cual se debe, además de la contundencia de la componente histórica y a lo señalado antes, a otros factores de los cuales señalaremos los siguientes:

a) Los procedimientos algorítmico-algebraicos son más sencillos de desarrollar en los estudiantes. Muy vinculado con las tendencias cognitivas y conductistas de la educación matemática que, poco a poco, y en mayor medida gracias al rechazo de las llamadas matemáticas modernas, ha ido desapareciendo y dando lugar al *problem solving*, con una concepción didáctica y epistémica, totalmente diferente.
b) Instrumentar los escenarios geométrico y numérico en el aula requiere necesariamente de los medios de cómputo, ya que de otra forma es difícil visualizar, v.g., los campos de pendientes y las curvas isoclinas, por un lado, y las soluciones aproximadas, por el otro.
c) Con la incorporación de la Trasformada de Laplace, como un nuevo método de solución, hacia la segunda mitad de este siglo, los procedimientos algebraicos vuelven a cobrar un nuevo impulso en la enseñanza. Éste enfoque algebraico recibió soporte adicional con la nueva ola de las matemáticas modernas, y el «¡Abajo Euclides!» ya conocido.

Por todo lo anterior, creo que este problema debe concertar mayor atención por parte del profesor, quien, una vez sumergido en la historia del problema, puede así intentar buscar la solución en forma exponencial, llegando a la idea de ecuación característica como base para obtener la solución general de la ecuación dada y fundamentar la definición de *sistema fundamental de soluciones*, en términos de las funciones elementales.

Problema 4. Determinar el límite, cuando $x\to\infty$, de la Solución General de la Ecuación Diferencial: $y'=y^2-1$

Analizando el marco algebraico, su solución es muy elemental, pues es una ecuación en variables separables y resoluble en cuadraturas, cuya solución se puede expresar por

$y=\dfrac{1+ce^{2x}}{1-ce^{2x}}$. Es claro que esta expresión no les dice mucho a los estudiantes sobre el comportamiento de las soluciones: así declaran que dicho límite es -1. Aún teniendo el comportamiento gráfico (véase Figura 5), es necesario realizar el análisis de cuándo el límite es -1, ocasión propicia para revelar la necesidad de tener en cuenta las condiciones iniciales y el análisis general del problema. De nuevo recalcamos la necesidad de la integración de los diferentes acercamientos para completar el análisis.

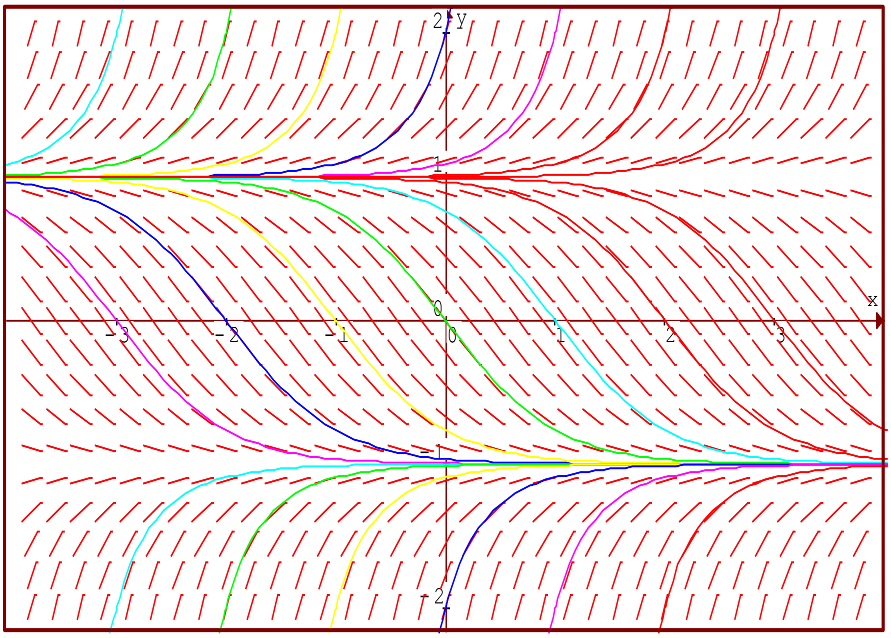


Figura 5. Campo de isoclinas de la ecuación y´= y^2-1, en la que se han trazado algunas soluciones

Fuente: Campo de Direcciones realizado por el autor con el Graphmatica®.

Problema 5. Encontrar una relación entre los valores propios y la estabilidad de una ecuación diferencial de segundo orden

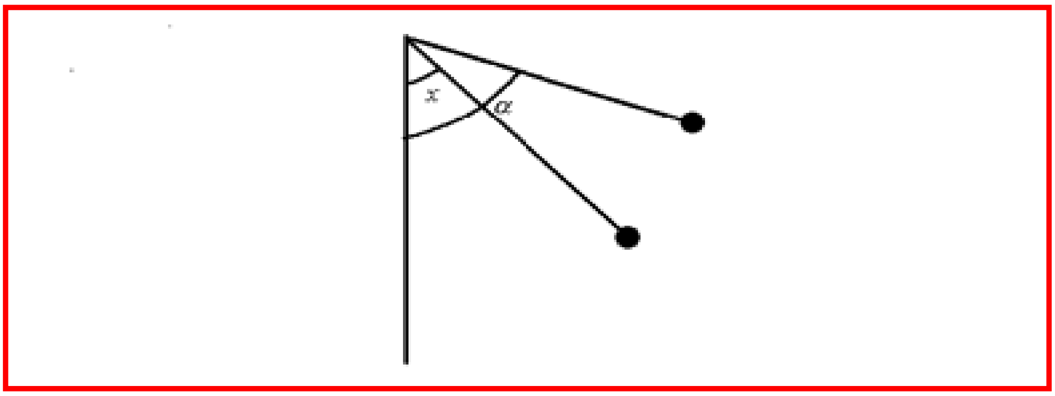


Figura 6. Visión esquemática del péndulo simple, donde se han representados dos desplazamientos, x y α

Para un tratamiento de este problema, siguiendo con mayor rigor su historia, debemos considerar un sistema bidimensional autónomo general del tipo (ver Boudonov, s.f)

$$\begin{aligned} x' &= F(x,y), \\ y' &= G(x,y), \end{aligned} \qquad (4)$$

siendo F(0,0)=G(0,0)=0. Un ejemplo muy conocido de tal sistema, es el caso de un péndulo simple, como se ilustra en la Figura 6.

Fuente: Del Autor.

Conclusiones Finales

A pesar que hemos usado el tema ecuaciones diferenciales ordinarias para ilustrar nuestras ideas, pensamos que nos ha servido para mostrar cómo es posible consolidar orgánicamente nuestro punto de partida: la enseñanza por resolución de problemas con un enfoque histórico, que permita a los alumnos el desarrollo de habilidades lógicas tan necesarias en su perfil profesional (sea el que fuere), como producto de la riqueza intelectual de las situaciones problémicas en que se vió envuelto, y por haber tenido un contacto "afectivo" con el material de estudio. Esto influirá, por otra parte, en una mejor asimilación de dicho material y en una mayor consistencia del mismo.

De lo anterior resulta necesario extraer algunos aspectos importantes que a modo de conclusiones resumimos. Esta propuesta permite al alumno:

- Adquirir una visión dinámica de la matemática, así como del proceso de creación matemático, hechos, conjeturas, teoremas, problemas abiertos, etc.
- Conocer el sgnificado de solución de una ecuación diferencial, mediante la integración de los tres marcos que hemos distinguido (algebraico, numérico y geométrico).
- Conocer el rol que desempeñan los paquetes simbólicos de cálculo y las calculadoras gráficas, más allá de simple herramienta.

Tal como ya hemos señalado, el curso de ecuaciones diferenciales ordinarias tiene que realizarse bajo la óptica de una integración de los tres escenarios discutidos antes. En concreto, la integración de estos se ha mostrado como una herramienta poderosa que permite al estudiante interactuar con los diversos marcos y desarrollar el pensamiento lógico en los mismos. De este forma, el curso será más productivo e interesante.

Queremos señalar, por último, algo muy necesario a la hora de utilizar los recursos históricos en nuestras clases: la objetividad histórica no debe ceder ante las necesidades pedagógicas (ver Garciadiego (1997)). Ejemplo de esto son los muy conocidos de *Men of Mathematics*, de E.T. Bell (1937) y *Whom the gods love*, de L. Infield (1948), mal concebidos como tratados históricos en virtud de un determinado interés motivacional.

Referencias Bibliográficas

BAKHVALOV, N. (1980). "*Métodos numéricos".* Madrid: Paraninfo.
BELL, E.T. (1937). "*Men of Mathematics".* New Cork: Simon and Shuster.
BOUDONOV, N. (1980). "*Teoría de la estabilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias"*. La Habana: Universidad de la Habana.
__________ (s/f). "*Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias"*. La Habana: Universidad de la Habana.
CODDINGTON, E. and LEVINSON, N. (1955). "*Theory of Ordinary Differential Equations"*. McGraw-Hill, New York.
DÍAZ, G. J. y BATANERO, M. C. (1994). "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol.14, No. 3. pp. 325-355.
FARFÁN, R. M. y HITT F. (s/f). "*Heurística".* México: Sección de Matemática Educativa, CINVESTAV-

IPN.
GARCIADIEGO, A. (1997). "Pedagogía e historia de las ciencias, ¿simbiosis innata?". En: ZALAMEA, F. (ed.). *El velo y la trenza*. Editorial de la Universidad Nacional (Colombia).
GRATTAN-GUINNES, I. (2000). "A Sideway Looks at Hilbert´s Twenty-three Problems of 1900", Notices of the AMS, 47(2000), 752-757 (recomendamos también los sitios http://www.geocities.com/Athens/4346/hilb.html y http://boletinamv.ma.usb.ve/conten/vol5/v5n2p117.pdf).
HALMOS, P. (1980). "The heart of the mathematics". In: *American Mathematical Montlhy*. Vol. 87, pp. 519-524.
HITT, F. (1992). "Intuición en matemática, representación y uso de la microcomputadora". En: *Memorias de la sexta reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e investigación en matemática educativa*. Cuernavaca, Morelos, Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, julio, pp. 254-266.
________ (1995). "Intuición primera versus pensamiento analítico: dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa". En *Revista Educación Matemática*. Colombia (preprint).
INFIELD, L. (1948). "*Whom the gods love"*. New York: Whittlesey House.
JOURDAIN, P.E.B. (1976). "La Naturaleza de la Matemática" en James R. Newman (comp.). "Sigma. El Mundo de la Matemática", Ediciones Grijalbo, Barcelona-Buenos Aires-México, 1976, tomo 1, 343-408.
LORENZ, E. N. (1995). "La esencia del Caos", Madrid, Debate, 1995.
NÁPOLES, J. E. (1997a). "Consideraciones sobre el uso de recursos históricos en algunos problemas de Educación Matemática", Ponencia presentada a RELME-11, México: Morelia.
__________ (1997b). "Sobre el significado de los objetos matemáticos. El caso de los irracionales". En: *Memorias COMAT'97*. Cuba: Universidad de Matanzas.
__________ (1998). "El papel de la historia en la educación matemática". Memorias En: *3er Congreso "Enseñanza de la matemática en la educación superior*". Cuba: Universidad de la Habana.
__________ (1999). "La resolución de problemas en la escuela. Estrategias no Convencionales". 2do Congreso Argentino de Educación Matemática. Chaco: Resistencia.
__________ (2000a). "Enfoques de la Ingeniería Didáctica". En: *Memorias II Simposio de Educación Matemática*. Pcia. Buenos Aires: Chivilcoy, mayo 2-5.
__________ (2000b). "La resolución de problemas en la escuela. Reflexiones preliminares". Material Docente GIEMat (UTN-FRR). Chaco: Resistencia.
__________ (2000c). "La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones". En: *Revista Función Continua*. Universidad Nacional de San Martín. Provincia de Buenos Aires, Vol.8, pp. 21-42.
NÁPOLES, J. E. y NEGRÓN, C. (2002). "La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contada por sus libros de texto". Xixim, Revista Electrónica de Didáctica de la Matemática. Universidad Autónoma de Querétaro, Año 3, No.2, Octubre, pp. 33-57 (http://www.uaq.mx/matematicas/redm/articulos.html?1002)
SIMMONS, G.F. (1991). "*Differential Equations with Applications and Historical Notes"*. McGraw-Hill, New York.
__________ (1993). "*Ecuaciones diferenciales"*. Madrid: McGraw-Hill/Interamericana de España, S.A.
SMITH, D.E. (1929). "A source book in mathematics", McGraw-Hill, New York, 1929.[12]
YOSHIZAWA, T. (1966). "Stability theory by Liapunov´s Second Method", The Mathematical Society of Japan, Tokyo.

[12] Reimpreso: New York Public Library, New York, 1951-1952. Reimpreso: Dover, New York, 1959. Reseñado: Isis 14(1930), 268-270.

Conferencia Central GTD-2.2

La importancia creciente de la Heurística y la Metaheurística en la Resolución de Problemas

Lic. Jorge E. SAGULA

Universidad Nacional de Luján-DCB, Argentina
UCP, Argentina

Jorgesagula@gmail.com

Resumen

El objetivo de esta conferencia se centra, principalmente, en explicar “el por qué” temas provenientes de otros campos, con otras miradas, con múltiples enfoques deben ser vistos en todo momento, en forma transversal, como enriquecedores, desde la percepción de la realidad (actual o pasada), donde los canales perceptores dan paso a los receptores y a la interacción con la cognición, permitiendo modelar, construyendo dinámicamente escenarios en los cuales la capacidad de conversión simbólica de la Lógica y la Matemática juegan roles esenciales. Es en esta instancia donde términos provenientes de otras disciplinas, permiten la transversalización del conocimiento, dando lugar a enfoques interdisciplinarios, así surgen, por caso los Modelos Heurísticos y los Modelos Metaheurísticos; si estos modelos quedaran encerrados en sí mismos, en sus propias disciplinas, se caería en una contradicción por definición.
La Educación Matemática debe comprender a los Modelos Heurísticos y Metaheurísticos y de tal forma “apropiarse” de ellos y de sus propias evoluciones, a fin de mejorar la capacidad cognitiva y el consecuente aprendizaje, así, como en el lema de este Simposio, dispondrá de “Inteligencia Creativa al Servicio de la Educación y el Aprendizaje”.

Palabras Clave: Percepción. Resolución de Problemas. Heurística. Metaheurística. Aprendizaje.

Introducción

Disciplinas tales como la Inteligencia Artificial, la Matemática Aplicada, la Estadística y la Investigación de Operaciones contribuyen con vastos modelos, técnicas y metodologías a la Resolución de Problemas, muchos de estos modelos son generados y diseñados merced a la Heurística y la Metaheurística, y a su vez, por su importancia creciente, son pilares de fuste, actualmente en las Ciencias de los Grandes Datos (Big Data Science), destacando entre otros: Reglas de Asociación, Algoritmos Genéticos, Análisis de Regresión, Análisis de Clustering, Machine Learning, Modelos de Análisis de Redes Sociales, Redes Neurales, Data Mining, Series Temporales.

La Heurística, que engloba las técnicas que permiten incrementar la eficiencia de un proceso de búsqueda, y su evolución, la Metaheurística, que corresponde a "un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda" (*Osman & Laporte*, 1996) son naturalmente pilares insustituibles aportantes de metodologías, métodos y/o técnicas para el análisis y procesamiento de *Big Data*, específicamente mediante: Redes Neurales, Algoritmos Genéticos, Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Enjambre de Partículas), y otros tantos modelos de búsqueda y aprendizaje en el contexto de la Inteligencia Artificial **[6]**.

Cuando comienzan las investigaciones en Aprendizaje Automático (Machine Learning) en el campo de la Inteligencia Artificial en la década de 1980, a partir de las ideas de Alan Turing en 1950, el objetivo fue desarrollar técnicas de aprendizaje para máquinas, con el propósito de "generalizar comportamientos e inferencias para un gran conjunto de datos", y esta respuesta es "como imitación de la forma de aprendizaje del cerebro humano", y sus estrategias se sustentan en Algoritmos basados en Regresión y Algoritmos basados en Árboles de Decisión, precisamente mediante la potencia de técnicas y metodologías "apropiadas" de la Heurística y la Metaheurística.

Deep Learning (Aprendizaje Profundo), avance de Machine Learning, debe su denominación a *Geoffrey Hinton* (Premio Alan Turing, 2018) en 1986, al introducir el Algoritmo **Backpropagation**, empleado para entrenar Redes Neurales Multicapas (Redes Neurales Profundas), emulando la percepción humana inspirada en el cerebro y la conexión neuronal. Al efecto, configura parámetros básicos sobre los datos, entrenando a una máquina para que "aprenda" reconociendo patrones utilizando muchas capas de procesamiento. Las técnicas utilizadas por Deep Learning mejoran las capacidades de clasificación, reconocimiento, detección y descripción; y sus campos de desarrollo son: Reconocimiento de Patrones, Identificación de Imágenes y Analytics (Predictiva). Sus mayores logros se ubican en: Clasificación de Imágenes, Reconocimiento del Habla, Detección de Objetos y Descripción de Contenidos. En esta temática, atinente a la Resolución de Problemas, tanto la Heurística como la Metaheurística juegan roles esenciales.

Desde la Resolución de Problemas hasta Etnomatemática, Heurística y Metaheurística

La "Resolución de Problemas" es un proceso artesanal, que contiene el conocimiento disciplinar, y donde el modelador debe disponer de estas características:

- Intuición + Creatividad para interpretar el contexto.
- Discernir mejor adaptabilidad de contenido matemático.
- Disposición de sentido lúdico para *jugar* con las variables involucradas.

En esa línea, el matemático húngaro George Polya **[5]** presentó en su primer libro un Modelo de Resolución de Problemas, estructurado en cuatro secciones:

1) "En el salón de clases"

2) “Cómo resolver problemas”

3) “Un breve diccionario de heurística”

4) “Problemas, sugerencias, soluciones”

Y planteó la premisa: “Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de un problema, hay un cierto descubrimiento”.

Cuando el Dr. Ubiratan D’AMBROSIO, educador y matemático brasileño (Premio Félix Klein), en el año 1997 impulsó el término “Etnomatemática” en la Asociación Americana para el Avance de las Ciencias, abrió distintas posibilidades para saber el significado y el alcance de la nueva denominación, cubriendo una amplia gama, evolutiva, sobre la cual resalto las siguientes:

"Las matemáticas practicadas entre grupos culturales identificables tales como sociedades tribales nacionales, gremios, niños de cierta edad y clases profesionales" (D’Ambrosio, 1985).

“Las codificaciones que permiten a un grupo cultural describir, manejar y comprender la realidad” (Ascher, 1986).

"He estado usando la palabra *etnomatemáticas* como modos, estilos y técnicas (*ticas*) de explicación, comprensión y copia del entorno natural y cultural (*matema*) en distintos sistemas culturales (*etno*)” (D’Ambrosio, 1999).

"¿Cuál es la diferencia entre etnomatemática y la práctica general de la creación de un modelo matemático o un fenómeno cultural y otro tipo de fenómenos? Esencialmente es la relación entre la intencionalidad y un status epistemológico” Eglash, R., Bennett, A., O'Donnell, C., Jennings, S., y Cintorino, M. (2006).

Al planificar, como Director Académico del 10º SEM, pergeñé la idea de un Foro, y consulté a un amigo, el Dr. Ubiratán D’Ambrosio al efecto, y su respuesta fue que la idea era original, por cuanto hasta ese momento no se había desarrollado la temática; consecuentemente, el día 29-04-2009 en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján, tuvo el lugar el Panel: “Interdisciplinariedad y Transdisciplinariedad en Educación Matemática: una necesidad creciente”. En ese contexto presenté como ideas centrales:

- La Educación Matemática integrada a nuevas TICs, parafraseando a Ubiratán D’Ambrosio, en sus palabras en el IV CIEM’2007.
- Y la Educación Matemática en Evaluación, en términos de la cuantificación del conocimiento sobre estructuras reales, hacia la integración de Matemática y Sociedad y Educación Crítica como Nuevo Paradigma: desde la Interdisciplina hacia la Transdisciplina.

La palabra *Heurística* proviene del griego “*heuriskein”,* significa*“buscar”.*

Heurística es una técnica que permite incrementar la eficiencia de un proceso de búsqueda, a costa de presentar, aspectos de incompletitud; pero, posibilita mejorar la calidad de los caminos explorados.

Existe una clase general de problemas que formalmente pueden resolverse de acuerdo a estos pasos:

1- Elegir una *acción* entre un conjunto de *posibles acciones*.

2- Realiza la *acción*; por tanto, se modifica la acción inicial.

3- Procede a la evaluación de *nuevas situaciones*.

4- Rechazar las *situaciones desfavorables (o desventajosas)*.

5- Si se alcanzó la *situación objetivo*, finalizar; si no, elegir una y repetir los pasos anteriores.

¿Cómo se puede definir Heurística? Conforme *Zanakis y Evans* (1981), *Heurística* constituye "un conjunto de procedimientos simples, frecuentemente basados en el sentido común, que conforme se supone permitirán obtener una buena solución a problemas difíciles, en forma rápida y fácil".

Es injusto, hablar de Heurística sin citar a G. Polya, quien

¿Qué factores, entre otros, justifican emplear heurísticas?

(a) La inexistencia de un método exacto de resolución.

(b) La existencia de métodos muy costosos en tiempo o uso de memoria.

(c) Cuando es innecesaria una solución óptima.

(d) La desconfianza sobre los datos disponibles.

(e) Restricciones en cuanto a períodos de tiempo para resolución.

(f) Cuando es necesario un paso previo en la construcción de otro algoritmo.

Recuerdo, que hace 15 años, alguien me preguntó: "Pero, Heurística es Matemática", y le respondí: "Son dos palabras diferentes, y, por cierto, con significados diferentes"; sin embargo, la Heurística o Know-How es modelable y su esencia capturada por la Matemática construyendo al efecto Modelos para que permiten la Resolución de Problemas cuando no existe un método más directo.

Metaheurística, significa "Más allá de la heurística" o "Refinamiento de heurística". El término surge en Operation Research impulsado por Fred Glover al introducir el Método Búsqueda Tabú (1988, 1997); así, Osman & Laporte (1996) definen *Metaheurística* como "un proceso iterativo que conduce una heurística subordinada, combinando diferentes conceptos para explorar y explotar las características que pueda exhibir el espacio de búsqueda".

Así, puede afirmarse que la *Metaheurística* surge, por caso, de la observación metódica en las ciencias del comportamiento, resultando Modelos Metaheurísticos tales como: Redes Neurales, Algoritmos Genéticos (ambos Bio-Inspirados), Swarm Intelligence (Colonias de Hormigas, Colonias de Abejas), en este último caso siendo consecuencia de la *Etología*, entre otros.

Ciertamente, rápidamente se puede inferir que "la percepción" une a las tres temáticas (Etnomatemática, Heurística y Metaheurística) a través de la Interdisciplinariedad, pero "una mejor percepción", permite incrementar el conocimiento y consecuentemente mejorar los modelos que, desde el simbolismo matemático, en su más amplia expresión, posibilitan la construcción de meta-modelos aptos en la resolución de problemas generales y complejos, y, extrapolables en la medida que se conozcan los contextos de aplicación.

Específicamente, la misma tecnología del Dataísmo y procesos asociados a las Ciencias de los Grandes Datos, puede volverse en contra, si no se diseñan y construyen Paradigmas Reales que eviten entrar en "situaciones de pánico", donde se elige entre "lo menos malo y lo malo", en lugar de tomar al menos decisiones "sub-óptimas" o "cercanamente óptimas", sin poder llegar a "soluciones óptimas"; así, se podrían "limar asperezas" entre las teorías que plantean tareas bien diferenciadas **[2]**.

¿Por qué son necesarios los enfoques múltiples?

La profundidad de la complejidad sólo puede analizarse en el contexto de la interdisciplinariedad, en primera instancia, y en la transdisciplinariedad a posteriori; consecuentemente, para un efectivo tratamiento de estos temas es adecuado dirigirse a un Enfoque Multimetodológico.

La Multimetodología se entiende generalmente como el "arte" de ir más allá del uso de una única metodología con el propósito de combinar generalmente varias metodologías, en su totalidad o en parte, y si la situación lo amerita, provenientes de distintos paradigmas, de forma de enfrentar la riqueza del mundo real **[3]**.

Es necesario enfatizar que Multimetodología no se relaciona con un paradigma o una metodología específica, o con una forma específica de combinación de metodologías, sino que supera estas posibilidades, orientándose a vincular, integrar y combinar diferentes metodologías, técnicas y herramientas, desde un mismo paradigma o varios y distintos paradigmas, para responder a conflictos en diferentes situaciones contextuales, y por tanto, inicialmente existe una heurística y una heurística operativa que permite mejorar las capacidades cognitivas a la hora de definir qué conceptos son necesarios para construir, en modo de convergencia, la integración de metodologías, técnicas y herramentales, aunque los mismos provengan de diferentes ciencias y/o disciplinas, de modo que los sistemas sensoriales humanos juegan un rol esencial para ello, pues la clave está en cómo dirigirlos disponiendo de "la intención de registrar", y por supuesto "interpretar el contexto", realimentando la información y el conocimiento, generando conocimiento del conocimiento, refinando el conocimiento, en pos del meta-conocimiento, posibilitando el surgimiento de la Metaheurística.

Las Multimetodologías se justifican en la necesidad de estudiar e investigar "*sistemas complejos"*, pues éstos son "consecuencia de varias estructuras (o componentes) que se interrelacionan", y desde la vinculación de sus componentes pues existe información adicional no percibida previamente por el observador; así, esto permite advertir que como fruto de las interacciones entre los componentes se obtienen nuevas propiedades imposibles de explicarse conociendo sólo las propiedades (Propiedades Emergentes) de los elementos aisladamente **[1]**.

Es evidente que, sin modelar adecuadamente un sistema complejo, en general, se obtendrá no más que una irrelevante aproximación; por tanto, el tratamiento de un tema de esta magnitud, independientemente del área temática de proveniencia, se centra en el tratamiento "multidisciplinario", pero específicamente de carácter *interdisciplinario*.

Un principio básico de la Teoría de Sistemas Complejos afirma que toda alteración en un componente del sistema se propaga de diversas formas mediante el conjunto de relaciones que definen la estructura del sistema, y en situaciones críticas (de baja resiliencia), genera una reorganización total. Así, las nuevas relaciones y la nueva estructura emergente, implican modificaciones de los elementos y del funcionamiento del sistema total. Las interacciones entre el todo y las partes no se pueden analizar fraccionando el sistema en un conjunto de áreas parciales correspondientes al dominio disciplinario de cada elemento **[1]**.

Los Sistemas Complejos constituyen la *"vida misma",* por tanto, existen en dominios de variada amplitud, desde la Economía hasta los Sistemas Sociales pasando por áreas de Inteligencia Artificial, tales como: Algoritmos Genéticos, Computación Evolutiva, Redes Neurales, Aprendizaje, Sistemas Distribuidos, etc., generando variaciones de grados de complejidad; así, es necesario realizar un proceso de investigación interdisciplinaria para poder caracterizar y registrar, aún, aproximadamente, las variaciones en los grados de complejidad. Precisamente, los epicentros de estos conceptos iniciales surgen de la Heurística, y el refinamiento de la Heurística, la Metaheurística, apoyadas en la capacidad del ser humano "en concentrarse y percibir", focalizarse en la realidad y encontrar el modo de decodificarla, construyendo un lenguaje simbólico a partir de su inteligencia y hallar, métodos resolutivos de conflictos, independientemente la procedencia del contexto, estando más allá de una propia disciplina; eso lleva a un Proceso de Ingeniería de Conocimiento.

Una aproximación a la Gestión de Conocimiento

El Modelo GPS (General Problem Purpose Solver) **[4]** puede emplearse para describir la concepción de un Modelo de Gestión de Conocimiento (migración desde la Ingeniería de Conocimiento), como adaptación a la Gestión del Conocimiento Matemático, a partir del subsistema perceptual (ingreso de información percibida por el aprendiz), pasando por el subsistema cognitivo (el núcleo de la descomposición temática particular) y el subsistema motor (la administración de la respuesta en términos de las estrategias de resolución de cada situación particular). La cuarta componente del Modelo GPS, la Memoria Externa, la más compleja de analizar para el momento de la concepción del Modelo, puede ser vista ahora como una real interfaz externa, en términos de "la percepción de la realidad" y consecuentemente asociarse a la Metaheurística, como reflejo del contexto específico.

Si bien el Modelo GPS no es la única posibilidad para describir un Modelo de Gestión de Conocimiento Matemático, se postula como una aproximación significativa al momento de describir conocimiento, no sólo orientado a la formación de aprendices sino en términos de la formación y el refinamiento de conocimiento para la comprensión de conceptos en ayuda de los educadores.

Bajo estas consideraciones, tanto la Heurística como la Metaheurística, demuestran una importancia creciente en la Educación Matemática, pues no sólo atañen a la Resolución de Problemas en sí mismos, sino que permiten mejorar las capacidades cognitivas de los educadores y de los aprendices.

Conclusiones

El Pensamiento Heurístico es una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, que precisamente puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; consecuentemente, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas.

El Pensamiento Heurístico abriendo paso al Pensamiento Metaheurístico con la incorporación del Pensamiento Interdisciplinar y el Pensamiento Transdisciplinar, inicialmente en forma colaborativa hacia una forma cooperativa, redundarán en procesos de mejora en la Formación General, en particular en Educación Matemática.

Referencias Bibliográficas

[1] García, Rolando (2006). Sistemas Complejos; Editorial GEDISA.

[2] Kamelman, M., Sagula, J. y Cols. [Caballero Merlo, J. N., Jauregui, J. R., Tolón Estarelles, P. (2020) Un Think Tank de Análisis y Propuestas Técnicas y Metodológicas en pos de un Nuevo Paradigma frente a la Pandemia COVID-19. [**A aparecer**]

[3] Mingers, J. (1997). Multi-Paradigm Multimethodology. John Wiley & Sons, England.

[4] Newell, A.; Shaw, J.C.; Simon, H.A. (1959). Report on a general problem-solving program. Proceedings of the International Conference on Information Processing. pp. 256-264.

[5] Polya, George. How to Solve It? Universidad de Princeton, 1945.

[6] Sagula, Jorge E. (2020). Visión de la Educación Matemática en Convergencia con la Inteligencia Artificial en Contextos Complejos (Tiempos de Pandemia) (desde Big Data a Machine Learning). En Memorias del I SEM-V (I Simposio de Educación Matemática-Virtual). Universidad Nacional de Luján. Luján, Provincia de Buenos Aires, Argentina; 13-14 agosto'2020. **[A aparecer]**

Disertación Invitada GTD-2.1

¿Cómo resolver los retos matemáticos en tiempos de pandemia?

Osvaldo Jesús ROJAS VELÁZQUEZ

Universidad Antonio Nariño, Bogotá, Colombia

Resumen[1]

Enseñar matemáticas hoy es un privilegio, a pesar de las limitaciones presentes en su proceso de enseñanza aprendizaje. En la actualidad es importante la búsqueda de nuevos métodos para el trabajo en el aula, donde el estudiante indague, experimente, explore, conjeture y busque estrategias de trabajo, que le permita la construcción del conocimiento matemático. La resolución de problemas retadores constituye una metodología para una construcción robusta del proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática en la escuela. La implementación de esta metodología en las condiciones actuales de virtualidad propicia la motivación hacia la matemática; fortalece formas de trabajo y de pensamiento, que apoyen la realización consciente de actividades mentales; desarrolla en los estudiantes estrategias para resolver problemas, genera la destreza del razonamiento lógico que permite entender el entorno, conlleva a que las clases de matemática sean interesantes y desafiantes, y consolida las bases matemática de los estudiantes.

(1) El autor (disertante) sólo ha presentado el Resumen de su Conferencia.

Disertación Invitada GTD-2.2

Problemas no estándar en la asimilación del concepto de Derivada

José Luis SÁNCHEZ SANTIESTEBAN
Universidad Autónoma de Guerrero, México
jlsanchezsantiesteban@gmail.com

Resumen Extendido

La resolución de problemas, es considerado por muchos estudiosos de la educación matemática, matemática educativa y metodología de la matemática como un eje vertebrador en la dirección de procesos de enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Ya en la década de los ochentas del siglo pasado el tema cobró interés entre los matemáticos e investigadores en educación matemática. En el ICMI–IV, celebrado en Berkeley en 1980, surge un gran grupo de trabajo dedicado al tema de resolución de problemas. La idea era llamar la atención de los profesores de los diferentes países del mundo, para que el tema fuera más considerado en los currículos.

Pero recién en 1984, en el ICMI–V, celebrado en Adelaida, Australia, se plantea en el grupo de trabajo sobre resolución de problemas, que el tema revestía interés para la escuela, pues inicialmente las ideas sobre resolución de problemas sólo se consideraban en la enseñanza universitaria. A partir del ICMI-V, el tema comienza a introducirse poco a poco en la escuela y gana auge hasta declararse como un enfoque o método de enseñanza de la matemática (Gaulin, 2000).

En los currículos de los países de diferentes regiones del mundo se declaraba que la resolución de problemas debería como la actividad central de la enseñanza y, por consiguiente, del aprendizaje de la matemática, en los diferentes niveles educativos. Así, la resolución de problemas brindaría la oportunidad para explorar, formular conjeturas y probar, mediante casos particulares, regularidades que adquieren connotaciones especiales en términos de resultados, como pequeños lemas a los que siguen teoremas de mayor envergadura.

A los estudiantes no se les debe enseñar solamente a reproducir y buscar demostraciones de los teoremas, a enseñarles definiciones y a resolver problemas totalmente elaborados. Para que tengan un papel más creador, es importante que aprendan también a encontrar los enunciados de las proposiciones, a expresar las definiciones, a descubrir y formular problemas (Peralta, 1995).

El cálculo diferencial en general, y en particular el concepto de derivada es susceptible de ser abordado mediante la resolución de problemas.

El objetivo aquí es centrarme en favorecer el proceso de asimilación del concepto de derivada a partir de un conjunto de problemas diseñado al efecto.

1. ¿Qué significado le atribuyes al concepto de derivada? ¿Con qué conceptos se relaciona este concepto?

2. ¿Qué significado tiene para usted el enunciado: la función $y = (x)$ no tiene tangente horizontal?

3. Dos corredores comienzan una carrera al mismo tiempo y finalizan empatados. Probar que en algún momento de la carrera ambos corredores iban a la misma velocidad.

4. Un número $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto fijo de la función $\boldsymbol{f}$ si $\boldsymbol{f(a) = a}$. Sea $\boldsymbol{f}$ una función derivable en $\mathbb{R}$ y tal que $\boldsymbol{f'(x) \neq 1}$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$. Probar que $\boldsymbol{f}$ tiene a lo sumo, un punto fijo.

5. Un corredor recorre una pista de $6\,km$ en $45\,minutos$. ¿En algún momento del recorrido, el corredor alcanzó la velocidad de $8\,km/h$?

Por otro lado, al trabajar con problemas en importante tener en cuenta que:

- Los problemas son contextualizados por los resolutores, a partir de los significados asociados para entenderlos y trazar un plan o estrategia para su solución. Esto significa que el problema propuesto puede surgir en un contexto, pero no necesariamente tiene que resolverse con las herramientas de dicho contexto.

- Es importante que el estudiante se pertreche de determinados resultados y técnicas que le posibiliten tener éxito en la resolución de problemas en un cierto ámbito de las matemáticas, ello le posibilitará cuando le sea necesario la formulación y la reformulación de los problemas en este ámbito.

- El resolutor deberá tener la preparación suficiente para pasar de un contexto a otro; esta es una práctica que se utiliza frecuentemente durante la actividad de resolución de problemas. Una vez propuesto el problema en un determinado contexto, si no se distingue una solución, es conveniente reformular el problema en otro contexto que parezca razonable. Este ejercicio puede repetirse tantas veces como sea necesario, es decir, hasta que se revele una solución (de Guzmán, 1993; Schoenfeld, 1992).

- Como la práctica lo corrobora, es posible que, con el problema planteado en un contexto matemático, se obtengan avances parciales en la búsqueda de la solución y luego proyectando el problema en otro contexto matemático y usando los avances obtenidos, se pueda acceder a una solución del problema (Polya, 1970).

- Una vez resuelto un problema, también es de gran interés, preguntarse qué habría sucedido si el problema se hubiese planteado en otro contexto matemático (de Guzmán, 1993). Es posible que de esta manera surjan soluciones más simples o elegantes. Esta práctica sirve para que el resolutor sistematice el paso de un contexto a otro y por otra parte valore los recurso que le proporciona la matemática para resolver problemas.

Referencias Bibliográficas

De Guzmán, M. (1993): "Tendencias Innovadoras en educación matemática". Ediciones OEA.

Gaulin, Claude (2000). "Tendencias actuales de la resolución de problemas". Conferencia pronunciada el día 15/12/2000 en el Palacio Euskalduna (Bilbao, España).

Polya, G. (1970): "How to solve it". Editorial Trillas.

Schoenfeld, A. (1992): "Learning to think mathematically: Problem Solving, metacognition, and sense making in mathematics". En Grouws, D.A. (Ed): Handbook of research on Mathematics teaching and learning. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York Macmillan Publishing Company. Pp. 334-370.

Disertación Invitada GTD-2.3

Resolução de problemas ‘árabes’

Jose Carlos PINTO

Universidade Franciscana, Santa Maria, RS, Brasil

leivasjc@ufn.edu.ar

Resumo[1]

Com base nas histórias de Malba Than, resolver problemas que despertem curiosidade e criatividade de estudantes.

a- Problema dos quatro quatros

b- Problema dos três camelos

A Educação Matemática já apresenta uma grande contribuição em pesquisas que procuram auxiliar professores no seu ensino e alunos em sua aprendizagem. Um dos grandes educadores matemáticos que deu passos decisivos nessa direção foi o holandês Hans Freudenthal (1975). Ao tratar das perspectivas da Matemática, ele aponta exemplos de aplicação dessa área do conhecimento em diversas outras, como as dimensões astronômicas e, consequentemente, a abordagem de conceitos e relações primitivas como o que é uma reta, um triângulo ou quanto vale a soma dos ângulos internos de um triângulo.

No que diz respeito aos números, ele aponta o paradoxo de Grande Hotel de Hilbert na tratativa dos números e a concepção de infinito Freudenthal (1975). Afirma o autor que, ao passar dos tempos as outras ciências foram se aproveitando da Matemática com a possibilidade de sua utilização e expandindo-se, ao passo que uma porcentagem muito pequena “daqueles que aprenderam matemática na escola secundária, no início do século, terá feito qualquer uso dela” (p. 6). Em seguida, faz os questionamentos: “Por que então, haviam de aprender matemática” e “Em que consiste, então, essa matemática que é pensada pelos matemáticos” (p. 6).

Talvez os questionamentos deste grande psicólogo, matemático e educador matemático levem ao estágio atual da Educação Matemática. Lorenzato (2006) indica vários princípios que podem ser facilitadores do desenvolvimento do pensamento infantil, dentro os quais desta-se aqui: “a) um mesmo conceito a ser apreendido deve ser apresentado de diferentes maneiras equivalentes; b) sempre que possível, o material didático e os exemplos, bem como a linguagem a ser utilizada em sala de aula, devem ser baseadas no cotidiano das crianças, isto é, inspirados com sua vivência “ (p. 11).

As quatro operações com números naturais e racionais são ensinadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental e, talvez, sejam ponto crucial na formação dos indivíduos, uma vez que lhes permitirão ingressar no mercado de trabalho com habilidades de cálculo mental, por exemplo. Não é raro encontrar-se no mercado operadores de caixa que, sequer, conseguem efetuar cálculos simples sem as calculadoras para fornecerem o troco ao cliente. Uma ilustração disso é uma compra de R$11,00 e o cliente paga com uma cédula de R$20,00 e não lhe é solicitada uma moeda de R$1,00 para devolver R$10,00. Este exemplo mostra que não houve aprendizagem de propriedades elementares como a associatividade e a distributividade: 20 – 11= 20 – (10 + 1), ainda, 1+ 20 = 1 + 20 – 10 -1 = 10.

Em realidade, apresenta-se um problema do cotidiano de um indivíduo que passou pela escola, provavelmente, sem ter adquirido habilidades de resolução. Resolução de Problemas é uma metodologia já consagrada na Matemática e assimilada e incrementada pela Educação Matemática. Polya (2006) é um dos precursores no tema e indica algumas etapas, das quais destaca-se a compreensão do problema, ao que o autor indica "O aluno precisa compreender o problema, mas não só isso: deve também desejar resolvê-lo" (p. 5).

A partir, especialmente, dessa recomendação feita pelo autor, o presente trabalho teve por objetivo apresentar dois problemas envolvendo números e operações matemáticas, partindo de histórias fictícias formuladas por um grande educador matemático brasileiro denominado Júlio César de Melo e Sousa, nascido em 6 de maio de 1895, dia que a Educação Matemática comemora no Brasil seu dia e falecido em 18 de junho de 1974. Este autor criou um personagem - Malba Tahan – e suas histórias são oriundas do mundo árabe, como ele próprio, propondo problemas, ficticiamente acontecidos naquela região.

Os problemas criativos e imaginativos propostos por Malba Tahn vão ao encontro do que os autores supracitados indicam, especialmente por atenderem ao indicado por Polya, uma vez que não somente alunos são motivados a enfrentá-los e buscar soluções, mas também os professores a os utilizar metodologicamente. No livro são apresentados e resolvidos problemas abrangendo diversos temas da Matemática e acredita-se que podem auxiliar os estudantes a responder, de forma contundente, aos questionamentos de Freudenthal (1975) bem como ser material didático facilitador ao professor de Matemática para desencadear temas específicos com seus alunos como apontado por Lorenzato (2006) para desenvolver pensamento matemático.

Para a conferência adaptamos dois problemas de Tahan (1999), os quais denominou-se: "problema dos quatro quatros" e "Problema dos trinta e cinco camelos". No primeiro, a história contada é de um viajante que ingressa em um bazar onde se interessa por um turbante, oferecido por 4 dínares[13], uma vez que tudo era vendido por este valor. Havia ali um cartaz indicando "Os Quatro Quatros", o que despertou o interesse do viajante. A história se desenrola de modo que vários desmembramentos conduzem a atividades investigativas envolvendo operações aritméticas com números inteiros.

O segundo problema apresenta uma narrativa onde uma herança de 35 camelos, deve ser distribuída entre os três herdeiros do rei o que, matematicamente, é impossível pois o total não é divisível por três. O esperto viajante oferece uma solução e, ainda, consegue um camelo para si.

Os dois problemas podem ser explorados, de forma criativa e sugestiva para os estudantes de modo que o professor possa desencadear temas como operações com inteiros e frações, propriedades de operações, etc. Espera-se, com isso, despertar os participantes a novas 'viagens' como fez o autor do livro.

Referências Bibliográficas

FREUDENTHAL, Hans. (1975). **Perspectivas da matemática**. Trad. Fernando C. Lima. Rio de Janeiro: Zahar Editores.

POLYA, George. (2006). **A arte de resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência.

TAHAN, Malba. (1999). **O Homem que calculava.** Rio de Janeiro; 48ª ed. Editora Record.

[13] Moeda local na história.

Disertación Invitada GTD-2.4

Resiliencia Didáctica en Educación Matemática como efecto de circunstancias excepcionales: Aprendizajes, Proyecciones y Retos

Rafael LORENZO MARTÍN
Universidad de Holguín, Cuba

Resumen[1]

La Educación se convierte en un componente esencial en el desarrollo sostenible de las naciones en las nuevas y complejas circunstancias históricas, que realzan la preocupación de decisores, investigadores y educadores por su mejora continua. Lo anterior se advierte en los Objetivos de Desarrollo Sostenible en particular en el *Objetivo 4: Garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad y promover oportunidades de aprendizaje durante toda la vida para todos* (ONU, 2015). Al respecto, es bueno distinguir que estas intenciones se refuerzan en el año 2020, donde se ha roto la normalidad del planeta desde cambios sustanciales en todos los órdenes, cuando lo social ha sido reestructurado en su proyección y significado, coherente con el nuevo contexto. Lo anterior es visto como un catalizador –de aspectos ya acumulados- para revelar diferentes entropías y efectos no deseados, moviendo de la zona de confort las relaciones sociales y promoviendo mutaciones desconocidas en todos los ámbitos de la cotidianidad humana. En efecto, se trata de la aparición de la enfermedad COVID-19, que irrumpió en un escenario alarmante a nivel global, que se manifiesta por: confinamientos masivos, fractura de las rutinas personales, producción de ansiedades y desconciertos, naturalización de rezagos sociales, crecimiento de las desigualdades sociales y un debate sin precedente entre la prerrogativa de asegurar la economía o la existencia del ser humano.

A propósito de estas circunstancias, se necesitan miradas analíticas y críticas a la Educación Matemática, donde surgen nuevos cuestionamientos donde los investigadores tienen la responsabilidad de redimensionar y/o concebir conceptos y metodologías capaces de explicar la “nueva realidad”; sin dudas donde la Educación Matemática demanda una resiliencia en sus tratamientos y su implementación en la nueva normalidad de los centros educativos. Emerge un escenario que impone nuevas estructuras y relaciones en las sociedades y sus procesos, lo que demanda miradas analíticas y críticas con la capacidad de revisar los aprendizajes que ofrece esta situación contextual.

Con el reconocimiento de lo anterior, en esta charla se proyectará un análisis que *propone reflexionar sobre saberes, experiencias, retos y proyecciones de una Didáctica de la Matemática coherente con las rupturas funcionales que nos imponen las nuevas circunstancias (post-2020) y al mismo tiempo que tenga en cuenta las potencialidades de relaciones por los nuevos canales virtuales en la Educación Futurista.* Desde la premisa de redimensionar nuevas alternativas desde aprendizajes colectivos no se pretende conversar de un conocimiento acabado y recetas mágicas, más bien serán ideas a desarrollar por la comunidad científica de profesionales en Educación Matemática. Oportuno será *un profundo conocimiento de las regularidades que rigen el proceso formativo de la Matemática bajo condiciones excepcionales de las instituciones escolares y su incidencia en la calidad de la formación (en modos mixtos, combinados, dual o blended learning: semipresencial o presencial-virtual) de los estudiantes que integran estas escuelas.*

Conferencia Central GTD-3.1

Diseño de Secuencias Didácticas para la práctica en el aula como recurso para el Desarrollo de Habilidades Docentes

Dra. Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD
Universidad Luterana de Brasil, Brasil

claudiag@ulbra.br

Introdução

Silver (1997) afirma que para promover nos estudantes abordagens mais criativas, no campo da Matemática, é importante uma pesquisa direcionada para o ensino da mesma, focando na resolução de problemas. Para o autor a criatividade nas aulas de Matemática está intimamente ligada tanto na resolução de problemas quanto na formulação de situações problemas.

Segundo Laycock (1970), a criatividade Matemática é uma habilidade que permite analisar problemas sob diferentes perspectivas, a fim de gerar respostas múltiplas. Gontijo (2006) salienta que os estudantes devem ter oportunidade de desenvolver a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação problema, focalizando em distintos aspectos do problema e em formas diferenciadas de solucioná-las, com originalidade.

Conway (1999) e Vale (2012) citado por Pinheiro e Vale (2013) referem que se deve motivar os estudantes para a descoberta de soluções pouco comuns, pois assim há maior probabilidade de os estudantes apresentarem representações criativas, constatando que a flexibilidade e originalidade proporcionam o pensamento divergente. Vale (2012), afirma que o pensamento divergente é orientado para a fluência, a flexibilidade e originalidade, caraterísticas fundamentais do pensamento criativo e resulta da aplicação de tarefas que recorrem à investigação e exploração, pesquisa autônoma e à curiosidade intelectual.

A criatividade é uma importante habilidade para o século XXI, defendida por diferentes Instituições, sejam aquelas ligadas ao mercado de trabalho e desenvolvimento tecnológico, como o Fórum Econômico Mundial (WEF, 2018), sejam aquelas interessadas na formação escolar mais ampla como as diretrizes educacionais de países como Austrália, Inglaterra e Brasil, ainda que este último esteja ainda em ritmo de construção. A Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE), responsável pela realização do Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) incluiu para o ano de 2021 tarefas que visam avaliar a criatividade, o que se observa a necessidade de indivíduos mais criativos para viver na vida moderna.

Segundo Gontijo (2007, p. 37), criatividade em Matemática é:

> a capacidade de apresentar diversas possibilidades de solução apropriadas para uma situação-problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade). Esta capacidade pode ser empregada tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações.
>
> pela abundância de ideias diferentes produzidas sobre um mesmo assunto (fluência), pela capacidade de alterar o pensamento ou conceber diferentes categorias de respostas (flexibilidade), por apresentar respostas infrequentes ou incomuns (originalidade) (Gontijo, 2007, p. 37).

Fonseca (2015) define: fluência, como a capacidade em se gerar múltiplas ideias, múltiplas soluções, para a resolução do problema; flexibilidade se relaciona à geração de soluções que podem ser observadas sob categorias diversas das quais já foram propostas; originalidade está ligada à novidade, a não convencionalidade da solução proposta dentre as demais (Fonseca, 2015, p. 46).

Neste sentido defende-se que os estudantes, em formação inicial, de Matemática Licenciatura, necessitam durante sua formação desenvolver a competência de realizar planejamentos didáticos que possibilitem que seus alunos desenvolvam a criatividade e consigam integrá-la com os conhecimentos e assim, resolvam problemas e situações gerais da vida pessoal, social e profissional.

Neste artigo apresenta-se um experimento realizado com estudantes de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de um Design Instrucional com a temática Expressões Numéricas.

Refletir sobre a formação de professores de Matemática implica discutir as características que definem o docente como profissional interessado e capacitado à criação e adaptação de métodos pedagógicos ao seu ambiente de trabalho, utilizando os conhecimentos matemáticos para a compreensão do mundo que o cerca e despertando no estudante o hábito pelo estudo independente, a criatividade, a persistência em resolver problemas, o interesse em conhecer seu ambiente de trabalho e seus estudantes, bem como, o hábito de refletir sobre seu trabalho docente, buscando caminhos que levem à uma educação de qualidade (Groenwald, 2020).

Design Instrucional

Com a incorporação das Tecnologias Digitais (TD) na Educação se faz necessária uma ação sistemática do planejamento didático integrando o conteúdo, abordagem metodológica e recursos digitais, que sejam adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos e que permitam o desenvolvimento de competências.

Torna-se importante que os estudantes de Licenciatura, neste caso de Licenciatura em Matemática, sejam qualificados para um planejamento de acordo com as necessidades dos estudantes do século XXI. Optou-se pelo desenvolvimento de um Design Instrucional (DI) de acordo com Filatro (2008) com o tema Expressões Numéricas indicado para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental.

Segundo Filatro (2008) o DI é compreendido como o planejamento do ensino e aprendizagem, incluindo atividades, estratégias, sistemas de avaliação, métodos e materiais instrucionais. O DI é visto como um tipo de construção que envolve complexidade e síntese, podendo ser compreendido como a ação de estabelecer objetivos futuros e de encontrar meios e recursos para cumpri-los. Assim como o design, a palavra instrucional necessita de uma atenção bem específica para que não seja apenas identificada como instrução ou treinamento. Segundo Filatro (2008): “instrução é uma atividade de ensino que se utiliza da comunicação para facilitar a compreensão da verdade”.

Apoiado por tecnologias, o DI admite mecanismos de efetiva contextualização, caracterizados por: maior personalização aos estilos e ritmos individuais de aprendizagem; adaptação às características institucionais e regionais; atualização a partir de feedback constante; acesso a informações e experiências externas à organização de ensino; possibilidade de comunicação entre os agentes do processo (professores, alunos, equipe técnica e pedagógica, comunidade); e monitoramento automático da construção individual e coletiva de conhecimentos (Filatro, 2004).

Neste sentido, foi utilizado o termo Design Instrucional Contextualizado (DIC) para descrever a ação intencional de planejar, desenvolver e aplicar situações didáticas específicas que, valendo-se das potencialidades de um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), incorporem, tanto na fase de concepção como durante a implementação, mecanismos que favoreçam a contextualização e a flexibilização, sendo possível que os estudantes percorram caminhos diferenciados, de acordo com seu ritmo de aprendizagem e de acordo com suas preferências de aprendizagem.

Segundo Filatro (2008) os modelos de DIC, frequentemente estruturam o planejamento do processo de ensino e aprendizagem em estágios distintos:

1 Análise: envolve a identificação de necessidades de aprendizagem, a definição de objetivos instrucionais e o levantamento das restrições envolvidas;

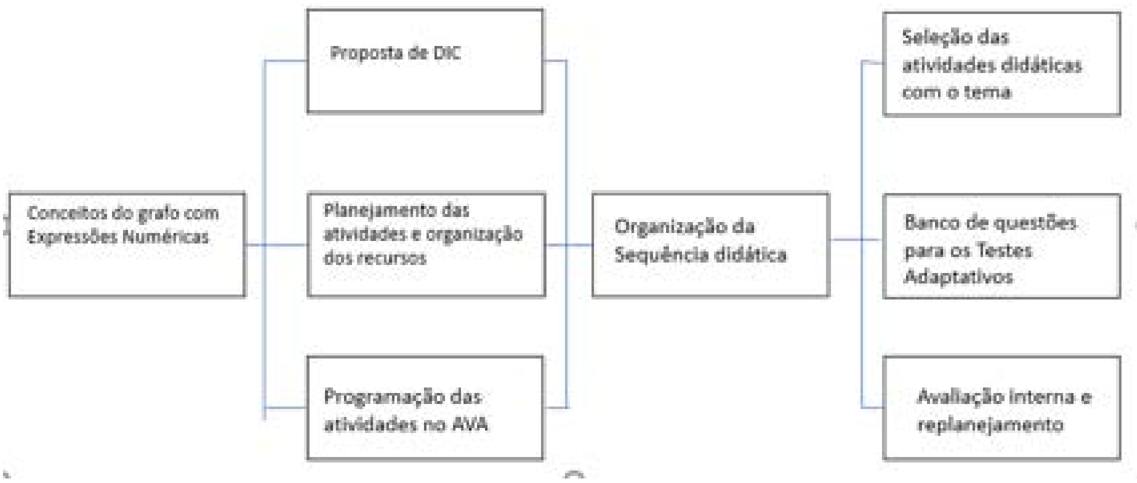
2 Design e desenvolvimento: quando ocorre o planejamento da instrução e a elaboração dos materiais e produtos instrucionais;

3 Implementação: quando se dá a capacitação e ambientação de docentes e alunos à proposta de design instrucional e a realização do evento ou situação de ensino e aprendizagem propriamente ditos; e por fim

4 Avaliação: envolve o acompanhamento, a revisão e a manutenção do sistema proposto.

Apresenta-se na Figura 1 os movimentos de contextualização na proposta de DIC desenvolvida com o tema de estudo. Primeiro foi investigado os conceitos que envolvem o tema, estes foram organizados em um grafo com a sequenciação desejada de estudo de acordo com os objetivos propostos. Em um segundo momento foram investigadas as propostas de DIC que se adequam aos objetivos educacionais, o planejamento das atividades e recursos possíveis, também, como colocá-los no AVA escolhido para o experimento. No terceiro momento foram organizadas as sequências didáticas para cada conceito do grafo desenvolvido. A sequência didática envolve as ações: seleção das atividades com o tema, seleção da forma de acompanhamento do desempenho dos estudantes e como realizar a avaliação interna do DIC, replanejando quando necessário.

Figura 1 – Ações desenvolvidas no DIC



Fonte: Adaptado de Filatro (2004).

A seguir apresenta-se o percurso metodológico percorrido no estudo de caso e o DIC desenvolvido.

Metodologia da Investigação

O objetivo do DIC foi de investigar uma abordagem didática, integrando o conteúdo matemático com uma abordagem didática com o uso de TD, visando o desenvolvimento de competências indicadas para o professor que vai atuar neste nível de ensino.

As atividades foram desenvolvidas em um ambiente utilizando tecnologias, utilizando um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), denominado SIENA (Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem). O sistema SIENA foi desenvolvido pelos grupos de pesquisa: GECEM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) e o Grupo de

Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna em Tenerife, Espanha. O SIENA é um sistema inteligente que permite que os estudantes realizem estudos individualizados e de acordo com suas dificuldades.

As ações necessárias para o desenvolvimento de um experimento no SIENA são: grafo com os conceitos a serem desenvolvidos; banco de questões para os testes adaptativos para cada conceito do grafo; sequências didáticas eletrônicas para cada conceito do grafo.

Foram desenvolvidas as seguintes ações com cinco estudantes de Licenciatura em Matemática:

- Estudo da temática Expressões Numérica em livros didáticos do Ensino Fundamental e na Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018);

- Análise e estudo do AVA, denominado SIENA, como ambiente para a programação do projeto;

- Organização de um grafo com os conceitos a serem desenvolvidos no planejamento do DIC;

- Construção de um banco de questões para compor os testes adaptativos de cada conceito do grafo desenvolvido para a avaliação dos estudantes durante o estudo dos conceitos do grafo;

- Investigação e construção de atividades didáticas para compor as sequências didáticas de cada conceito do grafo desenvolvido e que permitissem o uso de recursos tecnológicos, com o delineamento de atividades com o tema Expressões Numéricas, proposto para o desenvolvimento de um DIC para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental;

- Desenvolvimento do DIC, com o tema Expressões Numéricas para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental;

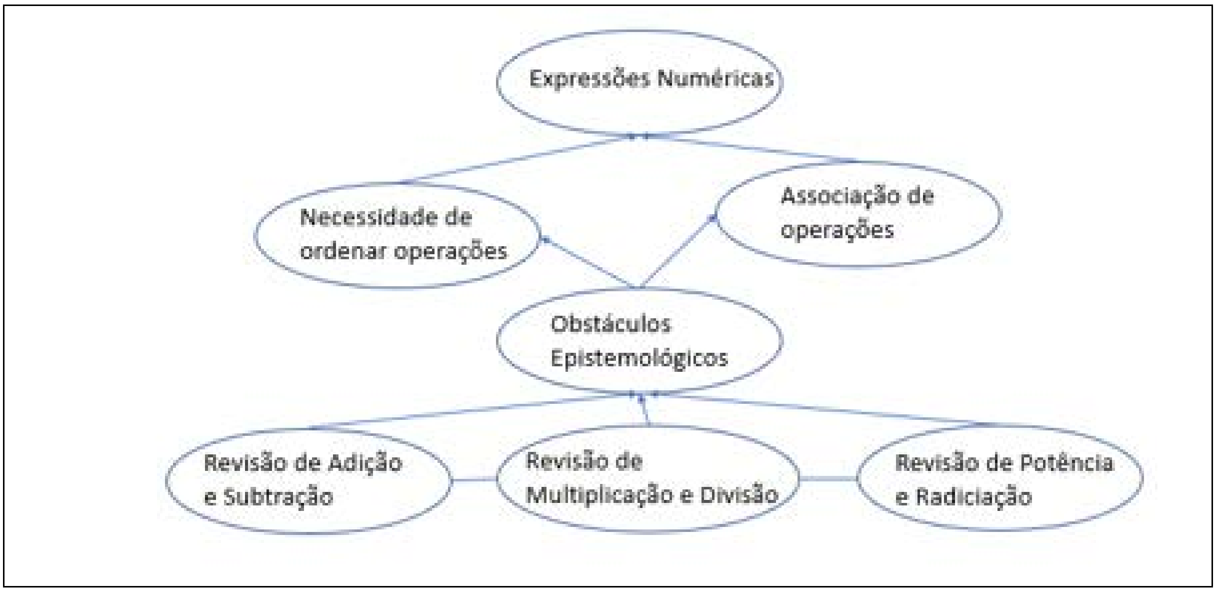
- Análise, discussão e replanejamento do DIC.

Atividades Desenvolvidas no DIC

O experimento, com os 5 estudantes matriculados no 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) ocorreu em reuniões semanais de estudos e com uma reunião mensal com o grupo de pesquisa, durante os meses de março a dezembro de 2019, para discussão e organização das atividades para a construção do DIC.

O grafo com os conceitos a serem desenvolvidos foram organizados pelo pesquisador P1 e com todos os estudantes participantes do projeto (Figura 2). Os conceitos que compõem o grafo são: Revisão de Adição e Subtração; Revisão de Multiplicação e Divisão; Revisão de Potência e Radiciação; Obstáculos Epistemológicos; Necessidade de ordenar as operações; Associação de operações; Expressões numéricas – problemas.

Figura 2 – Grafo do Design de Expressões Numéricas



Fonte: http://siena.ulbra.br/expressoesnumericas.

Na segunda etapa foram construídos os bancos de questões para os Testes Adaptativos. Os testes adaptativos informatizados são administrados pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade de cada examinado. Segundo Costa (2009) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração dos testes e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado. O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões previamente calibradas, que correspondam ao nível de capacidade do examinado. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequada à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (Sands e Waters, 1997).

Para cada teste adaptativo foi construído um banco de questões com 45 questões, classificadas em níveis de dificuldade, sendo 15 questões consideradas de nível fácil, 15 questões de nível média e 15 questões de nível difícil, totalizando 315 questões. Apresenta-se a seguir exemplos do banco de questões investigadas, discutidos e avaliadas no estudo de caso desenvolvido (Figura 3).

Figura 3 – Exemplo de questões do banco de questões para os Testes Adaptativos com Expressões Numéricas[14]

Nível Fácil	A soma de três números consecutivos pode ser representada pela expressão: a) $3x$ d) $3x + 3$ b) $x + 4$ e) $x + x + 1$ c) $x + 3$
Nível Médio	Em uma mesa se encontram 5 balas mais dois pacotes com 15 balas em cada pacote. Quantas balas há no total em cima da mesa? a) $15 + 15 + 2 + 5 = 37\ balas$ d) $15 + 15 + 2 = 32\ balas$ b) $5 + 15 = 20\ balas$ e) $5 + 2x15 = 35\ balas$ c) $5 + 2x15 = 105\ balas$
Nível Difícil	Os professores de uma escola precisavam fazer a contagem dos alunos vencedores dos jogos internos a fim de adquirir as medalhas para premiação. No sexto ano, são 60 alunos no total. Apenas a sexta parte deles recebeu medalhas no vôlei, e a metade recebeu medalhas no futebol. No sétimo ano, com 45 alunos, apenas as meninas, que representam um terço dos alunos da sala, foram premiadas no vôlei e todos os meninos foram premiados no futebol. Já no oitavo ano, foram 7 medalhas de ouro, 4 de prata e 3 de bronze. Por fim, o nono ano não participou da competição. Quantas medalhas foram compradas? a) $\frac{1}{6}x60 + \frac{1}{2}x60 + \frac{1}{3}x45 + 45 + 7 + 4 + 3 = 124\ medalhas$ b) 10+30+15+45+11=121 medalhas c) $\frac{1}{6}x60 + \frac{1}{2}x60 + \frac{1}{3}x45 + 45 + 7 + 4 + 3 = 120\ medalhas$ d) $\frac{1}{6}x60 + \frac{1}{2}x60 + \frac{1}{3}x45 + 45 = 110\ medalhas$ e) $\frac{1}{60}x60 + \frac{1}{2}x60 + \frac{1}{3}x45 + 45 + 7 + 4 + 3 = 114\ medalhas$

Fonte: http://siena.ulbra.br/expressoesnumericas.

A terceira etapa foi a construção de sequências didáticas, seguindo o DIC. As sequências didáticas são um conjunto de atividades organizadas, de maneira sistemática, planejadas para o processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, etapa por etapa. São organizadas de acordo com os objetivos que o professor quer alcançar para a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação (Dolz e Schneuwly, 2004). Segundo Zabala (1998) as sequências didáticas são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos. Através da sequência didática é possível analisar as diferentes formas de intervenção e avaliar a pertinência de cada uma delas.

Nas sequências foram desenvolvidos materiais com os seguintes recursos didáticos: material de estudos em *PowerPoint* salvo em *Ispring*; atividades didáticas no *Jclic*; atividades online com jogos com expressões. JClic é um *software* de autoria, na língua espanhola e catalã. Trata-se de uma ferramenta desenvolvida na plataforma Java5, para criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídias. É uma aplicação de *software* livre, baseada em modelos abertos em diversos ambientes operacionais (*Linox*, *Mac OS-X*, *Windows e Solaris*).

A seguir apresenta-se exemplos dos materiais de estudos desenvolvidos (Figura 4).

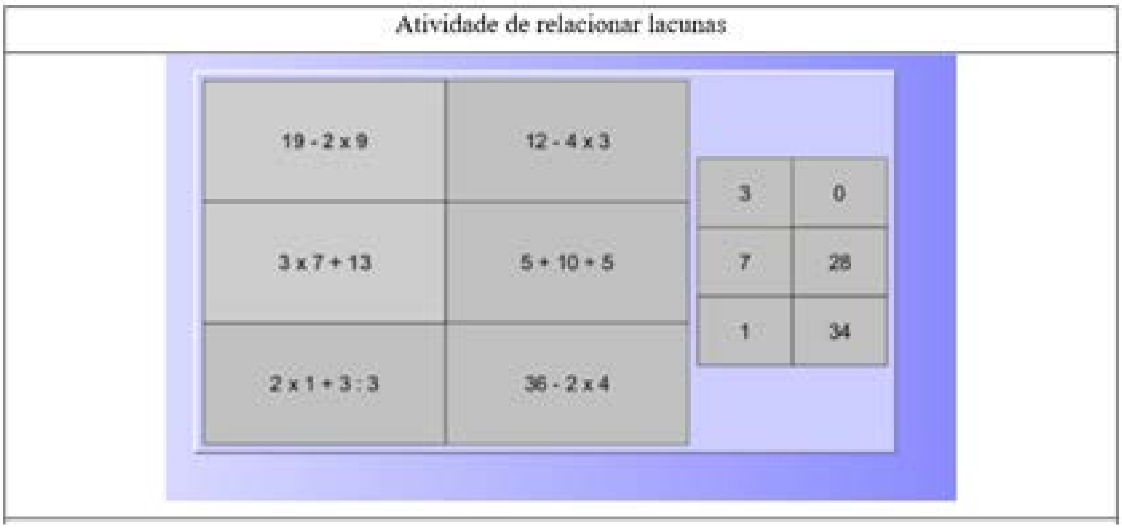
[14] As respostas em vermelho indicam a resposta correta.

Figura 4 - Material de Estudos com Expressões Numéricas

Problema com Expressões Numéricas

Fonte: http://siena.ulbra.br.

Também foram desenvolvidas atividades com o *software Jclic* (Figura 5).



Fonte: siena.ulbra.br.

A plataforma SIENA está disponível no endereço http://siena.ulbra.br, sendo que o acesso aos trabalhos e banco de dados está restrito a usuários cadastrados no sistema. Esse cadastramento é realizado pelos administradores da plataforma, e fornece um login e uma senha pessoal ao usuário.

Considerações Finais

O trabalho desenvolvido consistiu na possibilidade de compreender como um planejamento pode integrar os conceitos educacionais aqui apresentados, associando-as às questões de uso das TD no contexto educacional e como o desenvolvimento de um DIC possibilita em estudantes de Licenciatura em Matemática o desenvolvimento de competências profissionais esperadas para um professor de Matemática. Outra possibilidade foi a de que o planejamento didático é muito importante para que os futuros professores possam refletir sobre a possibilidade de desenvolverem atividades, integrando os conceitos com a resolução de problemas.

Entende-se que foi possível o desenvolvimento de competências, não completamente, mas um processo de desenvolvimento, que deve ser contínuo e ao longo da formação inicial e que deve seguir durante a vida profissional destes estudantes. É possível salientar que as principais competências trabalhadas ao longo do processo foram: trabalho em grupo baseado na discussão, reflexão e ação para o desenvolvimento do DIC; Avaliação e utilização das TD como materiais de estudo no *PowerPoint* e salvo em *Ispring*, *software Jclic*, atividades online; compreensão da importância da necessidade de conhecer em profundidade os conceitos matemáticos para um planejamento adequado a temática e ao nível dos estudantes a que se destina; valorização das metodologias de ensino para a construção dos conceitos matemáticos e do uso de recursos digitais; escolha de tarefas que sejam adequadas aos conceitos e idade dos estudantes a que se destinava o DIC; reflexão sobre a importância de avaliação constante durante todo o processo e de reorganização de rotas sempre que necessário.

Outro ponto importante que foi perceptível durante o processo foi a conscientização de que um planejamento não é único e que exige mudanças de rumos. Muitas vezes foi necessário alterar as atividades escolhidas, os recursos escolhidos e a forma de organizá-los em uma sequência didática, sendo necessário avaliação interna constante. Um exemplo, que se pode citar, foi a organização dos problemas de expressões em vídeo e depois se entendeu importante a gravação de voz, com explicações sobre as possibilidades de resolução, o que levou a necessidade de realizar novamente os vídeos.

Importante salientar que o professor de Matemática pode agir para que a escola se transforme em um espaço rico de aprendizagem significativa, que levem os alunos à proatividade, a aprender a aprender, tomar iniciativa e desenvolvam a criatividade.

Referências Bibliograficas

Costa, D. R. (2009). Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados. 2009. 107 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Dolz, J.; Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas/SP: Mercado das Letras.

Filatro, A. e Stela, C. B. P. (2004). Design Instrucional Contextualizado. *Revista da Faculdade de Educação da USP. Abril/2004.* Acesso em fevereiro de 2020.
http://www.miniweb.com.br/atualidade/Tecnologia/Artigos/design_instrucional.pdf.

Filatro, A. (2008). *Design Instrucional na prática*. São Paulo: Pearson

Gontijo, C. H. (2006). Estratégias para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. Linhas Críticas, Brasília, v. 12, n.23, p. 229-244.

Gontijo, C. H. (2007). Relações entre criatividade, criatividade em matemática e motivação em matemática de alunos do ensino médio. 2007. 194 f. Tese Doutorado em Psicologia, Universidade de Brasília, Brasília.

Groenwald, C. L. O. (2020). Design Instrucional desenvolvido com alunos de licenciatura em Matemática com a temática Expressões Numéricas. Revista Paradigma (Edición Cuadragésimo Aniversario: 1980-2020), Vol. XLI, junio de 2020.

Laycock, M. (1970). Creative mathematics at Nueva. Arithmetic Teacher. 17(0), 325-328.

OCDE. (2019). Pisa 2018: Insights and Interpretations. https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf.

Pinheiro, S.; Vale, I. (2013). Criatividade e Matemática: um caminho partilhado. In I. Vale, A. Barbosa, A. Peixoto, L. Fonseca e T. Pimentel. Atas do Encontro Ensinar e Aprender Matemática com Criatividade dos 3 aos 12 anos. Acesso em março de 2021: https://d1wqtxts1xzle7.cloudfront.net/53659362/.

Sands, W. A.; Waters, B. K. (1997). Introduction to ASVAB and CAT. In: SANDS, William A.; WATERS, Brian K.; MCBRIDE, James R. (Eds.). *Computerized adaptive testing: from inquiry to operation*. Washington: American Psychological Association.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. ZDM, 3, 75- 80.

Vale, I., & Pimentel, T. (2012). Um novo- velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Eds.), Investigação em Educação Matemática - Práticas de Ensino da Matemática (pp. 347- 360). Lisboa: SPIEM.

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Conferencia Central GTD-3.2

Acciones que fomentan la creatividad en Matemática

Eduardo MANCERA MARTÍNEZ
Comité Interamericano de Educación Matemática

Introducción

La creatividad es un tema poco discutido y bastante novedoso en nuestra época, tal vez por la necesidad de clasificar e identificar comportamientos fuera de las formas tradicionales para encontrar nuevos caminos o resultados, sobre todo cuando cada vez nos enfrentamos a problemas de decisión y el descubrimiento de soluciones a problemas emergentes no rutinarios.

El pensamiento creativo o las cualidades de quienes pueden construir y comunicar nuevos elementos para la vida o la ciencia, parecen excepciones y asuntos de genética o de contexto social. Así fue como el trabajo de Galois, o el de Newton o Einstein, entre otros, se han colocado en la cúspide de lo creativo y admirable, sin embargo, después de un tiempo parte de sus resultados se vuelven rutinas en las instituciones y solamente hay que replicarlos y utilizarlos para abordar nuevos temas, esto obliga a considerar varios aspectos de la creatividad como s dependencia del tiempo y el contexto.

Un fin de la educación ha sido el desarrollo del pensamiento crítico y también el de la creatividad, cualquiera que sea la forma de asumir este término, es decir por creatividad se entienden diversas formas de comportamiento y de producción de resultados. Además de quien es creativo una vez esta etiquetado para su vida futura como el poseedor de un don especial.

Pero todo parece indicar que no es posible volver creativas a personas, digamos promedio, sobre todo en disciplinas como la matemática que contiene ciertas complejidades y pasa por distintas concepciones e intereses, como el caso de la matemática pura, aplicada, prescriptiva o simplemente condenada a resolver nuestras más urgentes necesidades.

En esta participación en este grupo de trabajo, pretendo incluir algunos elementos rescatados de la propia experiencia como docente e investigador de algunas problemáticas de la educación matemática, tratando de aclarar las propias e ideas y compartirlas con colegas a fin de discutirlas.

Creatividad e Innovación

Seguramente algunos han escuchado la clásica propuesta para enfrentar lo desconocido recurriendo a señalamientos tan generales y vagos que no aportan elementos claros para abordar un tema pero que sugieren cierto nivel de autoridad académica, lo cual aplicado al caso de la creatividad sería una posición como: la creatividad es un fenómeno complejo y multifactorial (a veces se prefiere decir que multidimensional) que obliga a considerar múltiples relaciones y entre aspectos o elementos no considerados fácilmente. Es decir, es todo y nada.

Generalmente se advierte que hay una fuerte relación entre creatividad e innovación, con el descubrimiento de lo desconocido, como lo que se espera con la investigación a partir de la cual, después del estudio acucioso de un tema se determinan zonas de interés y tratan de abordarse desde varias perspectivas a ver si se logran resultados originales. En este sentido, la creatividad debería depender del conocimiento de lo existente y un esfuerzo de síntesis de lo que existe sobre alguna problemática, pero la historia nos muestra que esto no es así pues los creativos reconocidos en la ciencia tal vez no perseguían ciertos resultados y se dieron cuenta de relaciones inesperadas e importantes en el esfuerzo realizado para encontrar otra cosa. Parece como asunto del azar o la circunstancia no prevista, como es el caso del descubrimiento de la penicilina. El descubrimiento de la penicilina ocurrió inesperadamente pues Fleming quien en 1928 estaba dedicado a estudiar cultivos de bacterias en un laboratorio del Hospital St. Mary, en Londres, realizó lo necesario para hacer crecer el moho en un cultivo puro, pero se dio cuenta de que éste "Jugo de moho" mataba a varias bacterias causantes de enfermedades, él tenía otro objetivo, pero hizo un descubrimiento muy importante.

En matemáticas algo similar fue lo que sucedió con los intentos de demostrar el quinto postulado de Euclides, o formas equivalentes de éste, pues los intentos más que conducir al resultado esperado generaron otras ideas que dieron paso a las geometrías no Euclidianas que con el paso del tiempo se pudieron utilizar para representar diversas situaciones del mundo físico.

Desde luego debe haber una componente de innovación en el sentido que el creativo genera opciones o tratamientos de solución o de respuesta que no se habían considerado e incluso podrían ser inesperados, pero no hay necesariamente una componente de revisión acuciosa de lo existente, sino simplemente curiosidad o urgencia por abordar cierta situación.

En este sentido creatividad e investigación son actividades diferentes y responden a motivaciones también diferentes.

En este momento podemos considerar que creatividad e innovación no son aspectos que uno está contenidos en el otro, ni que necesariamente tienen cierta dependencia.

Creatividad e Imaginación

Como el pensamiento creativo se detecta no sólo en lo nuevo sino en la obtención de resultados ya conocidos pero que pueden lograrse por medio de métodos inesperados o poco familiares, se debe tener en cuenta que más que información acuciosa de lo que interviene en una situación de interés, puede tener un papel más importante la imaginación o los experimentos mentales, para hacer surgir posibilidades y reflexionar sobre su factibilidad.

Es decir, hay una capacidad o habilidad para representar lo que se analiza de manera diferente a fin de producir ideas prever consecuencias. Es un camino en el que se transforman o se abandonan elementos conocidos, para dar paso a nuevas componentes que explican lo mismo de manera "económica" o "sintética" y pueden abrir paso a nuevas ideas o interpretaciones.

Pero todo esto se logra en un camino que pasa por la imaginación los ensayos mentales y concluye en nuevos caminos para atender las problemáticas comunes, como se ha mostrado que sucede en matemáticas cuando se pasa de un sistema a otro o se abordan problemáticas de la geometría por medio de estructuras algebraicas o inversamente.

El descubrimiento de Arquímedes de las relaciones entre los volúmenes del cilindro, como y esfera revolucionaron los métodos de descubrimiento, pues Arquímedes sabía que estaba imaginando algo que físicamente no podría realizar pero que le permitía encontrar vínculos entre los sólidos de interés, dado que con cortes muy finos de esto podía experimentar, sin hacerlo, como podía equilibrar estas partes haciendo ciertos tipos de cortes de secciones transversales, después se preocuparía de formalizar estas relaciones usando el método de Eudoxio.

También Newton lo gro pensar la forma de trayectoria de un objeto que se lanzaba con velocidades cada vez mayores y que por la fuerza de gravedad debería caer en la tierra, pero a ciertas velocidades ya no podría hacerlo y quedaría en órbita.

Creatividad y lo Nuevo

No siempre el resultado del pensamiento creativo es renovar lo anterior, en realidad no necesariamente depende de lo que se conoce, no es necesario que algo haya existido anteriormente para inducir una manera diferente de abordar una problemática.

La creatividad puede conducir a algo totalmente nuevo, sin antecedentes como es el caso de nuevas teorías que mejoran las anteriores, pero fueron creadas como alternativa y no pretendían substituir lo que ya se conocía, pues perfilan diferentes interpretaciones o representaciones de los elementos subyacentes en una problemática.

Si bien es cierto que la creatividad ayuda a a la producción de nuevas formas para abordar problemas o fenómenos o crear nuevos productos o procedimientos, no es su único resultado, el reestructurar estereotipos es algo que reduce la importancia del pensamiento creativo subordinándolo a lo que ya se conoce, pues el resultado de lo creativo es también encontrar nuevas rutas de pensamiento y producción de procedimientos no conocidos.

La creatividad es un proceso donde el sujeto creativo está con la mente abierta a sorprenderse por lo que puede lograr, o desconocido no lo detiene, al contrario, impulsa sus indagaciones.

Muchos productos creativos tienen relación con la creación de nuevos modelos que primero se maginaron y luego se hicieron presentes en símbolos o diagramas, son ideas que se transforman desde los elementos a considerar y sus relaciones, los cuales son susceptibles de diversas representaciones y éstas evolucionan con las ideas. La creatividad no proviene de las manipulaciones simbólicas o los dibujos o diagramas, estos se reestructuran con base en las ideas que van surgiendo y a la necesidad de experimentar uno u otro camino. Se tiene la concepción que desde el manejo simbólico o la manipulación de gráficas se pueden ir generando ideas, pero esas representaciones están más ligadas a lo anterior que a lo nuevo y por lo tanto tarde o temprano serán reemplazadas o reinterpretadas.

Por ejemplo, un número al cuadrado se interpreta como el área de un cuadrado cuyo lado es el número respectivo, siguiendo la idea el cubo de un número se interpreta, frecuentemente, como el volumen de un cubo que tiene como lado el número de interés, pero ya no se pueden interpretar potencias mayores. Sin embargo, el cubo de un número puede ser interpretado como el número de veces del cuadrado que indica el número en cuestión, así la cuarta potencia y las siguientes podrán ser interpretadas de manera análoga.

La cinta de Moebius, la botella de Klein, las figuras de ancho constante emergieron de analizar posibilidades y haciéndolas efectivas con algunos modelos físicos, pero abrieron un camino nuevo para analizar las transformaciones geométricas o el papel de figuras conocidas.

Creatividad y Curiosidad

Se dice que “la curiosidad mató al gato”, sin embargo, es el disparador del pensamiento creativo pues ante las dificultades de las herramientas tradicionales se busca la creación de otros elementos que permitan avanzar en el análisis de diversas situaciones que se comportan de manera tradicional.

En este sentido la curiosidad puede ser considerada como una forma de sensibilizarnos para encontrar explicaciones o formas de comunicar las relaciones que se presumen de ciertos elementos en algún tema. Puede ser un tema que se esté trabajando, pero la sensibilidad se orienta a identificar deficiencias, lagunas o grietas en lo que ya se sabe. Newton desarrolló una versión del Cálculo para poder explicar lo que sucederá en ciertos fenómenos. Similarmente, Werner Heisenberg, en sus textos sobre física cuántica, trabajó con arreglos de conjuntos numéricos y definió operaciones con ellos, después mostró su trabajo a Max Born quien enseguida le advirtió que estaba trabajando con matrices, objetos que los matemáticos ya conocían. Heisenberg no tenía idea de lo que era una matriz, pero su trabajo fue muy creativo.

Algo similar le pasó a Einstein con varios matemáticos, entre ellos Grossman, se dice que Einstein recibió consejo de Hermann Minkowski, indicándole que la teoría de la relatividad se podría entender mejor desde la perspectiva geométrica, si se interpretaba en un espacio tiempo de cuatro dimensiones. También su amigo Grossmann le aconsejaría acercarse a la geometría diferencial y a los planteamientos de Bernhard Riemann, al ver sus desarrollos se dio cuenta de que lo había encontrado una base matemática para su teoría. Es decir, se pueden pensar en necesidades y luego acomodar una teoría para dar fundamento explicar las relaciones en la teoría, lo cual se basó en el pensamiento creativo de Einstein.

Creatividad y Enseñanza de la Matemática

Al parecer la creatividad requiere de muchos conocimientos y habilidades, sin embargo, puede provocarse el interés por algunas problemáticas que disparen la creatividad en los estudiantes, pues ellos desconocen muchas relaciones que sus maestros si las han estudiado. Es decir, se puede provocar una actividad donde el estudiante busque relaciones y formas de resolverlo y crear representaciones de los objetos que va construyendo.

En buena medida en eso se apoyan las propuestas del uso de manipulativos o de la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, pero deben llevarse a cabo considerando lo que se ha comentado anteriormente, lo que descubra el estudiante va a tener esa componente de innovación para él, pues desconoce los nuevos contenidos y con el manejo del plan de clase, el maestro podrá ayudarle a simplificar algunos aspectos o para ayudarle a darse cuenta por él mismo, de las relaciones existentes, deberá promover que se imagine lo que sucede cuando se hacen ciertas variantes en el problema o la situación bajo análisis y ponerlas a prueba representando lo que se piensa con los propios recursos y verbalizando lo que está pensando para compartirlo con sus compañeros.

La curiosidad no es algo difícil de despertar en los estudiantes si se le plantean situaciones que lo sorprendan como un objeto que rueda sin dar brincos como si fuera un círculo y su circunferencia, pero siendo otro tipo de figura, o problemas que parecen sencillos pero que resulta sorprendente que no se les pueda encontrar solución rápido. La creatividad para el estudiante implica encontrar algo nuevo a su existencia

La creatividad no se desarrolla con clases tipo conferencia o donde se les pide que resuelvan algunas actividades con procedimientos mostrados con anterioridad, lo más que se gana con eso es la repetición, que resulta aburrida y sin sentido.

Ta poco se desarrolla la creatividad pidiendo que resuelvan problemas de un libro de texto con sus propios métodos, se debe trabajar con materiales escritos también, pero planteándoles preguntas ¿Qué sucede sin cambias uno o más datos? ¿Qué sucede si cambias el contexto del problema? ¿Cuáles métodos para resolverlo son más aplicables a diversos datos o contextos? ¿Qué datos se deberían tener si se desea un tipo de respuesta? ¿Puedo combinar este problema con otros? ¿Qué problemas similares se pueden plantear pero que se refieran a temas diferentes?

Es decir, prestando atención a desarrollar capacidades para construir formas de solución o problemas nuevos a partir de una información dada, prestando atención en una variedad de recursos para resolverlo o representar las relaciones inherentes y analizando la relevancia de los resultados obtenidos.

Estas reflexiones forman parte del programa de trabajo “Matemáticas sin fórmulas”, sobre el cual puede tenerse alguna perspectiva en el canal de YouTube:

https://www.youtube.com/channel/UCx0xJI19rH8gyZPxkl-p5Dg

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.1

Creatividad en los Jolgorios Matemáticos

Jeanette SHAKALLI
Fundación Panameña para la Promoción de las Matemáticas, Panamá

Resumen

La Fundación Panameña para la Promoción de las Matemáticas (FUNDAPROMAT) fue fundada en diciembre'2019, es una Fundación privada sin fines de lucro que busca promover el estudio de las matemáticas en forma divertida e innovadora a través de eventos virtuales, con el propósito de fortalecer la educación matemática en Panamá.

El objetivo de FUNDAPROMAT es cambiar la percepción negativa que muchas personas tienen hacia las matemáticas para que descubran la belleza y la riqueza de la disciplina.

Cada semana la Fundación organiza Jolgorios Matemáticos, eventos virtuales interactivos para toda la familia. En este evento virtual, los participantes se separan en grupos dependiendo si son niños o adultos y luego se exploran actividades, en forma amena, de matemáticas en un ambiente de colaboración y mucha diversión. Estas actividades son diseñadas por los voluntarios de FUNDAPROMAT que provienen de diversos países como Panamá, Chile, México, Argentina y Colombia, y nos apoyan como facilitadores y co-facilitadores en los grupos. La función principal de los facilitadores y co-facilitadores consiste en guiar la conversación mientras los participantes comparten sus ideas y crear un entorno en el cual los participantes se sientan cómodos jugando con las matemáticas. En los Jolgorios Matemáticos se han desarrollado actividades como: "Tangram," "El Juego del Chocolate," "Pizzas a Domicilio," "Mensajes Secretos," "Regando Huertas", entre otras.

Una Fundación que está dedicada a promover el estudio de las matemáticas al público en general es necesaria para cambiar la manera en que las personas perciben las matemáticas para lograr fortalecer la educación matemática en Panamá. El país fracasó en las evaluaciones internacionales que miden el desempeño de los estudiantes en matemáticas. En el año 2019, Panamá ocupó el lugar #76 de los 79 países evaluados en la sección de matemáticas del Programa Internacional de Evaluación de los Alumnos (PISA) de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE).

Para inspirar a los niños a que les gusten las matemáticas, primero debemos averiguar qué es lo que más les llama la atención; si al niño le interesa el deporte, jugar videojuegos, hacer origami, explorar la naturaleza, hacer rompecabezas… todo esto tiene matemáticas. Una vez que conocemos qué le interesa al niño, lo único que debemos hacer es conectar el tema con las matemáticas. En el caso de los adultos, es importante preguntarles cuál ha sido su experiencia con las matemáticas. Luego de conocer la historia personal del adulto, es posible entender mejor su situación y guiarlo a descubrir el universo de las matemáticas.

Las matemáticas son necesarias en prácticamente todas las profesiones; no sólo presente en ciencia, tecnología e ingeniería, pues los carpinteros y los albañiles usan mucha geometría elemental, las costureras trabajan mucho con mediciones y proporciones, los chefs en sus

preparaciones “precisan” cantidades específicas de cada uno de los ingredientes, los mecánicos usan la aritmética para medir y comparar la densidad de los aceites y la presión en los frenos. Más allá de todo esto, las matemáticas entrenan al cerebro en el pensamiento lógico, permitiendo a las personas analizar situaciones cotidianas con razonamiento crítico, detectando qué variables intervienen y cuáles son sus efectos, de forma de poder tomar mejores decisiones.
Las matemáticas nos rodean. Podemos encontrar las matemáticas en la naturaleza, en el deporte, en la música, en la danza, en el arte, en la moda y hasta en los juegos. A modo introductorio, cito algunos ejemplos curiosos que evidencian que las matemáticas nos rodean:

- Magia y Matemáticas: Si tienes un mazo de 52 cartas en un cierto orden y realizas 8 mezclas faro (forma especial de mezclar las cartas), regresarás al orden original de las cartas. Los magos muchas veces usan este truco de magia con barajas para sorprender a su audiencia.
- Juegos y Matemáticas: Un Cubo de Rubik 3x3x3 tiene aproximadamente 43 trillones de permutaciones (diferentes posibles configuraciones). Un trillón es 10^{18}. Yusheng Du tiene el récord por haber resuelto el Cubo de Rubik en sólo 3.47 segundos en 2018.
- Matemáticas en la Naturaleza: Un hexágono es una figura geométrica con 6 lados. Una teselación hexagonal es una forma de ordenar los hexágonos de forma que cubran una superficie plana sin traslapar. Se pueden encontrar teselaciones hexagonales en la naturaleza, por ejemplo: en los panales de abejas.
- Arte y Matemáticas: La obra “Reptiles” del artista M. C. Escher (1898-1972) muestra a unos reptiles que emergen de un dibujo de dos dimensiones a la realidad tridimensional y luego vuelven a entrar al dibujo. También se observa un dodecaedro regular, que es una figura geométrica que tiene 12 caras y cada cara es un pentágono regular.
- Belleza y Matemáticas: Los azulejos decorativos en el Real Alcázar de Sevilla en España consisten en patrones de colores y figuras geométricas cuya simetría crea un ambiente de armonía.

¿Cómo hacer matemáticas? Teniendo conversaciones auténticas sobre los patrones que observamos y tener la capacidad de comunicar lo que descubrimos.

Disertación Invitada GTD-3.2

Creatividad y modelación con fotografías

Karina Amalia RIZZO

ISFDyT 24, Bernal, Quilmes (Argentina)

Instituto Sagrada Familia, Quilmes (Argentina)

Instituto Nuestra Señora del Perpetuo Socorro, Quilmes (Argentina)

karinarizzo71@gmail.com

Resumen

El propósito de esta comunicación es mostrar el potencial que tendría la modelación a partir de imágenes fotográficas y el software GeoGebra, para el desarrollo de la creatividad y la mejora en la adquisición de conceptos matemáticos. Entendiendo a la creatividad como una actividad imaginativa destinada a producir algo nuevo, original y de alto valor (NACCCE,1999; Carson 2017). A modo de ejemplo, se compartirán diversas actividades presentadas en un concurso denominado FotoGebra (www.fotogebra.org), que permitiría advertir cómo los estudiantes, al inventar sus propias preguntas y problemas e intentar diversos caminos para resolverlos, desarrollan las habilidades matemáticas, digitales, artísticas y la creatividad.

Palabras Clave*:* Matemática. Fotografía. GeoGebra. Creatividad. Modelación. Concurso**.**

1. Introducción

En los últimos tiempos, estamos siendo testigos de avances tecnológicos y científicos sin precedentes. Sumado a ello, desde el año pasado estamos atravesados por la pandemia y las circunstancias que son de público conocimiento. Ciertamente, vivimos en un mundo que cambia vertiginosamente y que requiere de personas creativas para poder enfrentar y adaptarse a él y al mismo tiempo, esta habilidad, les permitirá ser protagonistas de nuevos avances. En palabras de Silver (1997) la creatividad es el motor del crecimiento económico y social.

Algunos autores como Gervilla Castillo(1980), Villamizar Acevedo(2012) y Singer et al (2017) señalan que el concepto de creatividad tiene diversas definiciones, pero pese a ello puede decirse que a partir del siglo XX se considera una capacidad inherente al ser humano, que se manifiesta en todos los ámbitos culturales (López, 1995) y que permite la creación de ideas que modifican o incrementan lo existente, produciendo algo nuevo original y de alto valor (NACCCE,1999 Csizenmihalyi, 2000; Torrance y Haensly, 2003, Carson 2017).

Por ello, es necesario considerar el papel de la creatividad como una habilidad que es menester desarrollar tanto en el aula como en los sistemas educativos en general (European Commission, EC, 2006). En particular, diversos autores como Leikin (2013) ponen el acento en la creatividad en matemática, indicando que es central en los progresos de las diferentes ramas de esta ciencia y de las áreas científicas que la emplean (Leikin,2013).

Autores como De la Torre (1995) y Arteaga Valdés (2010) enfatizan que no es posible mejorar la calidad de la Educación Matemática, al margen de la creatividad.

Asimismo, se investiga el papel de la educación matemática en el desarrollo de la creatividad de los estudiantes (Leikin y Pitta Pantazi, 2013) y al respecto Rico (1990) expone que el pensamiento matemático requiere de una alta dosis de creatividad y Petrovsky (1980) señala que resolver un problema, exige innovar o crear pues frente a él, las estructuras cognoscitivas y operacionales del pensamiento del individuo necesitan métodos y conceptos idóneos.

En particular, podemos hallar muchas investigaciones (Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, 2013; Liljedahl, 2016); Mann, 2006; Sinclair, de Freitas y Ferrara, 2013) que resaltan la incidencia positiva del proceso de formulación y resolución de problemas, en el desarrollo de la creatividad (Araya, Giaconi y Martíne, 2019).

Por otro lado, Stoyanova (1998) identifica tres maneras de formular problemas: las situaciones libres, sin restricciones; las semiestructuradas donde crearan enunciados con base en alguna experiencia o contexto a través de ilustraciones o texto; y las situaciones estructuradas, donde se reformulan situaciones problemáticas dadas o se cambian condiciones (Espinoza, Lupiañez y Segovia, 2015).

De entre ellas, Silver (1994), destaca que es posible, estimular el pensamiento creativo de los estudiantes, mediante actividades de formulación de problemas matemáticos a partir de una situación o experiencia dada previamente. Al respecto, podemos mencionar la experiencia de Cázares (2000), quien utilizó tarjetas con diversas ilustraciones de situaciones relacionadas con el contexto, para que sus estudiantes plantearan por medio de ellas, problemas matemáticos y Espinoza (2011), presentó a sus alumnos una ilustración y una situación problemática escrita y les propuso inventar un problema aritmético difícil de resolver.

Por otro lado, según Lavicza et al. (2018) "Las actividades creativas pueden ayudar a los estudiantes a reconocer que hacer matemáticas "reales" es un pensamiento creativo; y el pensamiento creativo en matemáticas significa, que hagas tus propias matemáticas” (Lavizca, 2018 p. 110).

En este punto es importante señalar que, existen varias iniciativas de actividades creativas, algunas de ellas integran la fotografía en la enseñanza y el aprendizaje matemático, para proporcionar un contexto real para la resolución de problemas y ayudar a los estudiantes a desarrollar un fuerte sentido de autenticidad en su aprendizaje (Sharp et al., 2004). Asimismo, Furner y Marinas (2014) mencionan la importancia de importar fotografías al software GeoGebra, para posibilitar un aprendizaje de las matemáticas más real y relevante.

En las próximas líneas se compartirán algunas reflexiones sobre un concurso denominado FotoGebra, encuadrado en un enfoque de la Educación Matemática Realista (Alsina, Novo Martín, Moreno Robles, 2016), el cual invita a sus participantes a la exploración de fotografías con el software GeoGebra, para dar respuesta a sus propias preguntas, dando paso a la creatividad y la matematización de situaciones reales.

2. Concurso FotoGebra

Es una actividad que nace como una propuesta áulica, con el propósito de promover el interés hacia la matemática y que conecta a ésta ciencia con las artes y otras materias STEAM a través de la modelización de fotografías y la utilización del software GeoGebra.
En el año 2016, dicha actividad trasciende el aula y se convoca a participar a estudiantes de otras instituciones de educación secundaria de Argentina. Debido al amplio impacto a partir del 2019 se extendió a todos los países de Iberoamérica, incluyendo España y Portugal y se adicionaron dos categorías más para la participación de estudiantes de Formación Docente.

Siendo en total, 4 cuatro categorías: Categoría 1: Alumnos 1º, 2º y 3º ES; Categoría 2: Alumnos 4º, 5º, 6º y 7º de ESS; Categoría 3: estudiantes de 1º y 2º año de Formación Docente y Categoría 4: estudiantes de 3º, 4º y 5º año de Formación Docente. Los trabajos, de la categoría 1 y 3 refieren a "Geometría" y los de la 2 y 4 a "Funciones".

Este concurso denominado FotoGebra (www.fotogebra.org), pues conjuga la fotografía y el software libre GeoGebra, reta a los participantes a observar con ojos matemáticos su alrededor, tomar una fotografía y a partir de ella, diseñar una situación problemática que la involucre para luego con ayuda de dicho programa, modelizar matemáticamente tal situación planteada y resolverla.

GeoGebra es un software de geometría dinámica, libre y multiplataforma, que fue concebido para favorecer la educación y que es imprescindible en el aula de matemática, pues permite realizar construcciones que en lápiz y papel no podrían estar realizándose (Carrillo, 2012; Hohenwarter, Kovács y Recio, 2019)

El potencial del programa GeoGebra como recurso didáctico en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, en particular a través del trabajo que se puede llevar a cabo mediante el uso de imágenes, es una fuente inagotable para hacer conexiones explícitas entre la matemática, el arte y la tecnología. La exploración de las fotografías con éste software, permite crear modelos matemáticos reales y descubrir sus bondades o limitaciones para resolver problemas, gracias a su dinamismo y las múltiples herramientas que posee dicho software (Rizzo, Volta, 2014, 2015 y 2018: Rizzo, Costa, 2019, 2020: Rizzo, del Río y Manceñido, 2019; Rizzo, del Rio Manceñido, Lavicza, Houghton, 2019; Rizzo, 2019, 2020).

Debido a lo expuesto previamente, con esta iniciativa se pretende, poner de relieve las características del programa GeoGebra para trabajar la modelización matemática, en el enfoque de Blomhøj (2008), Segal, Giuliani (2008) y Pochulu (2018) y al mismo tiempo, despertar la creatividad de los participantes, en todos los momentos del mismo al: solicitar observar con ojos matemático nuestro alrededor, "atrapar" un concepto matemático con una fotografía, pensar un "lema" que relacione la fotografía tomada con un concepto matemático, diseñar sus propias preguntas y problemas e intentar diversos caminos para resolverlos con el uso de GeoGebra.

3. Obras del Concurso

Aquí, se detallarán algunas obras presentadas en las ediciones del concurso, accesibles en el enlace: https://www.geogebra.org/u/fotogebra, compartiendo y analizando dos trabajos de las categorías I y II correspondientes a la participación de estudiantes de educación secundaria y uno por cada categoría restante (III y IV). Estas producciones seleccionadas servirán como ejemplos sobre el valor del concurso para el desarrollo de la creatividad y la mejora en la adquisición de conceptos matemáticos.

3.1. El Muro Matemático (Categoría I - Edición I)

El primer trabajo, que se muestra en la Figura 1, fue realizado por una estudiante de la categoría I de la primera edición del concurso, quien utilizó una fotografía de un muro sin revocar, donde se puede observar los ladrillos a la vista. Pese a ser simplemente una imagen de una pared, la estudiante pudo ser muy creativa a la hora de crear la situación problemática y de resolverla con el auxilio de GeoGebra. Asimismo, al finalizar deja planteado un reto para los lectores incitando a que sean éstos los que piensen creativamente.

Figura 1: El Muro Matemático. Autor: Franco Luana

Categoría I. Edición 2016

https://www.geogebra.org/m/yrshvw7s#material/pw2qhavz

3.2. El Genio de la Botella (Categoría I - Edición II)

En el segundo ejemplo, se puede observar nuevamente, cómo el estudiante deja volar su imaginación y diseña una fantástica situación problememática a partir de una fotografía de una botella tomada desde arriba, vislumbrando a través del orificio de la misma, pequeños planetas y sus órbitas, y con la ayuda de GeoGebra pudo determinar las circunferencias concéntricas y concluir que la distancia que recorre el planta mas lejano es 5 veces superior al del mas cercano.

Figura 2: El genio de la botella. Autor: Federico Enzo Labianca

Categoría I. Edición 2017

https://www.geogebra.org/m/peRvw9t2#material/BbPBW6wM

3.3. <u>Puerto Madero a trozos (Categoría II - Edición I)</u>

En la fotografía, del tercer ejemplo, se observa la Fragata ARA Libertad, amarrada en el apostadero naval Dársena Norte del puerto de Bs. As. Los postulantes, observan que las luces que decoran el buque escuela, se prestan a una modelización, por ello, identifican elementos que la constituyen y así determinan las "funciones a trozos" que se ajustan a toda la iluminación.

Luego, se preguntaron respecto de la longitud del palo mayor, para ello hallaron el valor numérico del punto indicado en el gráfico, que se corresponde con el extremo superior del mismo. Asimismo, cabe destacar que han tenido en cuenta la relación entre las unidades reales y las de GeoGebra (escala) y que, nos hemos asombrado al corroborar la exactitud de éstos cálculos con los datos encontrados en Wikipedia. (**https://es.wikipedia.org/wiki/ARA_Libertad_(Q-2)#:~:text=La%20altura%20m%C3%A1xima%20del%20palo,siendo%20este%20un%20buque%20escuela)**

Es importante resaltar aquí, que los estudiantes podrían haber llegado a la misma respuesta simplemente midiendo la longitud del palo mayor, con la herramienta correspondiente. Es evidente que, han desarrollado un camino muy creativo para responder a sus inquietudes, que luego dio paso a otros cuestionamientos.

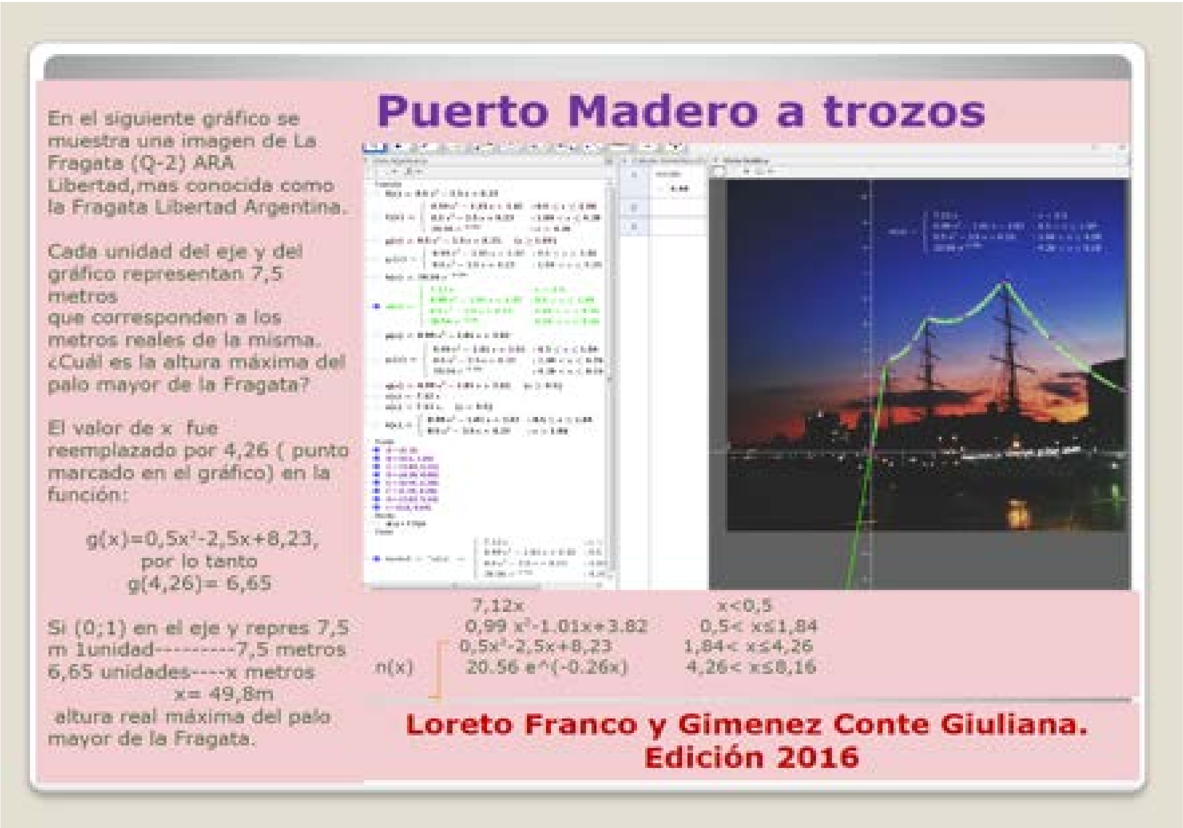


Figura 3: Puerto Madero a trozos. Autores: Franco Loreto y Juliana Giménez Conte

Categoría II. Edición 2016

https://www.geogebra.org/m/yrshvw7s#material/kb7dxrba

3.4. Convención de skaters (Categoría II - Edición II)

En el cuarto trabajo, se observa una gran creatividad en el planteo de la situación problemática, pues mediante una malla plástica pudieron construir un espacio de imaginación y fantasía al suponer una competencia de skaters sobre una rampa con forma de espiral logarítmica. Además, se destaca un gran manejo del software, que le permitió dar respuesta al interrogante planteado inicialmente, a través de la modelización y el cálculo de las longitudes de los arcos que constituyen la espiral.

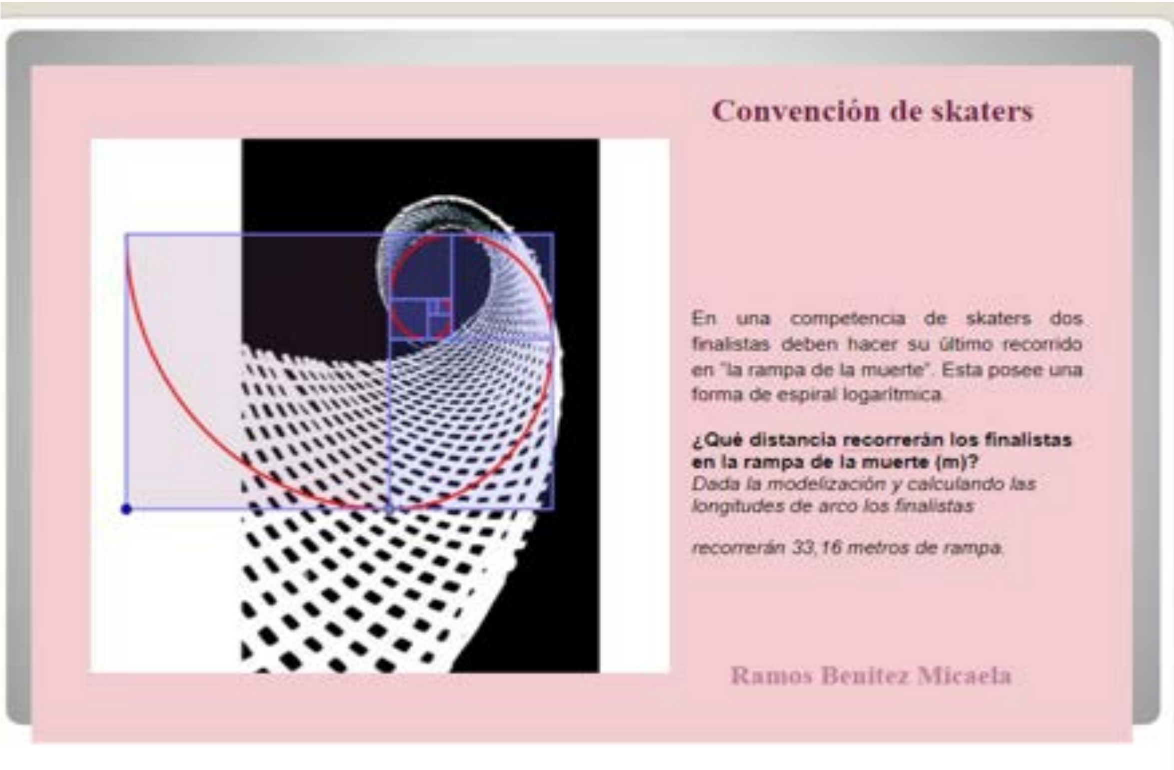


Figura 4. Convención de skaters. Autora: Micaela Ramos Benítez

Categoría II. Edición 2017

https://www.geogebra.org/m/sK5TWhd3

3.5. <u>Orquídeas para regalar (Categoría III - Edición IV)</u>

En esta ocasión, los participantes dejaron volar nuevamente su imaginación, pero esta vez lo hicieron pensando en su próximo rol como docentes y en el mejor modo de acercar a sus futuros alumnos una situación problemática que les permita abordar las características y propiedades de los polígonos irregulares. Para ello, mediante la fotografía de una bella orquídea, se les solicitó que investiguen el mejor modo de acomodar dicha flor justo en el centro de una caja dada.

Figura 6. Orquídeas para regalar. Autores: Evelyn Golz y Adrián Stepamenko

Categoría III. Edición 2019

https://www.geogebra.org/m/yfk4tbvk#material/hyg2xzyh

3.6. <u>Universo semiesférico (Categoría IV - Edición III)</u>

En la quinta obra elegida, se observa una gran creatividad tanto en el planteo como en la resolución de la situación problemática y un excelente manejo del software, pues han utilizado diversas herramientas y vistas que ofrece GeoGebra, incluida la vista 3D.

En particular, la inclusión de deslizadores, proporcionó un entorno eficaz para la investigación, pudiendo las estudiantes experimentar diferentes radios para la cúpula, y arribar a la respuesta adecuada, respecto de los interrogantes inicialmente planteados.

Figura 5. Universo semiesférico. Autoras: Natalia Gómez y Lidia Sena

Categoría IV. Edición 2018

https://www.geogebra.org/m/xnqsnr3x#material/mn7nqzda

4. A modo de síntesis

Los ejemplos precedentes dejan entrever que este concurso, basado en la modelación de fotografías y la resolución de problemas, posibilita una enseñanza y aprendizaje más cercano al estudiante, donde los problemas no son el fin del aprendizaje, sino el comienzo del mismo, pues a partir de hacerse preguntas e intentar dar respuesta a las mismas, se propicia un medio eficaz para la adquisición y comprensión de contenidos matemáticos, así como al afianzamiento de lo que se está aprendiendo, como lo expresan Ayllon et al(2016) quienes enfatizan que cuando un individuo se enfrenta a la tarea de inventar un problema, se ve obligado a pensar y analizar críticamente el enunciado, a examinar los datos que este presenta y manipular distintas estrategias de resolución para obtener la solución y todo esto también se ejercita a través de la resolución de problemas.

Además, cabe destacar que, dicho proceso de invención-planteamiento de problemas permite a los estudiantes vivenciar una auténtica actividad matemática a la vez que se estimula el pensamiento crítico y creativo (Bonotto, 2013).

Ciertamente, la creación del planteamiento de un problema, es un proceso matemático complejo que requiere un esfuerzo de interpretación personal y de dar significado a un contenido matemático. Sin embargo, varios estudios (Espinoza, Lupiañez y Segovia, 2015; Bonotto, 2013; Ayllón y Gómez, 2014) resaltan que la invención de problemas puede ser un medio eficaz para mejorar la disposición, actitud y confianza hacia la matemática, así como el desarrollo de la creatividad, entre otros (Sánchez González, et al, 2020), cuestión que se ha podido observar en las producciones presentadas en cada una de las ediciones del concurso.

5. Conclusión

En este trabajo se describe muy sucintamente el certamen, denominado FotoGebra, donde los estudiantes realizan sus producciones a partir de una fotografía, mediante el planteamiento libre de una situación problemática y su resolución. Luego, por medio de la descripción de algunas obras presentadas se pudo observar que esta actividad contribuiría a potenciar la creatividad en el estudiante a través de la modelación matemática con imágenes tomadas de la realidad.

Finalmente, se propone investigar si esta actividad en formato de concurso, es una buena estrategia para desarrollar en los participantes las habilidades relacionadas con la creatividad e indagar respecto de cuáles competencias matemáticas propicia y cómo el software GeoGebra ayuda para adquirirlas. Dicha investigación, se llevará adelante en el marco del Doctorado en Enseñanza de las Ciencias, mención matemática, UNICEN.

6. Referencias Bibliográficas

Alsina, Á., Novo Martín, M. L., & Moreno Robles, A. (2016). Redescubriendo el entorno con ojos matemáticos: Aprendizaje realista de la geometría en Educación Infantil. Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 5(1), 1-20.

Araya, P, Giaconi, V, Martíne M. V (2019). Pensamiento matemático creativo en aulas de enseñanza primaria: entornos didácticos que posibilitan su desarrollo. https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-45652019000100319

Araya, Paulina, Giaconi, Valentina, & Martínez, María Victoria. (2019). Pensamiento matemático creativo en aulas de enseñanza primaria: entornos didácticos que posibilitan su desarrollo. *Calidad en la educación*, (50), 319-356. https://dx.doi.org/10.31619/caledu.n50.717 Disponible en: https://scielo.conicyt.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0718-45652019000100319

Arteaga Valdés (2010) competencias básicas el desarrollo de la creatividad en la educación matemática. Congreso Iberoamericano de Educación. Disponible en: https://www.adeepra.org.ar/congresos/Congreso%20IBEROAMERICANO/COMPETENCIASBASICAS/R0854b_Arteaga.pdf

Ayllón, M. F., & Gómez, I. A. (2014). La invención de problemas como tarea escolar. Escuela Abierta: Revista de Investigación Educativa 17, 29-40.

Ayllón, M.F., Gómez, I.A.; Claver, J.B., (2016). Mathematical Thinking and Creativity through Mathematical Problem Posing and Solving. *Propósitos y Representaciones, 4(1*), 169-218. Disponible en: http://revistas.usil.edu.pe/index.php/pyr/article/view/89

Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. Revista de Educación Matemática, 23(2), 20-35.

Bonotto, C. (2010). Involucrar a los estudiantes en actividades de modelado matemático y planteamiento de problemas. *Revista de modelos y aplicaciones de las matemáticas, 1* (3), 18–32. https://bu.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/2127

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 37–55. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7

Carson Shelley (2017) Entrevista disponible en: https://www.harvard-deusto.com/entrevista-a-shelley-carson-los-profesionales-del-marketing-deberian-mejorar-sus-habilidades-espontaneas#:~:text=La%20%22creatividad%22%20es%20la%20capacidad,alguna%20manera%2C%20se%20puedan%20adaptar

Cázares, J. Castro; Martinez, E, Rico Romero, L. (1998). La invención de problemas en escolares de primaria: un estudio evolutivo. Memoria de tercer ciclo. Universidad de Granada. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/41207950_La_invencion_de_problemas_en_escolares_de_Primaria_Un_estudio_evolutivo

Csikszentmihalyi, M. (2000). Implications of a systems perspective for the study of creativity. In R. J. Sternberg (Ed.), *Handbook of creativity* (pp. 313-335). Cambridge: Cambridge University Press. Disponible en: https://books.google.com.ar/books?hl=es&lr=&id=d1KTEQpQ6vsC&oi=fnd&pg=PA313&ots=FuY14lrms_&sig=IjBkZnIfmjaSROESoDIioXV0Tys&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false

De la Torre, S. (2003). Conversando con Robert J. Sternberg sobre creatividad. Disponible en:http://www.ub.edu/sentipensar/pdf/saturnino/conversando_con_robert_sobre_creatividad.pdf

Espinoza G., J., Lupiáñez G., J. L., & Segovia A., I. (2015). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, *14*(2), 1-12. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i2.1664Disponible en:https://revistas.tec.ac.cr/index.php/matematica/article/view/1664

Espinoza G, J. (2011). Invención de problemas aritméticos por estudiantes con talento matemático: Un estudio exploratorio. Memoria de Tercer Ciclo. Universidad de Granada. Disponible en: http://repositorio.conicit.go.cr:8080/xmlui/handle/123456789/113

European Commission, EC. (2006). Recommendation 2006/962/EC of the European Parliament and of the Council of 18 December 2006 on key competences for lifelong learning, Offcial Journal L 394 of 30.12.2006, 10-18. Disponible en: https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=celex%3A32006H0962

Gervilla Castillo (1980) La creatividad y su evaluación. Revista Española de Pedagogía. Disponible en: https://revistadepedagogia.org/xxxviii/no-149/la-creatividad-y-su-evaluacion/101400048954/

Gervilla Castillo (2015). Creatividad, práctica escolar y política educativa. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/188191453.pdf

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in school children. Education Studies in Mathematics, 18(1), 59-74.

Hohenwarter, M. Kovács, Z y Recio, T. (2019). Determinando propiedades geométricas simbólicamente con GeoGebra. Números Revista de Didáctica de la Matemática. Nº100. Pág. 79-84. Disponible en: http://www.sinewton.org/numeros

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D. *et al. (2013)* Conectando la creatividad matemática a la habilidad matemática. *ZDM Mathematics Education* **45,** 167–181. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0467-1

Koichu, B., & Kontorovich I. (2012). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. Educational Studies in Mathematics, 83(1), 71-86

Leikin, R. (2013). Evaluating mathematical creativity: The interplay between multiplicity and insight. *Psychological Test and Assessment Modeling*, *55*(4), 385-400. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/25760616.pdf

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM Mathematics Education*, *45*(2), 159-166. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1 Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/258333499_Creativity_and_mathematics_education_The_state_of_the_art

Liljedahl P. (2016) Construyendo aulas de pensamiento: condiciones para la resolución de problemas. En: Felmer P., Pehkonen E., Kilpatrick J. (eds) Plantear y resolver problemas matemáticos. Investigación en Educación Matemática. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-28023-3_21 Disponible en:https://projects.ias.edu/pcmi/hstp/sum2016/morning/rop/BuildingThinkingClassrooms.pdf

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276. https://doi.org/10.1007/s10649-007-9104-2 . Disponible en: https://www.beteronderwijsnederland.nl/wp-content/uploads/2014/12/rote-learning-and-all-that.pdf

López, R. (1995). Desarrollos conceptuales y operacionales acerca de la creatividad. Santiago de Chile: Universidad Central.

Mann, EL. (2006) Creatividad: la esencia de las matemáticas. *Revista para la educación de los superdotados*, 30 (2): 236-260. doi: https://doi.org/10.4219/jeg-2006-264 Disponible en: https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ750778.pdf

Méndez Burguillos, W y Leal Huise, S (2018). La modelación matemática y los problemas de aplicación como promotores de la creatividad en la enseñanza y el aprendizaje de la trigonometría. Revista de Investigación, vol. 42, núm. 94, 2018 Universidad Pedagógica Experimental Libertado. Disponible en: https://www.redalyc.org/jatsRepo/3761/376160142008/html/index.html

National Advisory Committee on Creative and Cultural Education (NACCCE) (1999). All Our Futures: Creativity, Culture and Education. London: Department for Education and Employme.

Petrovsky, V.A (1978): "La psicología de los tipos principales de aprendizajes y de los procesos de enseñanza, en A.V. Petrovsky Psicología Pedagógica y de las Edades, Ed. Pueblo y Educación, La Habana, pp.285-330

Pochulu, M [et al.]; compilado por Marcel David Pochulu. (2018) La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones. Libro digital. Villa María: GIDED.

Rico Romero, L (1990): "Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural", en S. Llinareas Ciscar y Ma. Victoria Sánchez Teoría y Práctica en Educación Matemática, Ediciones Alfar, Sevilla, pp. 17-61.

Rizzo, K (2020). Concurso Fotogebra = Matemática + Fotografía + GeoGebra. Reflexión Académica en Diseño & Comunicación Año XXI. Vol 44. noviembre 2020. Bs As. Argentina. Disponible en: https://fido.palermo.edu/servicios_dyc/publicacionesdc/archivos/821_libro.pdf

Rizzo, K.; Del Río, L. y Manceñido, M. (2019) Looking at Mathematics through the Lens of a Camera**.** Bridges 2019 Conference held at Johannes Kepler University in Linz, Austria, 15–20 July. Isbn: 978-1-938664-27-4, issn:1099-6702. Disponible en: http://archive.bridgesmathart.org/2019/bridges2019-559.html

Rizzo, K Costa, V (2020) ¿Cuáles competencias digitales favorece desarrollar el concurso FotoGebra? X Congreso Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas 20, 21 y 22 de febrero de 2020. PUCP Lima Perú. Disponible en: http://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/171568

Rizzo, K y Volta, L (2018) Funciones, GeoGebra y Situaciones cotidianas. SOAREM. Disponible en: https://scholar.google.es/scholar?cluster=14407957809913774185&hl=es&as_sdt=0,5

Rizzo, K. (2019). FotoGebra y competencias digitales: análisis de un caso. Revista épsilon, nº103. 35-44.Disponible en: https://thales.cica.es/epsilon/sites/thales.cica.es.epsilon/files/epsilon103_3.pdf

Rizzo, K., Volta, L. (2014). Una alternativa para la motivación y la visualización de la matemática en lo cotidiano. Congreso Iberoamericano de Ciencia, Tecnología, Innovación y Educación. Madrid, España: OEI, 2014. Disponible en: http://www.oei.es/congreso2014/contenedor.php?ref=memorias#30

Rizzo, K., Volta, L. (2015). Matemática cotidiana, tic y funciones polinómicas. II JECICNaMa (Segundas Jornadas de Enseñanza, Capacitación e Investigación en Ciencias Naturales y Exactas). Disponible en:

https://jornadasjecicnama.wordpress.com/ponencias/

Rizzo, K.; Costa, V. (2019). *Matemática, GeoGebra y fotografía, combinados para motivar la enseñanza y el aprendizaje*. V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, 8 al 10 de mayo de 2019, Ensenada, Argentina. EN: Actas. Ensenada: Universidad Nacional de La Plata. Facultad de Humaniades y Ciencias de la Educación. Departamento de Ciencias Exactas y Naturales. Disponible en: http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11960/ev.11960.pdf

Rizzo, K.A., del Río, L S., Manceñido, M E., Lavicza, Z and Houghton, T. (2019) "Linking Photography and Mathematics with the Use of Technology" *Open Education Studies*, vol. 1, no. 1, 2019, pp. 262-266. https://doi.org/10.1515/edu-2019-0020

Rizzo, K.; Volta, L. (2018). *Funciones, geogebra y situaciones cotidianas.* En Lestón, Patricia (Ed.), ACTAS DE LA XII CONFERENCIA ARGENTINA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA (pp. 667-675). Buenos Aires, Argentina: SOAREM. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/19316/

Sánchez González, L., Juárez Ruiz, E. L. y Juárez López. J. A. (2020) Análisis de creatividad en el planteamiento de problemas de ecuaciones. UNIÓN. Año XVI. Número 60.

Segal, S. y Giuliani, D. (2008). Modelización matemática en el aula. Posibilidades y necesidades. Buenos.

Shriki, A. (2013). Un modelo para evaluar el desarrollo de la creatividad de los estudiantes en el contexto de la presentación de problemas. *Educación creativa, 4,* 430-439. doi: 10.4236 / ce.2013.47062 .

Silver, EA (1997). Fomentar la creatividad a través de una instrucción rica en resolución y planteamiento de problemas matemáticos. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 29, 75-80. doi: 10.1007 / s11858-997-0003-x Disponible en: https://www.scirp.org/(S(vtj3fa45qm1ean45vvffcz55))/reference/ReferencesPapers.aspx?ReferenceID=865793

Sinclair, N., de Freitas, E. & Ferrara, F. (2013) Encuentros virtuales: el mundo turbio y furtivo de la inventiva matemática. *ZDM Mathematics Education* **45,** 239–252. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0465-3. Disponible en: https://core.ac.uk/download/pdf/301875016.pdf

Singer, F, Sheffeld, L. y Leikin, R. (2017). Advancements in research on creativity and giftedness in mathematics education: Introduction to the special issue. *ZDM Mathematics Education, 49*(1), 5-12. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0836-x Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/315481446_Advancements_in_research_on_creativity_and_giftedness_in_mathematics_education_introduction_to_the_special_issue

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh and N. Ellerton (Eds.), Research in mathematics education: A contemporary perspective (pp. 164-185). WA, MASTEC: Edith Cowan University.

Torrance, E (1976) Ponencia presentada en el Symposium Internacional de Creatividad ICE. Universidad Politécnica de Valencia, 22-27.

Torrance, EP y Haensly, PA (2003). *Evaluación de la creatividad en niños y adolescentes.* En CR Reynolds & RW Kamphaus (Eds.), *Manual de evaluación psicológica y educativa de los niños: inteligencia, aptitud y rendimiento* (p. 584–607). La prensa de Guilford. Disponible en: https://psycnet.apa.org/record/2004-00018-024

Villamizar Acevedo, G. (2012). La creatividad desde la perspectiva de estudiantes universitarios REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, vol. 10, núm. 2, 2012, pp. 212-237 Red Iberoamericana de Investigación Sobre Cambio y Eficacia Escolar Madrid, España. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/551/55124596015.pdf

<u>Conferencia Central GTD-4.1</u>

Dimensiones del Pensamiento Estadístico implícitos en una experiencia de enseñanza

Liliana Mabel TAUBER
Facultad de Humanidades y Ciencias
Universidad Nacional del Litoral

estadisticabiologiafhuc@gmail.com

Resumen

Diseñar propuestas de enseñanza, aprendizaje y evaluación de conceptos estadísticos en carreras de Ciencias Sociales resulta siempre un desafío, ya que hay evidencia de que los estudiantes tienen escasa formación previa y actitudes negativas hacia la Estadística. Los antecedentes muestran que es imperioso diseñar propuestas didácticas y evaluativas que propicien el pensamiento estadístico y que acerquen la Estadística a los estudiantes. Es así que, a partir de una investigación de diseño, se desarrolló y aplicó una propuesta didáctica centrada en el estudio de indicadores sociales y asociada a ella, se llevó adelante una evaluación continua. En esta charla se expondrán los fundamentos didácticos de esta experiencia, centrada en el estudio de indicadores sociales, la cual fue implementada en 2020 a través de un enfoque de aula y aprendizaje invertido. Se discute sobre algunas producciones de los estudiantes, las cuales permiten evidenciar las relaciones complejas que logran establecer cuando trabajan con datos reales y contextos propios de su área. La experiencia permite mostrar que, aunque los estudiantes no dispongan de conocimientos estocásticos previos, es posible implementar un proceso de estudio que propicie el pensamiento estadístico y el cuestionamiento sobre la información. Asimismo, se mostrará que, aunque los estudiantes demuestran distintos perfiles de razonamiento y de pensamiento estadístico, la mayoría logra dar cierto nivel de significatividad a la información estadística y a la relevancia de pensar estadísticamente en sus futuras profesiones.

<u>Palabras Clave</u>: Pensamiento Estadístico. Estadística Social. Evaluación continua. Aula invertida. Investigación de diseño.

Introducción

Desde que se conformó el Estado moderno, ha sido fundamental conocer diversas características de la población que son necesarias en la organización de un Estado. Este conocimiento brinda el soporte fundamental para la toma de decisiones que busque mejorar la vida de todos los que viven en un mismo territorio; decisiones que en muchas ocasiones, tienen consecuencias sobre la sociedad global. En consecuencia, para poder analizar, comprender, interpretar, reflexionar y evaluar las decisiones propias y ajenas, así como para interpretar los distintos vaivenes de los fenómenos sociales, se hace cada vez más necesario que los ciudadanos piensen críticamente sobre la información. Ese pensamiento brinda la libertad para decidir con fundamentos basados en evidencia empírica creíble y no en creencias o *ideas preconcebidas* (Rosling, 2007).

La evolución histórica de la Estadística y su constante perfeccionamiento al servicio de la sociedad, en el presente siglo se ha potenciado con la llegada del *Big Data* (Escudero, 2019), los gráficos dinámicos y una serie de grandes bases de datos de libre acceso (Por ejemplo: Gapminder, Banco Mundial, entre otros) han provocado que, aunque un ciudadano no forme parte de los organismos encargados de tomar decisiones en relación con cuestiones de Estado, se vea obligado a conocer y comprender mucha de la información básica que tienen en cuenta los dirigentes al tomar sus decisiones. No obstante, ese conocimiento no implica sólo una lectura de la información, sino que es imperioso que los ciudadanos estén preparados para realizar una lectura crítica, tanto de la información como de los datos y de las metodologías en las mediciones que hay detrás de ellos.

Teniendo en cuenta este panorama, es necesario identificar las dimensiones de la alfabetización y del pensamiento estadístico, de tal forma de poder reconocer el entramado fundamental que se debería considerar en una propuesta didáctica que tenga como objetivo formar ciudadanos estadísticamente cultos (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013) Con dicho propósito, en este trabajo describimos las características de una propuesta de enseñanza desarrollada en un curso universitario destinado a carreras de Ciencias Sociales. La misma, se centra en las conexiones entre distintos indicadores sociales, algunas ideas estadísticas fundamentales (Goetz, 2008) y las dimensiones involucradas en un proceso de pensamiento estadístico (Behar y Grima, 2004, 2014).

Marco Teórico

Las interpretaciones que se da a la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadísticos, han variado con el paso del tiempo, quedando plasmados esos cambios en distintos trabajos (Pinto, Tauber, Zapata-Cardona, Albert y Mafokozy, 2017; Ben-Zvi y Garfield, 2004), muchos de los cuales parten de la siguiente acepción de alfabetización estadística (AE): "*la habilidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que encontramos en la vida cotidiana y la capacidad para apreciar las contribuciones que el pensamiento estadístico puede hacer a la vida pública, profesional y personal*" (Wallman, 1993). Esta idea implica diversos procesos de razonamiento y de pensamiento que vienen de la mano con la evolución tecnológica y los grandes volúmenes de datos a los que vivimos expuestos a diario (Engel, 2019). Es en este sentido que, en cualquier situación de enseñanza y de aprendizaje en la que se pretenda propiciar la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico, deberían interactuar éstos con el conocimiento estadístico y contextual (Gal, 2004). Es así que, tomamos las consideraciones realizadas en Behar y Grima (2004, 2014) para identificar las dimensiones que orientaron el diseño y análisis de nuestra propuesta didáctica, las cuales se describen a continuación:

- **Dimensión de la Evidencia**: Permite el desarrollo de actitudes que buscan evitar especulaciones subjetivas y propicia la necesidad de fundamentar las conclusiones en evidencia objetiva basada en datos confiables.
- **Dimensión de los datos y la metodología:** Busca generar actitudes de cuestionamiento y crear conciencia sobre el hecho que el análisis de datos está íntimamente ligado a la metodología asociada a los mismos y reconoce que para llegar a los datos se debe pasar por un proceso de *pensamiento estadístico*.

- **Dimensión de la variación:** Reconoce que, en cualquier proceso de toma de datos, la variabilidad es inherente al mismo y que está omnipresente en la modelación de la realidad, por lo que es imposible eliminarla.
- **Dimensión de la señal y el ruido:** Considera que, en todo análisis de datos, hay factores de confusión que pueden controlarse y también, tendencias que permiten medir la representatividad de ciertos parámetros. **Dimensión del Cuestionamiento:** identifica que una situación real puede provocar un problema o una pregunta que para resolverlo se debe realizar un abordaje que no tiene una estructura determinada. Ello implica realizar preguntas que permitan identificar un verdadero problema estadístico (Gal, 2004, 2019).
- **Dimensión del Análisis:** Valora la relevancia de la Estadística cuando se debe comparar, predecir, estimar, construir indicadores y decidir, reconociendo alcances y limitaciones.
- **Dimensión de la Comunicación y Transnumeración:** Permite comunicar los resultados, indicando su poder explicativo y las condiciones en las que es posible aplicarlos (Pfannkuch y Rubick, 2002).

Estas dimensiones se ponen en relación mediante una trama de conexiones entre el conocimiento estadístico y el conocimiento del contexto donde se sitúa el problema que se pretende abordar. Esa red permite construir el sentido estadístico a partir de la evidencia que proporcionan los datos, por medio de un diálogo constante en una cadena de representaciones estadísticas, que se denomina *transnumeración*. Este proceso, involucra pensar sobre los datos, traducirlos a resúmenes y éstos a un informe que permita sacar conclusiones o tomar decisiones. Lo esperable sería que esta red se vaya construyendo a través de los años, en los distintos estadios educativos. Pero, la realidad es que aún en el nivel superior, se debe pensar en propuestas que generen la interacción de estas dimensiones, desde la alfabetización estadística, para acompañar a los estudiantes en la construcción del sentido estadístico y generar el pensamiento estadístico a largo plazo (Behar y Grima, 2004).

Características de la propuesta didáctica y de los sujetos

Considerando las dimensiones descritas, se elaboró una propuesta de enseñanza y de aprendizaje con un proceso evaluativo integrado a la misma. Las características de la misma, han sido descriptas en el trabajo de Tauber, Cravero y Santellán (2019), y revisadas a la luz de las necesidades del proceso de virtualización, en condiciones de pandemia, durante el 2020. Una ampliación a los trabajos citados se centra en la utilización obligatoria de algún software o app que permita el análisis estadístico con una base de datos de gran volumen.
El espacio curricular en el que se enmarca la propuesta reúne estudiantes de cuatro licenciaturas: Sociología, Ciencia Política, Geografía e Historia. Tiene una duración de un semestre y los contenidos se centran en estadística descriptiva y exploratoria, univariada y bivariada, contextualizados en torno a diversos *indicadores sociales*. Dada la heterogeneidad de los estudiantes, la propuesta busca considerar que el proceso de aprendizaje es personal, por lo cual es utópico esperar una uniformidad de conocimientos en todos los estudiantes. En concordancia con esta postura, se propicia el estudio de la construcción de datos, sus definiciones metodológicas, la elaboración de conjeturas basada en la exploración de grandes bases de datos, el auto-cuestionamiento sobre el alcance de los indicadores analizados y se propicia la elaboración de propuestas (de los propios estudiantes) basadas en nuevos indicadores que amplíen la información analizada en torno a una problemática específica, particularmente, en torno a la medición de la pobreza.

Metodología

Se realizó un análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990) de las producciones que los estudiantes han realizado en base a una tarea de evaluación continua, propuesta en 2020. El proceso evaluativo tuvo diversas etapas a lo largo del semestre con distintas tareas. En este trabajo se analiza particularmente una tarea de la segunda etapa de evaluación, realizada de manera asincrónica y virtual. Los estudiantes disponían de la base de datos proveniente de la Encuesta Permanente de Hogares (EPH), que realiza de manera trimestral el Instituto Nacional de Estadísticas y Censos (INDEC). Particularmente trabajaron con datos del aglomerado

Gran Santa Fe del último trimestre 2018. La elección de este trimestre y aglomerado se debe a dos motivos: 1. Son datos de la región donde viven nuestros estudiantes y, aunque no son los datos del último trimestre publicado, sirven como nexo para la última etapa evaluativa en la que deben comparar con el último trimestre de 2019 (último periodo publicado para el momento en que se realizó la evaluación). En este sentido consideramos que se verifican las condiciones especiales que identifica Engel (2019), ya que se trabaja con una problemática que, en Argentina, lleva algunos años en la discusión política, que es la medición de la pobreza y, además se consideran datos que representan a los estudiantes y a sus hogares, mediado a través del procesamiento tecnológico de datos.

Análisis de una fase de evaluación centrada en indicadores sociales

En la Tabla 1, se resume el análisis de contenido asociado a cada una de las dimensiones descritas antes, enmarcadas en una evaluación continua (Anijovich y Cappelletti, 2017) y que se espera que aparezcan al resolver la tarea.

Tarea	***Acciones esperadas/Dimensiones que pone en relación la tarea***
Introducción. *Se establece como objetivo de estudio realizar una comparación entre el Ingreso Total Familiar de los hogares del Gran Santa Fe, según sean inquilinos o arrendatarios de la vivienda con aquellos que ocupan la vivienda de manera gratuita. En función de este objetivo, deberán identificar, en la base de datos del tercer trimestre de 2018 y en el manual metodológico, las variables y códigos que les permita realizar las siguientes tareas:*	*Para poder llevar a cabo las demás tareas, esta introducción propicia que el estudiante deba trabajar con la base de datos EPH para el Gran Santa Fe, la cual contiene 88 variables y 18.616 casos (cada caso corresponde a un hogar). Dado que cada variable está codificada, el estudiante deberá utilizar otro documento que es el manual metodológico que proporciona el INDEC. Sólo a través de este documento podrá identificar cuáles son las variables con las que debe trabajar: ITF y II_7 con sus códigos 3 y 6 respectivamente, que identifica a los dos grupos bajo análisis: inquilinos/arrendatarios y ocupantes gratuitos.* *Por otra parte, y desde el uso de la tecnología, deberá utilizar la herramienta de filtros de Excel para poder seleccionar las variables y los casos que se deben considerar para el análisis.* ***Dimensiones**: Datos – Metodología – Obtención de los datos*
1. Hacer una exploración del ingreso total familiar que permita comparar las características de la misma para los hogares cuyos integrantes son inquilinos o arrendatarios de la vivienda con aquellos hogares cuyos integrantes ocupan la vivienda de manera gratuita. **2.** A partir de esa exploración, plantear al menos una pregunta que surja del análisis y brindar alguna respuesta, fundamentando la misma a partir de toda la información que consideres necesaria y pertinente.	*Se espera que se utilice una amplia gama de herramientas estadísticas descriptivas y exploratorias que permitan generar algunas conjeturas informales que conduzcan a elaborar alguna pregunta de interés que implique conocimiento estadístico y contextual.* *Para la fundamentación de la o las respuestas, se espera que el estudiante integre el análisis exploratorio con alguna otra exploración en la que analice otras variables que podrían estar asociadas. Por ejemplo, cantidad de integrantes en el hogar, tipo de trabajo del jefe o jefa de hogar, entre otras.* ***Dimensiones**: Evidencia – Datos – Metodología – Cuestionamiento – Transnumeración - Variación – Señal – Ruido – Comunicación – Valoración objetiva*
3. Comparar la brecha entre hogares más ricos y más pobres en ambos grupos. ¿Qué conclusión pueden obtener de esa comparación?	*Dado que existen diversas maneras de medir la brecha que mide la desigualdad en la distribución de los ingresos, se espera que el estudiante elija una de ellas, la calcule, interprete en cada grupo y realice la comparación entre los grupos y fundamente la elección del indicador, considerando sus alcances y limitaciones.* ***Dimensiones**: Evidencia – Metodología – Transnumeración - Variación – Señal – Comunicación – Valoración objetiva*
4. Desde el Ministerio de Infraestructura y Obras de la provincia de Santa Fe se quiere implementar una serie de acciones que permitan a las familias acceder a una vivienda propia (a través de un sistema cooperativo). Si formaras parte del comité asesor y tuvieras que elaborar criterios de asignación de viviendas a las familias involucradas en este estudio, ¿qué grupo de hogares incluirías en este sistema de asignación de viviendas? Justificar adecuadamente dejando explicitados los fundamentos utilizados para dicha elección.	*Dado que la distribución de ingresos presenta niveles de desigualdad bastante profundos en ambos grupos bajo estudio, existen distintas posibilidades para la toma de decisiones.* *En términos evaluativos, se considerará que la respuesta es o no adecuada dependiendo de la evidencia que se utilice para la fundamentación y la justificación en sí misma.* ***Dimensiones**: Evidencia – Transnumeración - Variación – Señal – Comunicación – Valoración objetiva del análisis*

Tabla 1. *Tareas evaluativas y dimensiones que relacionan*
Fuente*. Tareas incluidas en el segundo práctico evaluativo 2020. Cátedra de Métodos Estadísticos para las Ciencias Sociales*

Discusión de resultados y Análisis de contenido

En esta experiencia participaron 41 estudiantes y todos ellos resolvieron por completo las tareas propuestas.

	Cantidad de respuestas (porcentaje)					
	Tarea 1. AED	**Tarea 2. Pregunta**	**Tarea 2. Respuesta + Fundamento**	**Tarea 3. Cálculo Brecha**	**Tarea 3. Comparación**	**Tarea 4. Toma de decisión**
Incorrecto o Inconcluso	1 (2,4%)	1 (2,4%)	17 (41,5%)	6 (14,6%)	6 (14,6%)	12 (29,3%)
Incompleto/ Parcialmente correcto	4 (9,8%)	No Corresponde	No Corresponde	No Corresponde	15 (36,6%)	No Corresponde
Correcto	36 (87,8%)	40 (97,6%)	24 (58,5%)	35 (85,4%)	20 (48,8%)	29 (70,7%)
TOTAL	**41**	**41**	**41**	**41**	**41**	**41**

Tabla 2. Cantidad de alumnos que resolvieron las tareas de la evaluación
Fuente. Elaboración propia en base a datos relevados de la cátedra de Métodos Estadísticos para las Ciencias Sociales

Para las tareas 1 y 3 (que comparan la brecha de desigualdad), se consideró que la resolución podía ser incorrecta, incompleta/parcialmente correcta o correcta, en las otras tareas se consideró si la resolución era correcta o incorrecta solamente. De la Tabla 2, se concluye que la mayoría de los estudiantes resolvieron las tareas de manera correcta o parcialmente correcta. Dado que la evaluación se diseñó de manera integrada con la propuesta de enseñanza, los estudiantes han logrado relacionar diversas dimensiones asociadas a ciertos niveles del pensamiento estadístico que, en general, les ha permitido brindar fundamentos adecuados. Se puede identificar que las tareas que resultaron más complejas fueron la segunda parte de la tarea 2 y la tarea 4, debido al hecho de que ambas implican poner en relación distintas dimensiones del pensamiento estadístico. Se debe aclarar que, aunque hay resoluciones incorrectas, los estudiantes utilizaron conceptos e ideas estadísticas que fueron adecuadas, sólo que al considerar el análisis completo los llevaron a realizar conclusiones o decisiones inadecuadas. Dado que la riqueza conceptual no está centrada en que una respuesta sea correcta o incorrecta sino en el análisis de toda la resolución, en la Tabla 3 se presenta una ejemplificación, a partir de la que se analizan los elementos constitutivos de las dimensiones del pensamiento estadístico, que se ponen en evidencia en una resolución de la tarea 4.

Resolución de un alumno a la Tarea 4: Tomar decisiones que estén fundamentadas en los datos	**Análisis de la resolución**
Para establecer los criterios de asignación de las viviendas para las familias involucradas en la muestra extraída de la EPH, en la cual relacionamos las variables ingreso y el régimen de tenencia de las viviendas, se toma en cuenta en primer lugar, que como ambas distribuciones están sesgadas a la derecha, analizaremos el universo de beneficiarios en torno a las familias que perciben ingresos más bajos o no tienen ingresos.	Identifica características relevantes de la distribución (**sesgo**) y su relación con el contexto. (**cuestionamiento – valoración objetiva del análisis - variación**)
En segundo lugar, como hemos planteado antes, aunque no existan diferencias significativas en términos nominales de los ingresos de quienes se ubican en el 50% de los hogares que perciben menores ingresos, ya sean inquilinos u ocupantes gratuitos, los últimos están exentos de los pagos de alquiler y esta desigualdad es determinante para seleccionar a los beneficiarios de una vivienda propia… Por ello es importante tener en cuenta la siguiente pregunta: ***¿Qué parte del ingreso está destinada al pago del alquiler?*** *En tercer lugar, entre otras variables no contempladas en el análisis del punto 2, está la forma en que se constituyen los hogares****. ¿Cuántas***	Compara distintos aspectos de las distribuciones (**señal – ruido – variación**) Relaciona el análisis exploratorio con otros elementos de análisis que tienen influencia en el ingreso familiar (**cuestionamiento – valoración objetiva del análisis**) Utiliza nuevas variables que agrega al análisis, lo cual requiere que identifique otros tipos de datos en la EPH que aporten

personas integran lo que denominamos "hogar"? *Si el objetivo es beneficiar a la mayor cantidad de personas pero debemos establecer criterios que especifiquen la condición de potenciales beneficiarios, habría que discriminar entre aquellos hogares en los cuales conviven más personas bajo el mismo techo y los hogares unipersonales, por ejemplo.El objetivo de elegir a cierto grupo de hogares para acceder a una vivienda es compensar las brechas y desigualdades presentes en la sociedad.*	información relevante y estudiar otros aspectos de la metodología de la misma. (**cuestionamiento – valoración objetiva del análisis – datos – metodología - transnumeración**)
Por lo tanto, los criterios de asignación para elaborar un orden de mérito serían los siguientes: *1. Inquilinos y ocupantes gratuitos sin ingresos.* *2. Inquilinos que perciban ingresos hasta el valor del percentil 50 de la muestra en la etapa de cierre la convocatoria. (Este valor (P50) sería "móvil", por lo que cualquier cambio en los ingresos en el tiempo produciría en primer lugar, una movilidad ascendente o descendente de los hogares de acuerdo a sus ingresos y por lo tanto, un reordenamiento de la muestra en el momento de elegir a los beneficiarios).* *3. Ocupantes gratuitos que con sus ingresos no lleguen a cubrir los costos de* ***la Canasta Básica Total*** *vigente al momento de la convocatoria.* *4. De los hogares que cumplan con las condiciones anteriores, se priorizará a aquellos que cuenten con una mayor cantidad de integrantes.*	La toma de decisiones se basa en diversas variables y en diversas características de la distribución del ingreso. (**datos – metodología**) Agrega a ese análisis nuevos indicadores (**la Canasta Básica Total y la mediana**). Realiza una contextualización adecuada y prevé que pueden variar a lo largo del tiempo. (**cuestionamiento – valoración objetiva del análisis –metodología - transnumeración**) Considera la inclusión de más variables para establecer los requisitos y los comunica adecuadamente (**Comunicación – valoración objetiva**)

Tabla 3. Resolución de un alumno a la tarea 4 y análisis de la misma
Fuente. Segundo práctico evaluativo 2020. Cátedra de Métodos Estadísticos para las Ciencias Sociales

Se observa que el estudiante utiliza distintas dimensiones de la alfabetización y del pensamiento estadístico (Behar y Grima, 2004, 2014), así como conceptos e ideas fundamentales, aunque con distinto grado de complejidad. En este sentido, es posible indicar que este alumno establece relaciones muy ricas y complejas entre las distintas dimensiones. En este sentido se podría indicar que este estudiante "*piensa estadísticamente*" porque logra integrar los datos con el contexto, el análisis, las conclusiones y la toma de decisiones.

Conclusiones

En la actualidad tenemos acceso a una variada gama de grandes volúmenes de datos asociados a distintos temas y contextos que son relevantes para las políticas públicas. Poder comprender la información que nos brindan los mismos y poder tomar decisiones basadas en esa comprensión requiere de un conjunto de dimensiones asociadas con la alfabetización estadística y el pensamiento estadístico. Aún quedan desafíos por enfrentar, uno de ellos se centra en evaluar toda la propuesta didáctica diseñada, de modo de brindar indicadores que permitan valorar la adecuación de la misma en la formación de cientificistas sociales, ya que son estos quienes, en un futuro no muy lejano, serán los que tomen decisiones sobre la vida de todos los ciudadanos. En este sentido, la experiencia analizada brinda evidencias sobre la potencialidad de las dimensiones propuestas por Behar y Grima (2014) y permite fundamentar que con un diseño que se adecue a las características iniciales de nuestros alumnos, es posible fomentar el pensamiento estadístico y propiciar las habilidades básicas de la alfabetización estadística.

Referencias Bibliográficas

Anijovich, R. y Cappelletti, G. (2017). La evaluación en el escenario educativo. En R. Anijovich y G. Cappelletti, (Eds.), *La evaluación como oportunidad* (pp. 13-38). Buenos Aires: Editorial Paidós.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83,* 7-18.

Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Revista Ingeniería y Competitividad, 5(2), pp.84-90*. Agosto, 2004, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En G. Sanabria Brenes y F. Núñez Vanegas (Eds.), *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos* Costa Rica.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Springer.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística.*

Escudero, W. (2019). *Big data*. Segunda edición. Colección Ciencia que ladra. Buenos Aires: Siglo XXI editores.

Gal, I. (2004). Statistical literacy: meanings, components, responsibilities. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47-78). Dordrecht: Springer.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Goetz, S. (2008). Fundamental ideas and basic beliefs in Stochastics. Theoretical Aspects and Empirical Impressions from the Education of Student Teachers. Conferencia realizada en *5th International Colloquium on the Didactics of Mathematics*. University of Crete.

Instituto Nacional de Estadística y Censos (2009). *Diseño de Registro y Estructura para las bases de microdatos. Encuesta Permanente de Hogares*.

Pfannkuch, M. y Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, *1* (2), 4-21.

Pinto, J.; Tauber, L.; Zapata-Cardona, L.; Albert, J.; Ruiz, B. y Mafozoki, J. (2017). Alfabetización Estadística en Educación Superior. En: L. A. Serna (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, vol 30, Cd de México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, pp. 227-235.

Rosling, H. (marzo, 2007). *Hans Rosling revela nuevas ideas sobre la pobreza. TED Ideas worth spreading.* Recuperado el 16 de junio de 2020 de: https://www.ted.com/talks/hans_rosling_reveals_new_insights_on_poverty?language=es#t-51199.

Tauber, L., Cravero, M. y Santellán, S. (2019). La construcción del sentido estadístico a partir de indicadores sociales. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.*

Wallman, K.K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, *88* (421), 1-8.

<u>**Conferencia Central GTD-3.2**</u>

Conversaciones de un pensar estadís-crítico con la Infodemia

Gabriela Pilar CABRERA

Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Básicas y Aplicadas
Universidad Nacional de Villa María

gcabrera@unvm.edu.ar

<u>Resumen</u>

En tiempos de infodemia plagada de información cuantitativa vuelve a cobrar sentido la idea de industria cultural que desarrollaron Max Horkheimer y Theodor Adorno en su obra Dialéctica de la Ilustración. En este marco, aquí propongo la revalorización del rol del docente como intelectual transformador, de modo que las decisiones que tomemos en relación a los objetivos de la enseñanza de la Estadística y Probabilidad en todos los niveles educativos favorezcan las condiciones para promover el desarrollo de un pesar estadís-crítico en el que el pensamiento estadístico se imbrica en el pensamiento crítico e interpela la sobrecarga de información que tiñe y atraviesa la toma de decisiones cotidianas de las y los ciudadanos. Un pensamiento estadís-crítico cuya piedra angular sea la alfabetización estadística concebida en el marco de una visión socio-política de la Educación Estocástica y anclados en ella ocurra la auto transformación de docentes y estudiantes aportando a una mejor sociedad.

<u>Palabras Clave</u>: Educación de profesionales críticos. Pensamiento estadístico. Pensamiento crítico. Ejercicio de la ciudadanía. Industria cultural.

Introducción

En tiempos de una pandemia mundial, nuestra sociedad experimenta la omnipresencia de la Infodemia (Zarocostas, 2020; Sosa, 2020; Aleixandre-Benavent, Castelló-Cogollos y Valderrama Zurián, 2020) que ocurre particularmente teñida de una sobrecarga de información cuantitativa puesta en los relatos -tanto escritos como orales- con la intención de dar credibilidad a lo que se dice (Ben-Zvi y Makar, 2016; Engel 2019). Esta infodemia hace pie en frecuencias absolutas, relativas y porcentuales, gráficos, tablas, indicadores, índices, tasas, tendencias, series de tiempo, estimaciones puntuales y por intervalos de confianza de promedios y proporciones, modelos multidimensionales -por citar algunos ejemplos-, en una dialéctica cotidiana entre la muestra y la población que llegan como información "cocinada" a las y los ciudadanos para la toma de decisiones en contextos inciertos y vertiginosamente cambiantes y que afectan profundamente la vida cotidiana.

En este contexto resurge con más fuerza el llamamiento que nos hace Giroux (1997) a las y los docentes de ejercer el rol de intelectuales transformadores y que en esta conferencia se dirige hacia quienes nos desempeñamos como docentes de Estocástica (Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero 2019) en la Universidad y también, a las y los maestros de Educación Infantil y Primaria, a las y los profesores de Matemática de Educación Secundaria y a Formadores de Formadores (Martínez-Castro y Zapata-Cardona, 2020; Valero 2021). Este desafío supone para los y las docentes de Estadística -de cualquier nivel educativo- un ejercicio auto reflexivo constante que se ancle en nuestra "responsabilidad de pensar el mundo de manera seria y poder mover el mundo" (Valero, 2021) e interpela la práctica educativa estocástica.

Asumiéndome como docente e investigadora en el rol intelectual transformadora hago propia la pregunta que nos hace Valero (2021) acerca de "¿cuál es la función del profesor/investigador de Educación Matemática [Estocástica] como intelectual?" y esbozo una respuesta a través de esta conferencia proponiendo un tiempo de reflexión compartida para comenzar a vislumbrar las decisiones que hemos de tomar las y los profesores e investigadores en Educación Estocástica en esta dirección.

Por ello decidí compartir la experiencia que interpeló mi ser docente -durante el cursado del Doctorado en Pedagogía de la Universidad Nacional de Villa María- al tomar contacto con la obra Dialéctica de la Ilustración escrita por Max Horkheimer y Theodor Adorno alrededor de 1944-1947. Más precisamente el contenido crítico (Hernández, 2019) del concepto de industria cultural acuñado por estos autores, que aún hoy sigue provocándonos como sociedad a una reflexión y toma de conciencia del lugar que como ciudadanas y ciudadanos tenemos el desafío de asumir, y con ello de la importancia y el reto de nuestra tarea como docentes de Estocástica.

Análisis crítico del uso y sentido de las Ideas Estocásticas Fundamentales en la obra Dialéctica de la Ilustración: implicancias para un pensar estadís-crítico

En su obra Dialéctica de la Ilustración, Horkheimer y Adorno (2003/1947) no usaron gráficas, ni tablas, ni cifras. Sin embargo, para clarificar y hacer visible el contenido crítico del concepto de industria cultural desplegaron un claro y preciso lenguaje estadístico a partir de analogías con algunas de las Ideas Estocásticas Fundamentales (en adelante IEF).

Vale aquí resaltar que las IEF son el "núcleo de un pensar estadís-crítico" (Cabrera, Tauber y Fernández, 2020, p.92) en el que la "interpretación como una práctica de intervención en el mundo" (Giroux, 2019, p.3) constituye "la principal condición de enseñanza que un docente de Estadística, en su rol de intelectual transformador, debe crear para propiciar este modo de pensar" (Cabrera et al, 2020, p.92). Dicho esto, en la Tabla 1 se revelan a partir de la aplicación del Análisis Crítico del Discurso (Van Dijk, 2002), algunas de las IEF (Batanero 2002, Burrill, & Biehler, 2011; Estrella 2017) usadas por los autores como analogías, en la obra Dialéctica de la Ilustración.

Tabla 1. Análisis crítico del uso y sentido de las IEF en el discurso de Horkheimer y Adorno.

Citas de la obra Dialéctica de la Ilustración	**Análisis crítico del modo de uso de las IEF**
"El individuo queda cada vez más determinado como cosa, como elemento estadístico, como *success or failure*" (Horkheimer y Adorno; 2003/1947, p.27)	Queda manifiesta una idea importante en Estocástica relacionada con los ensayos de tipo Bernoulli: en un experimento aleatorio sólo se tienen dos resultados posibles que son mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivos. Por ejemplo, si se lanza una moneda honesta al aire y se observa su cara expuesta al caer, se tienen sólo dos resultados posibles; y si se realiza este experimento repetidas veces, sólo son esos los dos resultados posibles. Estos dos resultados posibles, tienen una probabilidad de ocurrencia. Para el caso que nos ocupa, los autores realizan esta analogía para explicar que hay un conjunto de comportamientos y reacciones que se esperan de un individuo y en este sentido, éste cumple o no con lo esperado por la sociedad. Consecuentemente, el individuo se adecua (éxito) o no se adecua (fracaso) a lo que el aparato económico dominante indica como éxito, según los dichos de los autores.
"Para todos hay algo previsto, a fin de que nadie pueda escapar; las diferencias son acuñadas y difundidas artificialmente. El hecho de ofrecer al público una jerarquía de cualidades en serie, sirve sólo para la cuantificación más completa de acuerdo con su *level* determinado en forma anticipada por índices estadísticos, y dirigirse a la categoría de productos de masa que ha sido preparada para su tipo. Reducidos a material estadístico, los consumidores son distribuidos en el mapa geográfico de las oficinas administrativas (que no se distinguen prácticamente más de las de propaganda) en grupos según los ingresos, en campos rosados, verdes y azules" Horkheimer y Adorno (2003/1947, p.40)	En esta consideración del individuo como elemento estadístico, los autores sostienen que la Industria Cultural crea categorías de pertenencia para todos y cada uno de los individuos de la sociedad. Es decir, todos pertenecen a una u otra categoría que condiciona las elecciones y decisiones que se han de tomar. No son los individuos los que, al tener ciertas elecciones -diferentes de las elecciones de otros individuos- construyen las categorías. Por el contrario, las categorías de pertenencia están pre-moldeadas para que los individuos de acomoden a ellas. Cabe destacar que los autores hacen referencia a la investigación empírica en las ciencias sociales, en las que se construyen estas categorías respecto de diferentes variables de interés y las que se expresan a partir de indicadores e índices estadísticos. Con base en ello, los autores señalan el hecho de que los individuos tratados como consumidores, tienen de antemano las preferencias en sus elecciones "pre-fabricadas". Subyace a estas analogías ciertas técnicas estadísticas para el análisis multivariado de datos que en la actualidad es posible implementar gracias al avance de la tecnología. Sin embargo, estos autores refieren a su esencia a partir de esta descripción; en particular, al análisis de cluster y procedimientos de clasificación jerarquizada.
"En la época de la Estadística las masas son demasiado maliciosas para identificarse con el millonario que aparece en la pantalla y demasiado obtusas para permitirse la más mínima desviación respecto a la ley de los grandes números. La ideología se esconde en el cálculo de las probabilidades…" Horkheimer y Adorno (2003/1947, p.58)	Como se puede observar en el relato, hacen uso de la ley de los grandes números. En la teoría de la probabilidad, bajo el término genérico de ley de los grandes números, se engloban varios teoremas que describen el comportamiento del promedio de una sucesión de variables aleatorias conforme aumenta su número de ensayos. Para ejemplificar esta ley de manera simple Moore (2004) utiliza el ejemplo de casinos y seguros: Es justamente la ley de los grandes números, el principio en el que se basan negocios como los de los casinos y los seguros. En el casino las ganancias (o las pérdidas) son inciertas. El casino juega decenas de millones de veces. Por tanto, el casino a diferencia de los jugadores individuales, puede basarse en la regularidad que aparece después de muchas

	repeticiones y que describe la ley de los grandes números. La media de ganancias del casino, después de decenas de millones de apuestas, estará muy cerca de la media de la distribución de las ganancias. Esta media garantiza los beneficios del casino y es lo que justifica que el juego pueda ser un negocio. Ahora bien, Adorno y Horkheimer utilizan la ley de los grandes números como analogía para explicar el hecho de que las masas se identifican con el “hombre medio” con sesgo negativo. Esta identificación se realiza bajo una concepción determinística que lo lleva a creer en una tendencia artificial y pre-establecida. Es pertinente, el uso que hacen los autores de esta ley para describir el fenómeno de dominación de las masas.
“El azar mismo es planificado: no se trata de que se lo haga recaer sobre este o el otro individuo aislado, sino del hecho mismo de que se crea que se lo gobierna. Eso sirve de coartada para los planificadores y suscita la apariencia de que la red de transacciones y medidas en que ha sido transformada la vida deja un lugar para relaciones espontáneas e inmediatas entre la gente. Este tipo de libertad se halla simbolizado en los distintos ramos de la industria cultural por la selección arbitraria de los casos medios” Horkheimer y Adorno (2003/1947, p.59)	Con otras palabras, vuelven a referir la cuestión vinculada con el dominio que éstos entienden que ejerce la Industria Cultural sobre el individuo, y lo hacen aludiendo al azar. La selección al azar, implica que en un conjunto de individuos cada una de ellos tiene la misma oportunidad de ser elegido. Sin embargo, la industria cultural, a través de las categorías que preestablece –a partir del entrecruzamiento de características y reacciones -, simula la libertad de elegir.

La tarea realizada en este ejercicio pone en consideración que para comprender, argumentar, cuestionar, coincidir, disentir y resignificar el contenido crítico del concepto de industria cultural; en una sociedad situada y atravesada por una infodemia sobrecargada de información cuantitativa -como “tormenta perfecta de datos y sus interpretaciones” (Sosa 2020, p.2)-, difundida expansiva y vertiginosamente a través de los medios de comunicación masivos, las redes sociales y las plataformas de distribución de contenido digital; en las clases de Estocástica se precisa proponer y potenciar este tipo de ejercicios reflexivos.
Entorno a ello Cabrera et al (2020) recomiendan que:

> La alfabetización estadística (Ben-Zvi y Garfield, 2004; Pinto, Tauber, Zapata-Cardona, Albert, Ruiz y Mafokozi, 2016; Batanero, 2013), el razonamiento estadístico (Garfield y Ben-Zvi, 2008; Pfannkuch, 2007) y el pensamiento estadístico (Behar y Grima, 2004; 2014; Pfannkuch y Wild, 2004) deben insertarse significativamente en un ambiente de aprendizaje que tenga como condición necesaria que los estudiantes “reflexionen críticamente en consonancia con la comprensión del mundo y así comenzar a cuestionar su propia idea de acción, de las relaciones con otros y de las relaciones con dicho mundo” (Giroux 2017, p.21). (p.93)

Reflexiones Finales

La Educación Estocástica es política, y nuestra responsabilidad como docentes de Estadística y Probabilidad de todos los niveles educativos implica asumir este reto, que quizás nos incomode porque las recetas y las seguridades no tienen lugar aquí. En cambio, si tiene lugar el hábito de reflexión cotidiana y compartida acerca de nuestras prácticas docentes y esto incluye plantearnos qué debería ser la escuela y la universidad y en ese qué, también subyace el sentido de la Educación Estocástica.

Estas preguntas nos atraviesan y nos convocan “a mover el mundo”, porque nuestra tarea como intelectuales transformadores no se basa en replicar modelos pedagógicos, didácticos, sociales y culturales, sino que se ancla en atravesar esos modelos con la intención de moverlos hacia las mejores posibilidades de manifestación. Es por y para ello, que docentes y estudiantes hemos de inmiscuirnos en los problemas del mundo e imaginar posibilidades de mejores futuros donde la reproducción automática no encuentre espacio.

Incluir en la escena educativa de las clases de Estadística y Probabilidad un diálogo crítico con la información cuantitativa que circula e inunda la cotidianeidad, es una decisión pedagógica que hace espacio y crea el tiempo curricular para el desarrollo y la promoción de un pensar estadís-crítico problematizador de lo que se da por evidente en términos cuantitativos; y que puede ser concebido como un factor que podría disminuir el asedio de la industria cultural que hoy se despliega más potente y compleja que en los tiempos en que Horkneimer y Adorno escribieron la Dialéctica de la Ilustración.

Referencias Bibliográficas

Aleixandre-Benavent, R., Castelló-Cogollos, L., & Valderrama-Zurián, J. C. (2020). Información y comunicación durante los primeros meses de Covid-19. Infodemia, desinformación y papel de los profesionales de la información. *El profesional de la información (EPI)*, *29*(4). Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Revista Ingeniería y Competitividad, 5(2), pp.84-90*. Agosto, 2004, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Batanero, C. (2002). IDEAS ESTOCÁSTICAS FUNDAMENTALES. Qué contenidos se debe enseñar en la clase de Probabilidad.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Springer.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. *I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria*. Granada.

Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos.

Behar, R. y Grima, P. (2004). La Estadística en la Educación Superior: ¿Estamos Formando Pensamiento Estadístico? *Revista Ingeniería y Competitividad, 5(2), pp.84-90*. Agosto, 2004, Universidad del Valle. Cali, Colombia.

Behar, R. y Grima, P. (2014). Estadística: Aprendizaje a largo plazo. Factores que inciden y estrategias plausibles. En: G. Sanabria Brenes y F. Núñez Vanegas (Eds.), *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*, Costa Rica.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.). *The Challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht: Springer.

Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016). *Teaching and Learning of Statistics. International perspectives.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0

Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Dordrecht. The Netherlands: Springer.

Cabrera, G. P., Tauber, L. M., & Fernández, E. (2020). Educación estocástica para pensar estadís-criticamente. *Matemáticas, educación y sociedad, 3*(2), 89-109.

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Recuperado de: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.htm

Estrella, S. (2017). Enseñar estadística para alfabetizar estadísticamente y desarrollar el razonamiento estadístico. *Alternativas Pedagógicas para la Educación Matemática del Siglo XXI*, 173-193.

Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Garfield, J. y Ben- Zvi, D. (2008). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, *31* (3), 72-77.

Giroux, H. (1997). *Los profesores como intelectuales hacia una pedagogía crítica del aprendizaje* (Reimpresión de 1a. ed. en español Trad. I. Arias). Barcelona: Paidós. Recuperado de: http://funama.org/data/PEDAGOGIA%20CRITICA/giroux/Los%20Profesores%20como%20Intelectuales.pdf

Giroux, H. (2017). Pensando peligrosamente: el rol de la Educación Superior en tiempos autoritarios. *Revista de Educación*, *12*(12), 13-24. *Recuperado de:* https://fh.mdp.edu.ar/revistas/index.php/r_educ

Giroux, H. (2019). Hacia una pedagogía de la esperanza educada bajo el capitalismo de casino. *Pedagogía y Saberes*, (50), 153-158. https://doi.org/10.17227/pys.num50-9508

Hernández, C. (2019). Industria cultural: revisitando el concepto desde lo filosófico y lo político. Recuperado de: https://ridaa.unq.edu.ar/handle/20.500.11807/2014

Horkheimer, M., &. Adorno, T W (2003/1947). Dialéctica del iluminismo. Escuela de Filosofía Universidad ARCIS.1. Recuperado de: https://www.philosophia.cl/biblioteca/Adorno/iluminismoadorno.pdf

Martínez-Castro, C. A., & Zapata-Cardona, L. (2020). Desarrollando sentido de agencia en la formación inicial de profesores de Estadística. Matemáticas, educación y Sociedad, 3(2), 40-55. Recuperado a partir de http://www.uco.es/ucopress/ojs/index.php/mes/article/view/12869

Moore, D. (2004): *Estadística aplicada básica* (Segunda Edición). Barcelona. Antoni Bosh Editor S. A.

Sosa, W. (2020, 23 de abril). Covid-19 e información Coronavirus: ¿de qué hablamos cuando hablamos de datos? *Clarín.com*. Recuperado de: https://www.clarin.com/revista-enie/ideas/coronavirus-hablamos-hablamos-datos-_0_16lMg-nC-.html

Van Dijk, T. A. (2002). El análisis crítico del discurso y el pensamiento social. *Athenea digital*, *(1*), 18-24. Recuperado de: https://www.raco.cat/index.php/Athenea/article/view/34083

Valero, P (2021). Política cultural de la Educación Matemática en el Nuevo regimen climático. *Educación Matemática Unesp*. Río claro. Recuperado de: https://www.youtube.com/watch?v=3OkYG7FGY38

Zarocostas, J. (2020). How to fight an infodemic. *The Lancet*, *395* (10225), 676. DOI: 10.1016/S0140-6736(20)30461-X

Disertación Invitada GTD-4.1

Adaptaciones Curriculares en Estadística en Tiempos de Pandemia

Jesús Enrique PINTO SOSA

Facultad de Educación
Universidad Autónoma de Yucatán

psosa@correo.uady.mx

Resumen

La pandemia ocasionada por el Covid-19 que llevó a que en marzo de 2020 cierren las escuelas y se trasladarán las clases presenciales a una una educación en el hogar, ha implicado para los docentes que imparten clases de Probabilidad y Estadística a modificar su enseñanza. La conferencia tiene como objetivo presentar las experiencias e investigaciones que se han generado y que evidencian las adaptaciones curriculares que se han hecho desde el marco de un currículo alternativo o diversificado y una educación en emergencia desde que surgió la pandemia hasta la fecha. Se analizarán los resultados desde diferentes niveles educativos y por países de latinoamérica.

Palabras clave: Adaptaciones Curriculares. Estadística. Currículo Diversificado. Educación en Emergencia. Latinoamérica.

Introducción

Debido a la contingencia sanitaria provocada por el coronavirus, desde marzo de 2020 en México y en Latinoamérica, los distintos sistemas educativos pasaron de una educación presencial a una educación a distancia, generando una diversidad de experiencias y aprendizajes al respecto.

Todos los docentes, de diferentes niveles educativos se enfrentaron a la ardua de tarea de modificar o ajustar su enseñanza con el deseo que los estudiantes continúen sus estudios y aprendan lo que marca los planes y programas de estudio. No obstante, la pandemia generada por el COVID-19, llevó a enfrentar una situación inédita en la educación y en la enseñanza.

Las afectaciones de la pandemia desde el ámbito educativo son devastadoras. Según la UNICEF (2008) y el Banco Mundial (2020) son: el progreso de la educación amenazado, incremento de la desigualdad, interrupción del aprendizaje, aumento de la deserción e incremento de las brechas de calidad

> Estas circunstancias afectan a los niños, niñas y adolescentes especialmente en los planos físico, psicológico, social e intelectual, aun si hay una escuela en funcionamiento, estas secuelas pueden perdurar mucho tiempo (UNICEF, 2008, p. 5)

A la fecha, inumerables publicaciones dan cuenta de las consecuencias que estamos teniendo desde el ámbito educativo. Dado que la pandemia ocasionada por el coronavirus se trata de una situación inédita y extraordinaria que afecta de manera importante a la sociedad, la UNESCO (2008) reconoce la declaratoria de una *educación en emergencia*, que surge cuando un país, una región o una comunidad se ve afectado ya sea por un desastre natural (ej. terremotos, tsunamis, ciclones), conflictos armados y epidemias y pandemias. Para la UNICEF (2008), este tipo de emergencia requiere de planes y programas especiales, en donde "son esenciales los preparativos para el aprendizaje en el hogar y a distancia" (p. 9).

Durante el período que dure la emergencia, desde el ámbito de la educación es necesario trabajar desde un paradigma diferente y eso implica, aún ante la situacion de la pandemia, "asegurar una educación inclusiva y equitativa de calidad y el aprendizaje permanente para todos" (Irina Bokova, 21 de mayo de 2015), dado que "la educación no es un privilegio, es un derecho innato" (Ban Ki-Moon, 21 de mayo de 2015).

> Un niño, niña o adolescente en situación de emergencia o desastre tiene los mismos derechos que cualquier otro en cuanto a una educación de buena calidad que satisfaga sus necesidades básicas de aprendizaje. Es posible que los modos de prestación, enfoques y contenidos deban reflejar la realidad contextual, pero el objetivo es lograr una experiencia de aprendizaje de la máxima calidad posible. (UNICEF, 2008, p.10)

Ante la situación inédita que se vive en diferentes países, docentes, niños, adolescentes y padres de familia de las escuelas ubicadas en las comunidades rurales se enfrentan a realidades que están afectando el entorno y la dinámica familiar y la educación recibida de los hijos. Ante las políticas y acciones emitidas por la emergencia sanitaria, dirigidas a la contención y mitigación de la pandemia provocada por la enfermedad infecciosa COVID-19, una diversidad de elementos está siendo afectada.

A más de un año de iniciar la pandemia, se incrementó el interés de saber qué ocurre en la enseñanza en los diferentes niveles educativos. De ahí es posible identificar revistas especializadas que emitieron convocatorias extraordinarias para publicar artículos que permitan documentar y comenzar a estudiar todo lo relacionado con educación y pandemia. Esto sumado al incremento de los Webinar y foros de discusión virtuales para escuchar y ver las diferentes miradas de especialistas en la materia.

El tema de interés de este texto es sobre las adaptaciones curriculares en estadísticas durante el tiempo de pandemia. La finalidad es abordar el significado de una adaptación curricular, sus características y relevancia en el ámbito de las matemáticas y la estadística en el marco de una educación en emergencia o una enseñanza remota de emergencia. La pregunta que orientó el análisis fue: ¿qué aportaciones se han hecho sobre las adaptaciones curriculares desde la matemática educativa o desde la educación estadística, en tiempos de pandemia?

<u>Significado e importancia de las Adaptaciones Curriculares durante la pandemia</u>

Los fundamentos de una adaptación curricular (AC) descansan en el concepto de Escuela para Todos, en la atención a la diversidad, la educación y aula inclusiva, en donde niños, niñas, adolescentes, jóvenes y adultos tengan las mismas oportunidad y derechos en el acceso y la calidad de la educacion recibida.

> Las adaptaciones curriculares son el conjunto de modificaciones que se realizan en los objetivos, contenidos, actividades, metodologías y procedimientos de evaluación para atender a las dificultades que el contexto presente al alumno (SEP, 2006).

La AC, también conocida por algunos autores como “ajustes razonables” (ver Cipollone, 2021), tienen como finalidad garantizar que se dé respuesta a las necesidades educativas que el alumno no comparte con su grupo (SEP, 2006, p. 16). Entre las características de las AC están:

a. Estrategias y recursos adicionales que se implementan para posibilitar el acceso y progreso de un estudiante (SEP, 2006)
b. Permite alcanzar los propósitos de la enseñanza, especialmente cuando un alumno o un grupo de alumnos necesita algún apoyo adicional en su proceso de escolarización (SEP, 2006)
c. Es una respuesta específica y adaptada a las necesidades educativas de un alumno que no quedan cubiertas por el currículo común (SEP, 2006)
d. Representa un esfuerzo por alcanzar los objetivos educativos a partir del reconocimiento de la diversidad del alumnado y de las necesidades reales experimentadas en cada centro escolar (SEP, 2006)
e. Garantiza al estudiante el acceso al currículum, creando entornos de aprendizajes accesibles y adaptables, con el fin de responder a las particularidades de cada uno (Cipollone, 2021).

Para fines de esta investigación, se asume lo dispuesto por la Ley Orgánica de Educación (LOE) de España de 2006, al dar prioridad absoluta a la atención a la diversidad del alumnado y que reconoce la necesidad de adaptaciones curriculares para tres tipos de alumno:

- Con necesidades educativas especiales
- Con altas capacidades intelectuales
- Con necesidades de compensación educativa

Se entiende por aumno con necesidad de compensación educativa a:

> “aquel que, por su pertenencia a minorías étnicas o culturales en situación de desventaja socioeducativa, o a otros colectivos socialmente desfavorecidos, presente desfase escolar significativo, con dos o más cursos de diferencia entre su nivel de competencia curricular y el nivel en que efectivamente está escolarizado, así como dificultades de inserción educativa y necesidades de apoyo derivadas de incorporación tardía al sistema educativo, de escolarización irregular, y, en el caso de alumnado inmigrante y refugiado, del desconocimiento de la lengua vehicular del proceso de enseñanza” (Orden del 22 de julio de 1999).

La identificación y necesidad de una AC permite lograr el derecho innato a la educación, así como lograr una educación equitativa, permentente e incluyente. Algo que se ha visto más afectado durante la pandemia.

Diseño e Implementación de una Adaptación Curricular

Para diseñar una AC, se requiere primero analizar los planes y programas de estudio, conocer la situación y el contexto del estudiante, así como explorar y efectuar una *evaluación psicopedagógica* sobre la situación actual, sobre:

- Espacios físicos
- Dispositivos electrónicos
- Conectividad
- Información socio-familiar

- Antecedentes, interés y hábitos
- Estilos y diversidad en el aprendizaje

El análisis igual implica explorar si existen o no barreras para el aprendizaje y participación, las cuales pueden ser de distintos tipos: del contexto, actitudinales, físicas, pedagógicas y de organización.
Todo lo anterior permitirá identificar las necesidades específicas del alumno o de un grupo de alumnos, lo que llevará a proponer y llevar a cabo un programa de intervención educativa, el cual describirá los ajustes necesarios a llevar a cabo en algunos de los elementos del currículo:

- Objetivos
- Contenidos
- Metodologías y organización didáctica (incluye materiales y recursos)
- Evaluación
- Tiempos (temporalización)

Se describe y documenta la estrategia a llevar a cabo, se implementa y se evalúa, con la participación de uno o más actores involucrados (docente, estudiante, padres de familia, psicólogo, especialista, otros).

Sobre el proceso, instrumentación, implementación y evaluación de una AC se sugiere consultar González (1995).

Búsquedas Especializadas

Se llevó a cabo una investigación documental que consistió en la revisión de 18 revistas especializadas en el campo de la educación matemática y estadística (ver Tabla 1). La búsqueda consistió en revisar los artículos de 2020 y 2021 (hasta la fecha), para explorar qué se ha publicado sobre curriculo y pandemia.

Tabla 1

Lista de revistas especializadas consultadas en Educación Matemática

País	Nombre de la revista	2020 Números	2021 Números
Brasil	Boletim de Educação Matemática	66, 67, 68	ND
México	Educación Matemática	1, 2, 3	1
España	Enseñanza de las Ciencias	1, 2, 3	1
España	Epsilón- Revista de Educación Matemática	104, 105, 106	ND
España	Números	103, 104, 105	106, 107
Venezuela	Paradigma	1, 2, 3, extra	1
España	PNA- Revista en Investigación en Didáctica de las Matemáticas	1, 2, 3, 4	2
Portugal	Quadrante – Revista de Investigação em Educação Matemática	1, 2	ND
México	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)	1, 2, 3	1
Chile	Revista Chilena de Educación Matemática	1, 2, 3	1
México	Revista de Investigación Educativa de la REDIECH	Publicación continua	Publicación continua
España	UNION- Revista Iberoamericana de Educación Matemática	58, 59, 60	ND
España	UNO- Revista de Didáctica de las Matemáticas	87, 88, 89, 90	91
Argentina	YUPANA – Revista de Educación Matemática de la UNL (Universidad Nacional Litoral)	1	ND
Brasil	Zetetiké	Publicación continua	ND
España	Matemáticas, educación y sociedad (MES)	1, 2, 3	1
México	Revista de Investigación e Innovación en Educación Matemática (IIEM)	1	ND
Nueva	Statistics Education Research Journal	1, 2, 3	ND

Zelanda

ND= no disponible hasta el cierre de esta publicación (12 de abril de 2021)

Los descriptores claves de búsquedas fueron: currículo, adaptación curricular, pandemia, covid-19.

De la revisión se encontro que de 2020 a la fecha se han publicado números especializafos, a manera de monográficosm en al campo de la educación estadística, como son:

a. Uno- Revista de Didáctica de las Matemáticas, 089 (julio, 2020) – Probabilidad
b. Revista Matemáticas, Educación y Sociedad, Vol.3, No.2 (septiembre, 2020)
c. Yupana- Revista anual de Educación Matemática (septiembre, 2020)
d. Revista Números, Vol. 106 (extraordinario) (enero, 2021)
e. Revista Paradigma, Vol. 42, Extra 1 (marzo, 2021)

Sobre las publicaciones sobre el tema de currículo y matemáticas, se identificaron 11 artículos, con énfasis en:

- Análisis curricular desde la perspectiva crítica
- Evaluación curricular de profesores de matemáticas
- Análisis curricular del álgebra en futuros profesores
- Creencias curriculares
- Análisis curricular del álgebra en educación primaria
- Análisis de libros de texto
- Orientaciones curriculares en la enseñanza del álgebra
- Análisis de las propuestas curriculares de STEM y STEAM
- Análisis de libros de texto en el tema del límite
- Reformas curriculares en matemáticas
- Evaluación curricular en matemáticas

Resultados

Seguidamente se describen brevemente los cuatro artículos e investigaciones que proponen experiencias didácticas o actividades de aprendizaje que pueden estar asociadas a las adaptaciones curriculares.

1. *Experiencias didácticas sobre probabilidad y estadísticas en Primaria*

Alsina, Vázquez, Muñiz-Rodriguez y Rodriguez-Muñiz (2020) considerando que la COVID-19 ha generado un enorme interés a los alumnos, presentan una selección de experiencias para que los alumnos de 6 a 12 años utilicen conocimientos de estadística y probabilidad que les ayuden a interpretar datos reales vinculados a la comprensión de la crisis sanitaria, económica y social pro- vocada por esta pandemia, y al mismo tiempo reflexionen críticamente sobre ellos, así como sobre el rol que cada uno tiene en la comunidad local y en la sociedad (p. 113). Las experiencias son:

- Experiencia 1: ¿Qué actividades hemos hecho durante el confinamiento? (edad: 6-8)
- Experiencia 2: ¿Cómo se entienden mejor los datos? (desde diferentes fuentes de información) (edad: 8-10)
- Experiencia 3: ¿Cuánta información nos da una gráfica? (casos y demografía) (edad: 10-12)
- Experiencia 4: ¿Usar o no mascarilla? (edad: 6-8) (de probabilidad)
- Experiencia 5: ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar al azar a una persona con COVID-19 conectada a un ventilador mecánico? (edad: 8-10) (de probabilidad)
- Experiencia 6: COVID-19 ¿una cuestión de género? (edad: 10-12) (de probabilidad)

2. *Experiencias didácticas sobre estadísticas en Secundaria*

Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, Vásquez y Alsina (2020), exponen igual cuatro experiencias, organizadas progresivamente por edades desde los 12 a los 16 años, que se corresponden a los cursos de Educación Secundaria en la mayor parte de los países. Estas son:

- Experiencia 1: La COVID-19 en dos gráficas no convencionales (edad: 12-13)
- Experiencia 2: Incidencia de la COVID-19 por CCAA (comunidades autónomas) (edad: 13-14)
- Experiencia 3: ¿La enfermedad ataca por igual a hombres y a mujeres? (edad: 14-15)
- Experiencia 4: El estudio ENE-COVID19 (persnas que generan anticuerpos) (edad: 15-16)

3. *Experiencias didácticas sobre probabilidad en Secundaria*

Específicamente sobre actividad de probabilidad, Vásquez, Rodríguez-Muñiz, Muñiz-Rodríguez, y Alsina (2020) presentan igual cuatro propuestas de actividades contextualizadas en la COVID-19, cuyo objetivo es promover la alfabetización probabilística en Educación Secundaria. Son:

- Experiencia 1. ¿Cómo se propaga la COVID-19 en un avión? (edad: 12-13)
- Experiencia 2. Fiebre y hospitalización por COVID-19 (edad: 13-14)
- Experiencia 3. Las pruebas diagnósticas en la infección COVID-19: ¿test PCR o test rápido? (edad: 14-15)
- Experiencia 4: Probabilidad de contagio por COVID-19 en función de la edad (edad: 15-16)

Estas tres investigaciones, que en total proponen 14 actividades de aprendizje, se describen a detalle en cada publicación con la siguiente estrutura cada una: nombre, nivel (edad), contenidos implícitos (tópicos), descripción de la actividad, orientaciones pedagógicas y algunas variantes.

4. *Secuencia didáctica integrada a la coreografía externa*

Cabrera, Tauber y Fernández (2020), en el ámbito universitario diseñaron una secuencia didáctica contextualizada, desde la perspectiva de pensar estadís-críticamente, en el marco de la pandemia del Covid-19 e infodemia, la cual integraron a modo de innovación en la coreografía didáctica externa cuya meta central fue que los estudiantes tomen conciencia de la relevancia de la comprensión de las ideas estadísticas fundamentales para discernir entre la información confiable y fidedigna de la que no lo es (p. 92).
Como actividad central proponen la lectura crítica de relatos periodísticos y de referentes políticos que utilizan las ideas estadística fundamentales para dar credibilidad a sus afirmaciones en temáticas relacionadas con la pandemia. Incorpora y utilidad bases de datos generados por el Ministerio de Salud de la Nación –Argentina–, en relación con indicadores tales como: velocidad de contagio, tasa de contagios -en relación a la cantidad de testeos-, tasa de contagio -en relación a la población de habitantes -, tasa de incidencia, tasa de prevalencia, tasa de letalidad, tasa de mortalidad, porcentaje de camas ocupadas en UTI (unidad de terapia intensiva), distribución de los contagios en las distintas provincias y/o regiones de nuestro país, entre otros (p. 99)
En el artículo, la secuencia didáctica se describe a detalle y consta de tres partes:

> Parte 1. Se presenta a modo de problemática la situación a través de una entrevita y se solicita al estudiante reflexionar sobre el contexto, el papel de la estadística y los alcances y limitaciones de la publicación.
> Pare 2. A partie del sitio oficial del Ministerio de Salud sobre información generada por el Covid-19, se presenta una diversidad de preguntas con la finalidad que el analizar críticamente los conceptis utilizados, la información, su validez y confiabilidad y el papel de los datos.
> Parte 3. Revisar noticias periodísticas que permitan constrastar, modificar o confirmar su análisis preliminar.

Conclusiones

Con base en la información revisada y analizada se concluye que no hay suficiente evidencia e información para afirmar que las propuestas que se encontraron se tratan de adaptaciones curriculares, centradas en buscar una mayor equidad y calidad en la educación, en el aprendizaje de la estadística.

Las experiencias, secuencias o actividades de aprendizaje encontradas son un extraordinario recurso didáctico necesario para vincular la estadística a la realidad actual y que representan un valioso apoyo para los docentes en tiempos de pandemia, como bien lo afirman los autores identificados. En su conjunto se considera material didáctico relevante que puede ser útil o no para las adaptaciones curriculares.

La clave para identificar si se trata o no de una AC es la identificación de las necesidades especificas del estudiantado (en el momento y escenario real), en el marco de un programa educativo, y la pronta intervención y evaluación de su implementación, ya sea individual o grupal.

A la fecha, no se han publicado artículos científicos que den cuenta de la necesidad, existencia y del diseño de adaptaciones curriculares en tiempos de la actual crisis sanitaria, asociado al campo de la educación estadística.

La evidencia analizada de la producción científica de 2020 hasta la fecha, en educación estadística con base en las revistas especiaizadas revisadas, da cuenta de pocos estudios relacionados con teoría curricular desde una perpectiva crítica y poscrítica y hasta el momento ninguno se encontró relacionado con las adaptaciones curriculares.

Se concluye la necesidad de postular una línea emergente de investigación sobre adaptaciones curriculares en estadística.

Referencias Bibliográficas

Alsina, A., Vázquez, C., Muñiz-Rodriguez, L. y Rodriguez-Muñiz, L. J. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y probabilística en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Primaria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, 104, pp. 99-128.

Bakova, Irina (21 de mayo de 2015). *Foro Mundial de Educación – Educación 2030* [Vídeo]. De: https://www.youtube.com/watch?v=EGd0pM6MAQE

Banco Mundial (7 de mayo de 2020). *Pandemia de COVID-19: impacto en la educación y respuestas en materia de políticas* [Vídeo]. De: https://www.bancomundial.org/es/topic/education/publication/the-covid19-pandemic-shocks-to-education-and-policy-responses

Cabrera, G., Tauber, L. y Fernández, E. (2020). Educación Estocástica para pensar estadís- críticamente. *Matemáticas, Educación y Sociedad, 3*(2), 89-109

Vásquez, C., Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L. y Alsina. A. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización probabilística en contexto? Estrategias y recursos para la Educación Secundaria a partir de la COVID-19. *Números*, 104 (julio), pp. 239-260.

Cipollone, D. (2021). Los procesos de inclusión educativa en la pandemia ¿son posibles? *Anuario digital de Investigación Educativa*, 4 (febrero), pp. 86-94.

González, D. (1995). *Adaptaciones curriculares. Guía para su elaboración*. Colección: Educación para la diversidad. Granada: Ediciones Aljibe.

Ki-Moon, Ban (21 de mayo de 2015). *Foro Mundial de Educación – Educación 2030* [Vídeo]. De: https://www.youtube.com/watch?v=EGd0pM6MAQE

Ley Orgánica de Educación 2/2006, de 3 de mayo. España. Disponible en: https://www.boe.es/buscar/pdf/2006/BOE-A-2006-7899-consolidado.pdf

ORDEN de 22 de julio de 1999 por la que se regulan las actuaciones de compensación educativa en centros docentes sostenidos con fondos públicos. Disponible en: https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-1999-16373

Rodríguez-Muñiz, L. J., Muñiz-Rodríguez, L, Vásquez, C.,. y Alsina. A. (2020). ¿Cómo promover la alfabetización estadística y de datos en contexto? Estrategias y recursos a partir de la COVID-19 para Educación Secundaria. *Números*, 104 (julio), pp. 217-238.

Secretaría de Educación Pública (SEP) (2006). *Adecuaciones curriculares: puente hacia el logro de los propósitos educativos en alumnss y alumnos con necesidades educativas especiales*. México: SEP.

UNICEF. (2008). *Educación en situaciones de emergencia y desastres: guía de preparativos para el sector de educación*. Recuperado de https://www.usebeq.edu.mx/PaginaWEB/Content/PCYEE/Educacion%20en%20situaciones%20de%20emergencia%20y%20desastres.pdf

Disertación Invitada GTD-4.2

El contagio de los datos: La importancia de alfabetización estadística

Jaime Israel GARCÍA-GARCÍA

Universidad de Los Lagos, Chile

jaime.garcia@ulagos.cl

Resumen

La enseñanza de la Estadística ha tomado auge en los últimos 25 años, cuya inserción se ha visto reflejada en los planes y programas de estudio de diversos países. Sin embargo, las investigaciones revelan los desafíos que aún se enfrentamos: 1) los bajos resultados en pruebas estandarizadas, 2) las falencias presentes en los currículos a partir de la revisión de los libros de texto, 3) las dificultades propias de la disciplina, por ejemplo, el abordaje de las ideas estadísticas fundamentales, 4) las creencias y actitudes de los estudiantes y profesores hacia esta disciplina, y 5) el relegado sitio de la disciplina en el currículo escolar.

Por ello, el desarrollo de esta conferencia se plantea desde dos dimensiones, a saber: 1) la situación de infodemia que se vive desde hace algunos años y que hoy, debido a la pandemia Covid-19, ocupa los escaparates de los diversos medios de comunicación, notando la necesidad de que la población mundial posea la capacidad de leer e interpretar críticamente tablas y gráficos estadísticos para la toma adecuada de decisiones, esto a partir de una mirada de los objetivos de aprendizaje priorizados en el currículo nacional chilenos; y 2) algunos resultados de investigaciones en Educación Estadística sobre la comprensión de estas representaciones estadísticas. Así, el objetivo de esta conferencia es proponer una reflexión sobre las capacidades que hoy debe poseer el estudiante y el profesor, para dar respuesta a las necesidades actuales emergentes de los datos y contribuir a la toma de decisiones con una actitud crítica.

Palabras Clave: Alfabetización Estadística. Infodemia. Comprensión Gráfica. Gráficos Estadísticos. Tablas Estadísticas.

Introducción

En los últimos 25 años, la enseñanza de la Estadística ha tomado un lugar importante dentro de los currículo y los programas de aprendizaje a nivel mundial, por ejemplo, en las directrices curriculares de Educación Primaria de México (SEP, 2017), Perú (MINEDU, 2009), Chile (MINEDUC, 2012) y Estados Unidos (NCTM, 2000); esto debido a que se reconoce como una herramienta clave en disciplinas científicas, es decir, toma un papel fundamental dentro de la investigación de carácter científica (Esquivel, 2016).

La Estadística nos permite estudiar fenómenos donde se presenta la variabilidad e incertidumbre, partir de un estudio metódico y sistemático de información o datos recopilados. Para esto, se recolectan, ordenan y analizan los datos con el objeto de deducir el comportamiento que rigen esos fenómenos y poder hacer predicciones sobre los mismos, obtener conclusiones o tomar decisiones. En general, permite el análisis y modelación de la realidad (de los fenómenos que nos rodean), generando así la interpretación y nuevo conocimiento de ésta (Fernández, García-García, Calderón y Arredondo, 2021). Con respecto a lo anterior, Contreras y Molina-Portillo (2017, p. 1) señalan que “la estadística es una de las áreas de conocimiento que ha adquirido mayor relevancia y reconocimiento en las últimas décadas, en parte debido a su estrecha relación con áreas científicas, sociales y humanísticas”.

Desde hace casi 20 años, dentro de la comunidad investigativa en Educación Estadística, se ha venido trabajando con un término conocido como Alfabetización Estadística, traducción en español de *Statistical Literacy* (Gal, 2002). Esta alfabetización consiste en interpretar y evaluar, de manera crítica, información estadística; así como formular y comunicar opiniones con respecto a dicha información (Gal y Murray, 2011). Estrella, Olfos y Mena-Lorca (2015) consideran que:

> Alfabetización Estadística incluye las habilidades básicas que se usan para comprender la información estadística, como organizar datos, construir y presentar tablas, y trabajar con diferentes representaciones de datos, e incluye la comprensión de conceptos, vocabulario y símbolos, y una comprensión de la probabilidad como una medida de incertidumbre. (p. 480)

Esto alude a formar ciudadanos alfabetizados estadísticamente, desde Educación Básica hasta nivel universitario. Sin embargo, no se trata de convertir a los estudiantes en estadísticos aficionados, ni de capacitarlos en el tratamiento de datos a través de la construcción de representaciones estadísticas o en el cálculo de algoritmos como la media aritmética (Batanero, 2004), sino de entregarles herramientas que les permitan tomar una postura crítica ante los datos (Gal, 2002); esto con el fin de dar respuesta a las necesidades actuales emergentes de los datos.

En el caso de las representaciones estadísticas (tablas y gráficos), estas permiten mostrar, en forma sintetizada, información estadística (social, política, deportiva, cultural, etc.). Tal información, debe ser atendida por los ciudadanos que acceden a ella por los diversos medios de comunicación (periódicos, televisión, revistas, internet, etc.), es decir, comprendida de manera crítica. Por ello, el estudiante, así como el profesor, necesita herramientas para comprender (leer e interpretar) la información y, a partir de esto, poder opinar y tomar decisiones de manera adecuada, con una actitud crítica.

A continuación, abordaremos la importancia de la alfabetización estadística desde dos dimensiones, a partir de la situación de infodemia que se vive debido a la pandemia Covid-19 (SARS-CoV-2), y algunos resultados de investigaciones en Educación Estadística sobre la comprensión de tablas y gráficos estadísticos.

La situación de la infodemia

Actualmente, debido a la situación de emergencia sanitaria por el coronavirus (SARS-CoV-2), día a día se genera bastante información estadística de manera considerable, por lo que estamos expuestos a una infodemia masiva, y con ello, es necesario promover y priorizar los saberes estadísticos que se consideran esenciales para los estudiantes.

En Chile, con la iniciativa de que no se genere una disrupción en oportunidades educativas, así como una mayor brecha en las desigualdades educacionales, el Ministerio de Educación (MINEDUC) realizó una priorización curricular de los objetivos de aprendizaje (OA) más esenciales y sobre los cuales se construye cada disciplina, buscando resguardar el acceso a una educación de calidad (Vásquez, Ruz y Martínez, 2020). Se entiende esta priorización como "un marco de actuación pedagógica, que define objetivos de aprendizaje, secuenciados y adecuados a la edad de los estudiantes, procurando que puedan ser cumplidos con el máximo de realización posible en las circunstancias en que se encuentra el país" (MINEDUC, 2020a, p. 6).

Con respecto a la asignatura de matemática (MINEDUC, 2020b), se organizaron y priorizaron los OA de cada uno de ejes temáticos (Números, Álgebra y Funciones, Geometría y Medición, Estadística y Probabilidad) para conservar un balance entre ellos; esto con el propósito de que el estudiante pueda construir un conocimiento básico por grado, así como desarrollar habilidades (resolver problemas, argumentar, comunicar, modelar, representar) y actitudes esenciales para el ciudadano actual (Vásquez, Ruz y Martínez, 2020).

En concreto con los contenidos de Estadística y Probabilidad, Vásquez, Ruz y Martínez (2020) presentan de forma detallada un análisis comparativo de la progresión de los OA de los distintos niveles educativos del currículum chileno, antes y después de la priorización curricular. En la Tabla 1, se muestran los OA que han sido priorizados como imprescindibles (nivel 1) e integradores y significativos (nivel 2) en el currículum de emergencia en Educación Básica y Media en Chile, debido a la pandemia provocada por el coronavirus (SARS-CoV-2).

Tabla 1. ***Objetivos de Aprendizaje priorizados en el área de estadística y probabilidad en el currículum de emergencia***

Nivel educativo	OA de estadística y probabilidad priorizados	
	Nivel 1	Nivel 2
Tercer año básico	Construir, leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, en base a información recolectada o dada.	
Cuarto año básico	Leer e interpretar pictogramas y gráficos de barra simple con escala, y comunicar sus conclusiones.	
Quinto año básico	Calcular el promedio de datos e interpretarlo en su contexto.	Describir la posibilidad de ocurrencia de un evento en base a un experimento aleatorio, empleando los términos: seguro; posible; poco posible; imposible.
Sexto año básico	Leer e interpretar gráficos de barra doble y circulares y comunicar sus conclusiones.	Conjeturar acerca de la tendencia de resultados obtenidos en repeticiones de un mismo experimento con dados, monedas u otros, de manera manual y/o usando software educativo.
Séptimo año básico	Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados, de manera manual y/o con software educativo	Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual y/o con software educativo.
Octavo año básico	Mostrar que comprenden las medidas de posición, percentiles y cuartiles.	Evaluar la forma en que los datos están presentados.
Primer año	Desarrollar las reglas de las probabilidades, la regla	Registrar distribuciones de dos

medio	aditiva, la regla multiplicativa y la combinación de ambas, de manera concreta, pictórica y simbólica, de manera manual y/o con software educativo, en el contexto de la resolución de problemas.	características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada y en una nube de puntos. Mostrar que comprenden el concepto de azar
Segundo año medio	Utilizar permutaciones y la combinatoria sencilla para calcular probabilidades de eventos y resolver problemas.	Mostrar que comprenden el rol de la probabilidad en la sociedad.
Tercer año medio	Tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos con medidas de dispersión y probabilidades condicionales.	

Fuente: Elaboración propia (Adaptada de Vásquez, Ruz y Martínez, 2020)

Como podemos observar, existe un vacío en primer y segundo año básico, y cuarto año medio, con relación a los contenidos de Estadística y Probabilidad; es decir, no se consideran estas disciplinas como prioritarias en la enseñanza de la matemática, siendo este un tema preocupante en la educación chilena, ya que son numerosas las situaciones en las que se presentan gráficos estadísticos erróneos en los diversos medios de comunicación, los cuales crean falsas impresiones.

Algunos resultados de investigaciones sobre Comprensión Gráfica

Las tablas y gráficos estadísticos son considerados parte de la alfabetización estadística (Cazorla y Utsumi, 2010; Contreras y Molina-Portillo, 2019; Del Pino y Estrella, 2012; Gal, 2002), es decir, parte de los conocimientos, capacidades y habilidades que deben dominar adecuadamente los ciudadanos para utilizar un lenguaje estadístico elemental, en particular, leer, interpretar, analizar y construir diferentes representaciones estadísticas, así como evaluar y comunicar de manera crítica información estadística a la que tienen acceso en diferentes situaciones de la vida cotidiana.

Cuando hablamos de comprensión gráfica, en la literatura podemos encontrar diversas posturas. Por ejemplo, Friel, Curcio y Bright (2001) señalan la comprensión gráfica como la lectura, descripción, interpretación, análisis y extrapolación/interpolación de datos desde los gráficos estadísticos. Por su parte, Estrella y Olfos (2012) la ubican como parte del pensamiento estadístico al integrar la lectura entre los datos y más allá de ellos, es decir, al realizar comparaciones dentro y entre los datos, y hacer inferencias informales desde el conjunto de los datos, respectivamente. Bajo esta perspectiva, es posible considerar la comprensión gráfica como la comprensión de tablas y gráficos estadísticos, estrechamente ligada con la alfabetización estadística.

Diversas investigaciones se han desarrollado en torno a la comprensión gráfica; estás podemos clasificarlas en dos grandes rubros: 1) análisis de la comprensión gráfica apoyada con preguntas orientadoras (e.g., Batanero, Díaz-Levicoy y Arteaga, 2018; Carmona y Cruz, 2016; Díaz-Levicoy, Sepúlveda, Vásquez, y Opazo, 2016; Fernandes y Morais, 2011; Gabucio, Martí, Enfedaque, Gilabert y Konstantinidou, 2010; Tauber, 2010), y 2) sin preguntas orientadoras (e.g., Fernández, García-García, Arredondo y López, 2019; García-García, Encarnación y Arredondo, 2020; García-García, Imilpán, Arredondo y Fernández, 2019; Gea, Arteaga y Cañadas, 2017; Inzunsa, 2015). Para ello, se han utilizado diversas taxonomías para la comprensión gráfica, por ejemplo, la taxonomía de Curcio (Curcio, 1989; Friel, Curcio y Bright, 2001; Shaughnessy, 2007) y la jerarquía de Aoyama (2007).

En general, los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto que la mayaría de los participantes alcanzan niveles de lecturas inferiores, enfocados en la lectura de datos o comparación entre ellos; mientras que pocos alcanzan niveles superiores, relacionados con la predicción de valores o tendencias en los datos, e integración del contexto en sus interpretaciones.

Reflexiones Finales

Los OA priorizados en el currículum chileno para la Educación Básica y Media, en el eje de Estadística y Probabilidad, seleccionados con tal de dar solución a las necesidades mencionadas anteriormente debido a la situación de la pandemia, hacen referencia a construir, leer e interpretar pictogramas, gráficos de barras y circulares con base a información recolectada o dada, comunicar conclusiones, representar datos obtenidos mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, evaluar la forma en que los datos están representados, registrar distribuciones de dos características distintas en una tabla de doble entrada, y tomar decisiones en situaciones de incerteza que involucren el análisis de datos estadísticos, entre otras.

En general, podemos señalar que una de las prioridades de la enseñanza de la Estadística en las aulas de clases chilenas es que el estudiante desarrolle la capacidad de leer e interpretar información de un grupo de datos representados en tablas o gráficos estadísticos, así como evaluar la forma en que estos datos están representados y comunicar conclusiones basadas en dichos datos, los cuales pueden presentarse en diferentes contextos. En síntesis, es necesario desarrollar estas capacidades en los estudiantes con el fin de formar ciudadanos estadísticamente alfabetizados, y con ello, dar respuesta a las necesidades actuales por la infodemia y contribuir a la toma de decisiones con una actitud crítica.

Referencias Bibliográficas

Aoyama, K. (2007). Investigating a hierarchy of students' interpretations of graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 298-318.

Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, *1*, 27-36.

Batanero, C., Díaz-Levicoy, D., y Arteaga, P. (2018). Evaluación del nivel de lectura y la traducción de pictogramas por estudiantes chilenos. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 14*, 49-65.

Carmona, D., y Cruz, D. (2016). *Niveles de comprensión de la información contenida en tablas y gráficas estadísticas: un estudio desde la jerarquía de Kazuhiro Aoyama* (Tesis de Maestría). Universidad de Medellín, Colombia.

Cazorla, I., y Utsumi, M. C. (2010). Reflexões sobre o ensino de estatística na educação básica. En I. Cazorla y E. Santana (Eds.), *Do tratamento da informação ao letramento estatístico* (pp. 9-18). Itabuna: Via Litterarum.

Contreras, J. M., y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). Granada: Universidad de Granada.

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Del Pino, G., y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo*, *49*(1), 53-64.

Díaz-Levicoy, D., Sepúlveda, A., Vásquez, C., y Opazo, M. (2016). Lectura de tablas estadísticas por futuras maestras de Educación Infantil. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1099-1115.

Esquivel, E. C. (2016). La enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, más allá de procedimientos y técnicas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(15), 21-31.

Estrella, S., Olfos, R., y Mena-Lorca, A. (2015). El conocimiento pedagógico del contenido de estadística en profesores de primaria. Educação e Pesquisa, 41(2), 477-493.

Fernandes, J. A., y Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa, 13* (1), 95-115.

Fernández, N., García-García, J. I., Arredondo, E., y López, C. (2019). Comprensión de una tabla y un gráfico de barras por estudiantes universitarios. *Areté. Revista Digital del Doctorado en Educación de la Universidad Central de Venezuela, 5* (10), 145-162.

Fernández, N., García-García, J. I., Calderón, D., y Arredondo, E. H. (2021). Juicios de asociación en tablas de contingencia 2x2 por estudiantes de Educación Media en Chile. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática*, *4*(1), 3-23.

Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education, 32* (2), 124-158.

Gabucio, F., Martí, E., Enfedaque, J., Gilabert, S., y Konstantinidou, A. (2010). Niveles de comprensión de las tablas en alumnos de primaria y secundaria. *Cultura y Educación*, *22*(2), 183-197.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Gal, I., y Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics*, *27*(3-4), 185-195.

García-García, J. I., Encarnación, J. E., y Arredondo, E. H. (2020). Exploración de la comprensión gráfica de estudiantes de secundaria. *IE Revista de Investigación Educativa de la REDIECH*, *11*, e925.

García-García, J. I., Imilpán, I., Arredondo, E. H. y Fernández, N. (2019). Comprensión de una tabla estadística por estudiantes universitarios en México y Chile. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 14,* 1-16.

Inzunsa, S. (2015). Niveles de interpretación que muestran estudiantes sobre gráficas para comunicar información de contextos económicos y sociodemográficos. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *20*(65), 529-555.

MINEDU (2009). *Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular*. Lima: Dirección General de Educación Básica Regular.

MINEDUC (2012). *Matemática educación básica. Bases curriculares*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2020a). *Fundamentos Priorización Curricular*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

MINEDUC. (2020b). *Priorización Curricular Matemática*. Santiago: Unidad de Currículum y Evaluación.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va.: The National Council of Teachers of Mathematics.

SEP (2017). *Aprendizajes Clave para la Educación Integral. Plan y programas de estudio para la educación básica.* México: Secretaría de Educación Pública.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistical learning and reasoning. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 957-1009. Charlotte, N. C.: Information Age Publishing.

Tauber, L. (2010). Análisis de elementos básicos de alfabetización estadística en tareas de interpretación de gráficos y tablas descriptivas. *Ciencias Económicas. Revista de la Facultad de Ciencias Económicas de la UNL*, *8*(1), 53-67.

Vásquez, C., Ruz, F., y Martínez, M. (2020). Recursos virtuales para la enseñanza de la estadística y la probabilidad: un aporte para la priorización curricular chilena frente a la pandemia de la COVID-19. *TANGRAM-Revista de Educação Matemática, 3*(2), 159- 183.

El concepto de POBLACIÓN ESTADÍSTICA bajo la lupa

María Alejandra SANTARRONE
Facultad de Ciencias Económicas

Universidad Nacional del Litoral, Argentina

santarrone@gmail.com

Resumen

En general, uno de los primeros conceptos que aparecen en los libros de texto de un primer curso universitario de estadística es el de POBLACIÓN. En una primera instancia, en esta conferencia se analizarán algunas definiciones encontradas en las bibliografías y su relación con los contenidos de distribuciones de probabilidad e inferencia, para dar cuenta de algunos obstáculos didácticos que se detectan al dar continuidad en la lectura. De esta manera se pondrá en diálogo cómo este concepto forma parte de una de las ideas fundamentales de la estadística paramétrica desarrolladas en Meyer (2005). En una segunda parte, se expondrán problemas formulados en un instrumento construido para recoger evidencia acerca de las dificultades que conlleva la aplicación, de una definición en particular adoptada, en contextos reales. Además, se mostrará cómo, en el mismo, se ha puesto en juego el enfoque ontosemiótico de lo didáctico (definiendo campos de problemas y objetos matemáticos) y los resultados obtenidos en una primera indagación en estudiantes universitarios de un primer curso de estadística. El desarrollo de la conferencia tenderá a ser un espacio para reflexionar, como comunidad de educadores, de la importancia que tiene el analizar conceptos centrales de estadística y su devenir en el currículo.

Palabras clave: Educación Estadística. Población. Inferencia.

El concepto de Población Estadística en libros de texto

En general, uno de los primeros conceptos que aparecen en los libros de texto de un primer curso universitario de estadística es el de POBLACIÓN. A continuación, se exponen dos definiciones encontradas en las bibliografías y su relación con las distribuciones de probabilidad, como apertura al debate de cómo se pueden detectar algunos obstáculos didácticos al dar continuidad en la lectura.

Libro	Definición adoptada	Frase para analizar
Williams y Perles. (1990)	Pág. 37: "Si un conjunto de datos consta de todas las observaciones concebidamente posibles (o hipotéticamente posibles) de cierto fenómeno, lo llamaremos población". Ejemplo: "Resistencia de los azulejos".	En la pág. 301 se lee: "Cuando la población que muestreamos tiene aproximadamente la forma de una curva normal…" y en la pág. 351 se lee la siguiente frase: "Una población cuya desviación es…"
Anderson, Dennis J. Sweeney, Thomas A. Williams (2008)	Pág. 15: La población es el conjunto de todos los elementos de interés en un estudio determinado. Ejemplo dado: …la población está formada por todos los focos que se produzcan…	En la pág. 264 se lee la siguiente frase: "A las características numéricas de una población, como la media y la desviación estándar, se les llama parámetros" y en la 272: "La población tiene distribución normal"

Tabla 1. Definiciones de "Población" en libros de texto

Como se puede visualizar en el cuadro, la primera definición hace corresponder a cada población una variable estadística, en cambio en la segunda se puede ver cómo cada población puede tener asociada un conjunto de variables estadísticas. Por lo cual cuando se habla de parámetros, distribuciones de probabilidad, distribuciones muestrales en términos poblacionales y no a partir de las variables es donde se pueden visualizar los obstáculos didácticos. Hacer foco en lo anterior se cree relevante y abre la discusión acerca de la complejidad que puede tener el aprendizaje de este concepto pensado no como una definición estanca sino como una construcción en el devenir curricular.

Estudio exploratorio. Idea fundamental de la Inferencia Estadística: Población Estadística

Seguidamente, se expone un instrumento construido para recoger evidencia acerca de las dificultades que conlleva la aplicación, de una definición en particular de "Población estadística", en contextos reales. Se mostrará cómo, en el mismo, se ha puesto en juego el enfoque ontosemiótico de lo didáctico (definiendo campos de problemas y objetos matemáticos) y los resultados obtenidos en una primera indagación en estudiantes universitarios de un primer curso de estadística.

Referencias Teóricas sobre la construcción de un test

Según Godino y Batanero (1994), se toma como práctica matemática a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas

Esta noción permite tener en cuenta el principio Piagetiano de la construcción del conocimiento a través de la acción.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos materiales (símbolos, gráficos, etc.) y abstractos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual. Aquí una tarea o problema es tomado como planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos. Un conjunto de problemas formará un campo (campo de problemas) cuando todos ellos compartan soluciones y/o metodologías de resolución similares o relacionadas.

En el caso de la matemática, será un campo de problemas relacionado con un objeto matemático específico, así como las progresivas actividades que surgen del mismo.
La situación-problema y las prácticas que se realizan en su resolución son el primer eslabón que permitirá definir los conceptos, el objeto y el significado (personal e institucional) como resultado de su resolución. Por tanto, el significado en este enfoque es el resultado del conjunto de prácticas realizadas a la hora de resolver un campo de problemas.
En otra dimensión Meyer (2005) sostiene que una idea fundamental para presentar a los alumnos al desarrollar el proceso de conocimiento de la inferencia estadística y las formas de razonamiento cuantitativas asociadas - y por lo tanto para una posterior formación efectiva en el saber cómo hacer de la metodología de la inferencia estadística; comienza con la identificación del conjunto de todas las medidas o datos de la variable estadística que se está estudiando y que es de interés de acuerdo al problema que se debe resolver.
Para este autor una "Población estadística" es "el conjunto de todas las medidas repetidas o no, experimentales o ideales, de la característica que se desea investigar, en un proceso de medición sobre todos los elementos que son portadores de dicha característica, mediante una escala predefinida, y definidos con precisión tiempo y espacio" (p. 226), lo que conlleva a una necesidad de reconstrucción de la definición intuitiva que tienen los estudiantes iniciales sobre el término de población, al asociar a éste al de población geográfica.
El concepto de población estadística antes definido, a partir de la estadística descriptiva, tendrá su completa asimilación al ser relacionada con las distribuciones de probabilidad, y así transformarse en un concepto condicionante del acceso a las formas de razonamiento inferenciales estadísticas.
de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo y una actitud crítica que se muestra al ser capaz de cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística no suficiente o sesgada.

Diseño Metodológico para la construcción del test

Como se mencionó en el apartado anterior la construcción del test implicó explorar las dimensiones de los objetos matemáticos y los campos de problemas que los ítems implican, bajo el EOS.
Siguiendo a Tauber (2001) en el tratamiento de los conceptos, diferenciamos cuatro tipos de elementos:

- Elementos extensivos: Las situaciones y campos de problemas de donde emerge el objeto;
- Elementos ostensivos: Los recursos lingüísticos y gráficos para representar u operar con los problemas y objetos involucrados;
- Elementos intensivos: Propiedades características y relaciones con otras entidades: definiciones, teoremas, y proposiciones;
- Elementos validativos: Argumentos que sirven para justificar o validar las soluciones.

Dejando aquellos elementos actuativos, es decir procedimientos y estrategias para resolver los problemas por tratarse de una definición.
En relación a los elementos extensivos, los campos de problemas que determinan prácticas matemáticas que dan significado al concepto de Población Estadística los categorizamos, en base a las relaciones conceptuales que comparten, en los siguientes campos:
C1 Aparición de más de una población estadística: lo conforman aquellos problemas donde intervienen más de una población estadística bajo estudio.
C2 Aplicación en contexto: aquellos problemas que implican una atribución del significado de la definición en un contexto determinado.
C3 Necesidad de especificar la escala de medición de la variable: aquellas actividades donde la sola definición de la variable no basta para definir la población estadística que se estudia.
C4 Frecuencia de los datos a partir de montos: conjunto de problemas, típicos en el contexto económico, donde muchas variables cualitativas son observadas a partir de la cantidad de montos vendidos, consumidos o producidos.

C5 Presentación de la información a partir de una muestra: lo conforman aquellas situaciones problemáticas donde se presenta la información muestral.
C6 Reformulación de la definición de la población bajo estudio por cuestiones experimentales: en situaciones reales el estudio inicial de una población se ve recortado por cuestiones experimentales, y es allí donde el estadístico debe reformularlo y redefinir tanto la variable como la población bajo estudio.
C7 Trabajo con una población multivariada. Si bien podría encuadrarse dentro del campo de problemas C1 la importancia de la relación de orden entre las variables reviste un tratamiento a parte.
Con relación a los elementos ostensivos especificamos en primera instancia el lenguaje, visto como el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar el concepto y las situaciones a las que se refiere. Las categorías son:
O1.1: Coloquial. Por tratarse de una definición, la principal manera de solicitar a los estudiantes que den cuenta de su entendimiento es a partir de expresarla de forma escrita en el lenguaje natural.
O1.2: Tabular. Poder identificar a la población estadística como el conjunto de datos que se desea estudiar, con la importancia de establecer la correspondencia no sólo de sus valores sino de la repetición de los mismos, es de vital relevancia a la hora de poder trabajar el concepto de población estadística en las dimensiones de la inferencia estadística relacionándolo con las distribuciones teóricas de probabilidad.
O1.3: Gráfico. La lectura o la construcción de un gráfico estadístico con lleva a tener en cuenta todos los elementos que se relacionan en la definición de población estadística (variable, escala de medición, tipo de variable, tiempo, espacio).
O1.4: Por extensión. Brindar la definición de población estadística por extensión lleva al estudiante a pensar a esta como el conjunto de datos y viceversa.
Como elementos validativos:
O2: Nivel de justificación.
O2.1: Selectivo. Aquellos donde el estudiante sólo debe seccionar el correcto, sin realizar justificaciones, pero sí la selección implica una comprensión de la definición a la que se le está atribuyendo significado por los distractores aplicados a la opción múltiple.
O2.2 Argumentativo. Aquellos donde el alumno debe argumentar la falsedad o veracidad utilizando el concepto.
O2.3 Elaborativo. Aquellos donde el estudiante debe elaborar la respuesta poniendo la definición en términos del contexto.
Elementos intensivos:
La definición de población estadística adoptada involucra otros conceptos estadísticos que los alumnos deben comprender y relacionar, éstos son:
O3: Tipo de variables: O3.1 Cualitativa, O3.2 Cuantitativa.
O4: Escala de medición: O4.1 Nominal, O4.2 Ordinal, O4.3 De intervalo.
O5: Determinación: O5.1. Espacio, O5.2 Tiempo.
El cuestionario se aplicó a 34 estudiantes de dos de las comisiones de la FCE-UNL (C1:10 estudiantes; C2: 24 estudiantes) cursantes en el segundo cuatrimestre de 2019, luego de haber realizado el primer parcial que abarca los temas de estadística descriptiva y en particular el de Población Estadística. Su elección se centró en que estas eran las únicas comisiones donde las docentes no estaban involucradas en este trabajo.
A modo de ejemplo se expone el ítem número 7 del test:

7- Un comerciante analiza los registros de su local y observa que en los últimos 10 años ha variado el movimiento de venta de algunos artículos electrodomésticos. Éste resume la información en la tabla presentada debajo. Defina la o las poblaciones estadísticas que se estudiaron para arribar a dicha tabla, de manera coloquial.

ELECTRODOMÉSTICO	Porcentaje de aumento	Porcentaje de disminución
Televisor	10	-
Video casetera	-	30
DVD	50	-
plancha	1	-
Lavarropas automático	15	-
Estufa eléctrica	-	60
Secarropas	-	5

Texto de respuesta larga

Figura 1. Pregunta número 7 del test: Explorando los significados de una de las ideas fundamentales de la inferencia estadística paramétrica: Población estadística

La respuesta esperada es que hay dos poblaciones estadísticas estudiadas: "registro de cada tipo de electrodoméstico vendido por el comerciante hace diez años" y "registro de cada tipo de electrodoméstico vendido por el comerciante en la actualidad".

<u>Resultados obtenidos en el test</u>

A continuación, se pueden ver los porcentajes de respuestas correctas en las tablas correspondientes a los campos de problemas y a los objetos:

	Ítems								
Campo de problemas	1	2	3		4	5	6	7	8
			a	b					
C1							X	X	
C2	X	X	X	X	X	X	X	X	X
C3					X				
C4						X			
C5	X								
C6			X	X					
C7									X
% de respuestas correctas	41	38	44	15	15	29	3	0	0

Tabla 2. Clasificación de ítems a partir de los campos de problemas. Resultados del test

Objetos	Ítems									
		1	2	3		4	5	6	7	8
O1				a	b					
	O1.1	X	X	X	X	X	X	X	X	
	O1.2								X	X
	O1.3	X	X							
	O1.4		X					X		
O2	O2.1			X	X		X			
	O2.2					X				
	O2.3	X	X	X	X			X	X	X
O3	O3.1		X	X	X		X	X	X	
	O3.2	X								X
O4	4.1		X	X	X		X	X	X	
	4.2									
	4.3	X								X
O5	O5.1	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	O5.2	X	X	X	X	X	X	X	X	X

% de respuestas correctas		41	38	44	15	15	29	3	0	0

Tabla 3. Clasificación de ítems a partir de la composición de objetos. Resultados del test

En todos los ítems se evaluó la aplicación en contexto de la definición, en ningún caso más del 44% de los estudiantes pudo contestar correctamente. El ítem 3 fue el que presentó mayor porcentaje de respuestas correctas, siendo el único que aborda el problema de la reformulación de la definición de la población bajo estudio por cuestiones experimentales. Los estudiantes reconocieron el problema, pero sólo el 15% pudo redefinir correctamente la población estadística, solicitada en el ítem b).

En la pregunta 4 se aborda una problemática específica en contexto económico, como es la de presentar la frecuencia de los datos a partir de montos, donde muchas variables cualitativas son observadas a partir de la cantidad de montos vendidos, consumidos o producidos; aquí sólo el 15% pudo contestar lo esperado.

Los ítems 6 y 7 abordan la problemática de la intervención de más de una población estadística bajo estudio en la presentación de los datos. En el 8 se presentan a partir de la población bivariada. Por los bajos porcentajes de respuestas correctas (3%, 0% y 0% respectivamente) se puede evidenciar las dificultades que esto les presenta.

Con relación a los objetos, los únicos dos ítems que cubrían el O1.2: Tabular, poder identificar a la población estadística como el conjunto de datos que se desea estudiar, con la importancia de establecer la correspondencia no sólo de sus valores sino de la repetición de los mismos, es de vital relevancia a la hora de poder trabajar el concepto de población estadística en las dimensiones de la inferencia estadística relacionándolo con las distribuciones teóricas de probabilidad, los que tuvieron 0% de respuestas correctas.

Consideración final

El recorrido por algunos libros de texto y el test realizado da cuenta de la complejidad que encierra la definición de población estadística. Es relevante entonces, como comunidad de educadores, el reflexionar sobre la importancia que tiene el analizar conceptos centrales de estadística y su devenir en el currículo.

Referencias Bibliográficas

Anderson, D, Sweeney, T y Williams (2008). Estadística para administración y economía. México. Cengage Learning Editores.

Freund, Williams y Perles. (1990) Estadística para la administración con enfoque moderno. México. Prentice-Hall.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Meyer, R. (2005). *Funcionamiento didáctico del Saber. La inferencial estadística como metodología y la formación de formadores en educación (Tesis Doctoral en Educación)*. Universidad Católica de Santa Fe, Argentina.

Tauber, L. (2001). *La construcción del significado de la asociación a partir de actividades de análisis de datos* (Tesis Doctoral). Universidad de Sevilla. España.

ISBN 978-987-3941-66-5