DEPARTAMENTO CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

IIISEM-V

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Memorias

“NUEVOS PARADIGMAS EN LA POST-PANDEMIA en EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Tomo II
Artículos

MAYO’2022

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

IIISEM-V

Memorias del III SEM-V
Mayo'2022

Editor Científico: Jorge E. SAGULA
Compilador: Jorge E. SAGULA
Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

III SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual
III SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual : Nuevos paradigmas en la post-pandemia en Educación Matemática : tomo II : artículos ; compilación de Jorge E. Sagula. - 1a ed - Luján : EdUnLu, 2023.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-3941-85-6

1. Matemática. I. Sagula, Jorge E., comp.
CDD 510

Índice Modalidad / Índice Temático

Índice Modalidad

CA: Contexto Abierto

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

Índice Temático

CTM: Creatividad y Tecnología en Matemática

DM: Didáctica Matemática

EE: Educación Estocástica

MM: Modelización Matemática

RP: Resolución de Problemas

TEM: Tecnología en Educación Matemática

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

IIISEM-V

Índice de Artículos

Página 1
CA-CTM-01: Pensamiento lateral y STEAM: Elaboración de problemas para la implementación de recursos trigonométricos en el estudio de vectores
Walter ACOSTA – Sandra A. HERNÁNDEZ

Página 9
CA-TEM-01: Secuencia Didáctica enfrentando Preconcepciones
Marisa REID – Rosana BOTTA GIODA

Página 17
GTD-DM-01: Actividad de estudio e investigación (AEI) para estudiar cuerpos geométricos en el nivel secundario argentino: resultados de una implementación
Andrea BERENGUEL RINALDI – Verónica PARRA

Página 25
GTD-DM-02: Los recursos tecnológicos en cursos de Matemática de primer año del nivel superior: uso, evidencias y primeros análisis
Gustavo CARNELLI – Vilma COLOMBANO

Página 32
GTD-DM-03: Realidad aumentada para el aprendizaje de la matemática en carreras de ingeniería
Martha S. ROSSO – Juan Manuel BROSSA

Página 39
GTD-DM-04: Categorización de imágenes mentales sobre asíntotas de funciones usando Software matemático
Roxana SCORZO – Adriana FAVIERI

Página 45
GTD-MM-01: Integrales definidas: una secuencia didáctica con el uso de GeoGebra
Susana De TOMA – Mariana PÉREZ

Página 53
GTD-MM-02: Meteoritos y Matemática: explorando impactos
Juan Pablo SIMONETTI – Vanesa Paola VARGAS

Página 62
GTD-RP-01: Heurísticas emergentes en estudiantes universitarios al resolver un problema
Margarita BENÍTEZ – Roxana OPERUK

III SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

IIISEM-V

Índice de Artículos

Página 69
GTD-EE-01: Una propuesta para la enseñanza de Estadística Descriptiva en la formación de formadores
Verónica SAN ROMÁN – Beatriz MARRÓN – Sandra HERNÁNDEZ

Página 77
GTD-EE-02: Revisión bibliográfica sobre la enseñanza de la estadística descriptiva en el nivel secundario y superior
María Florencia MOSTTO – Verónica PARRA

Página 84
GTD-EE-03: Análisis del Ingreso Total Familiar relevado por EPH-INDEC. Modelización y Categorización mediante Distribuciones de Probabilidad Teóricas
Ariel H. REAL – Adriana Raquel ÍBERO

Página 92
GTD-EE-04: Imágenes de los profesores respecto a la Educación Estadística
Carolina CABRERA – Liliana TAUBER

PENSAMIENTO LATERAL Y STEAM: ELABORACIÓN DE PROBLEMAS PARA LA IMPLEMENTACIÓN DE RECURSOS TRIGONOMÉTRICOS EN EL ESTUDIO DE VECTORES

Walter ACOSTA[1], Sandra A. HERNÁNDEZ[1,2]
[1]Gabinete de Didáctica de la Química, Departamento de Química,
Universidad Nacional del Sur (UNS), Bahía Blanca, Argentina
[2]Instituto de Química del Sur (INQUISUR),
Universidad Nacional del Sur (UNS)-CONICET, Bahía Blanca, Argentina.
walter.acosta.williche@gmail.com, sandra.hernandez@uns.edu.ar

Resumen

Este trabajo fue diseñado para estudiantes de 4° año de una Escuela Técnica ante la problemática de no contar con las habilidades requeridas para trabajar de manera independiente identificando posibles modelizaciones de situaciones que se presenten en diferentes campos disciplinares y comprobar la importancia de la comunicación de la ciencia a través del lenguaje matemático. En particular, para lograr la interpretación y adquisición de los conceptos específicos pertinentes a la asignatura Física, el estudiantado debe poseer conocimientos matemáticos que les permitan aplicar de manera autónoma diversas estrategias en la resolución de problemas. Atendiendo a las capacidades que el estudiantado debiera desarrollar, se propone trabajar desde el enfoque STEAM, y apoyados en el pensamiento lateral, en la elaboración de problemas que permitan recuperar recursos trigonométricos que serán utilizados en el estudio de vectores. A través de la metodología y la actividad propuestas se logró salir del esquema de resolución tradicional de un problema en el cual predomina la memorización y el hacer mecanizado. El grupo clase fue capaz de plantear problemas contextualizados a su entorno y entender la importancia de conocer conceptos matemáticos de trigonometría. El rol de cada estudiante fue activo-participativo en todo momento Se lograron poner en práctica habilidades de orden superior, incorporar concepciones adquiridas y estimular la creatividad y el aprendizaje proactivo sugeridos desde el enfoque STEAM. Asimismo, el grupo clase pudo visualizar la importancia del pensamiento lateral para el cual lo transcendental no es la solución final de un problema, sino saber qué preguntas deben formularse.

Palabras clave: Pensamiento Lateral - Enfoque STEAM – Trigonometría - Problemas Situados.

Introducción

En su publicación acerca de las dificultades en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la disciplina Física, Elizondo Treviño (2013) señala que: “entre los problemas de enseñanza de la Física cobra importancia el deficiente desarrollo de las habilidades comunicativas propias de las matemáticas requeridas para la Física” (p. 72).
A través de los años, la experiencia docente nos ha permitido observar que, al diseñar actividades previas para identificar los conocimientos matemáticos requeridos para desarrollar los contenidos propios de la asignatura Física con estudiantes de 4° año modalidad Química de una Escuela Técnica, se ponen en evidencia dificultades tales como:

- la conflictiva identificación y significación de los datos relevantes de un problema;
- la imposibilidad de transcribir los datos del problema al lenguaje matemático;
- la traba en resolver un ejercicio por carecer de habilidades matemáticas;
- el inconveniente a la hora de transcribir los resultados matemáticos de una ejercitación al lenguaje de la Física.

Si bien en estos cuatro ítems se trata de resumir la problemática a atender, entendemos que, adicionalmente, la falta de contextualización de los conceptos abordados desde ambas disciplinas suele constituirse en un inconveniente al cual el estudiantado suele responder mecánicamente, utilizando su memoria a corto plazo, para responder a los requerimientos docentes y generando aprendizajes aislados.
Indudablemente, la ejercitación de la memoria es necesaria, sin embargo, coincidiendo con los dichos de la doctora Galagovsky (2004): “El aprendizaje aislado como proceso sólo favorece el entrenamiento en el uso de estrategias de memoria. El conocimiento aislado no actúa de anclaje o sostén para posteriores aprendizajes sustentables” (p. 234).
Otro aspecto interesante a considerar es el postulado por Rodríguez (2011) en cuyo artículo se refiere a la matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. La autora llama la atención en cuanto a que: “la relación matemática-ciencias muchas veces está ausente en la enseñanza, sus conocimientos se dan de manera aislada, sin mostrar su cultura y utilidad” (p. 35).
Este diagnóstico nos instó a abordar esta problemática y pensar metodologías de enseñanza que promuevan en el estudiantado la incorporación de conceptos sostén que pudieran ser necesarios para la interpretación y asimilación de nuevos conocimientos.
Imprevistamente, este escenario se complejizó aún más para las cohortes 2020 y 2021 quienes debieron hacer frente a una inusual forma de aprender dado el aislamiento social preventivo y obligatorio (ASPO) debido a la pandemia de COVID-19. Esta situación particular de enseñanza en estado remoto a través de clases sincrónicas y asincrónicas promovió la búsqueda de recursos más atractivos que permitieran mantener la atención y participación del alumnado.
Para ello, nos posicionamos desde el enfoque STEAM (acrónimo de la expresión en inglés: Science, Technology, Engineering, Art and Mathematics; en castellano CTIAM) con actividades que buscan “reforzar el aprendizaje invertido y la utilización de herramientas tanto digitales como materiales que ayudan a la comprensión, interpretación y aplicación de temas propios de las ciencias y las matemáticas” (Carreño, 2020, p.4).
Cilleruelo y Zubiaga (2014) expresan que:

> La integración de las Artes en la corriente STE(A)M nos sitúa ante un nuevo marco de aprendizaje, donde a partir de problemas deseados, de las ganas de saber, la curiosidad se convierte en motor y guía del conocimiento, un punto de partida para la exploración de diferentes soluciones en una búsqueda permanente de la satisfacción personal. Este modelo de educación provee una aproximación interdisciplinar integrada conectada con el mundo real, y dirigida a la resolución de problemas (PBL). El vínculo entre arte, ciencia y tecnología permite el diseño de conexiones curriculares hasta el momento consideradas incompatibles, estableciendo un conjunto de nuevas relaciones entre competencias y temas del currículum. (p. 2)

Esta metodología de enseñanza interdisciplinar sitúa al estudiantado en un rol activo y participativo posicionándolos como protagonistas de su aprendizaje. (Macancela-Coronel y col., 2020)
Pastor (2018) menciona la *interdisciplinariedad práctica* como aquella cuyo objetivo es que el estudiantado sea capaz de resolver un problema cotidiano a través de los conocimientos que ya ha obtenido a través de la experiencia.
Por su parte, Jordi Domènech-Casal (2018) cita a numerosos autores los cuales “proponen que el aprendizaje de los conceptos científicos debe producirse a partir de contextos auténticos para resultar en un dominio de los conceptos científicos suficiente para su transferencia a otros contextos” (p.30)

El enfoque STEAM anima a cada estudiante a utilizar habilidades de orden superior; les permite aplicar conocimientos adquiridos de otras materias, estimula la creatividad y la innovación entrena el pensamiento lógico matemático y favorece el aprendizaje proactivo.

De Bono (2007) plantea que: "La palabra "creatividad" tiene un significado muy amplio y muy vago. Incluye elementos de novedad, elementos de creación e incluso elementos de valor" (p. 99). El pensamiento lateral es un término acuñado por Edward Bono y se plantea como una técnica para resolver problemas y situaciones forma imaginativa y creativa. El pensamiento lateral insta a modificar la percepción para así generar ideas y soluciones diferentes a las preestablecidas.

A continuación, se plantea el marco curricular e institucional en el cual se llevó a cabo la propuesta implementada como así también los detalles de la misma.

Marco curricular e institucional

La asignatura Física se dicta para estudiantes de 4to año del ciclo de Formación Científico Tecnológica, de Educación Técnica Profesional para Técnicos Químicos, de acuerdo al Diseño Curricular de la Provincia de Buenos Aires, Argentina. Debido al aislamiento social, preventivo y obligatorio (ASPO) surgido de la pandemia de COVID-19, en 2020 la asignatura se llevó a cabo en encuentros sincrónicos a través de la plataforma Meet y en encuentros asincrónicos a través de la plataforma Classroom en el estudiantado tenía a disposición tanto el material de consulta como las indicaciones de los trabajos teórico-prácticos los cuales contenían fecha de entregas pautadas semanalmente.

La matrícula del curso estuvo compuesta por 27 estudiantes, de los cuales 19 se mantuvieron activos mientras que 8 realizaron la actividad en etapa compensatoria.

Para lograr la interpretación y adquisición de los conceptos específicos pertinentes a la Física de 4to año, el estudiantado debe poseer conocimientos matemáticos que les permitan aplicar de manera autónoma diversas estrategias en la resolución de problemas.

En esta instancia, el estudiantado debería de ser capaz de: establecer transferencias pertinentes de los conceptos a situaciones intra-matemáticas y/o extra-matemáticas de la especialidad; trabajar de manera autónoma identificando posibles modelizaciones de situaciones que se presenten en diferentes campos disciplinares y comprobar la importancia de la formalización como herramienta de comunicación en el ámbito de la Matemática.

Atendiendo a estas capacidades que el estudiantado debiera desarrollar, se propuso trabajar desde el enfoque STEAM, y apoyados en el pensamiento lateral, en la elaboración de problemas que permitan recuperar recursos trigonométricos que serán utilizados en el estudio de vectores.

Metodología

El docente a cargo del curso asumió el desafío de abordar conceptos de Matemática, necesarios para la asignatura Física, en su rol de formador de futuros profesionales cuyo sector de actividad socio productiva será la industria Química. Por tal motivo, la propuesta tiene un enfoque interdisciplinar STEAM e intenta romper con los esquemas basados en el pensamiento vertical, instando al estudiantado al ejercicio del pensamiento lateral.

La propuesta: Trigonometría, imaginación y manos a la obra.

La misma consiste en elaborar un problema donde puedan aplicar las identidades trigonométricas de un triángulo rectángulo, ya que esto es necesario para luego extrapolarlo a las componentes de un vector. Se les envía vía Classroom la consigna del trabajo con un ejemplo aclaratorio el cual se muestra a continuación.

La consigna:
En forma individual, tendrán que redactar un ejercicio que tenga como eje central conceptos de trigonometría y cálculos que involucren: relación trigonométrica (seno, coseno, tangente), hipotenusa, catetos y ángulos.

¿Qué es lo más desafiante de este trabajo? Tendrás que mirar a tu alrededor y descubrir en lo cotidiano cómo relacionar estos conceptos geométricos y vectoriales.

¿Cómo hacerlo?
vas a realizar un registro, es decir, a lo que elijas de lo que observes a tu alrededor, deberás sacarle una foto para adjuntarla a la actividad.
Tendrás que disponer de una cinta métrica o de un hilo y una regla para medir catetos o hipotenusas

Por ejemplo: encontré en mi bicicleta una relación trigonométrica interesante y decidí medir los catetos y dejar el ángulo de unión de las varas como incógnita (figura 1).

(a) *(b)* *(c)*

Figura 1. (a) Rueda de bicicleta apoyada en una base fija. (b) Relación trigonométrica encontrada. (c) Relación trigonométrica más compleja

Luego de haber medido el cateto opuesto (34 cm) y el cateto adyacente (17 cm) al ángulo que tengo como incógnita, debería pensar qué fórmula matemática podría utilizar para calcularlo.

$$tan\,\emptyset = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \qquad tan\,\emptyset = \frac{34\ cm}{17\ cm} \qquad tan\,\emptyset = 2$$

Luego, $\emptyset = arctan(2) = tan^{-1}(2) = 63º26´$

Ya solucionamos nuestra incógnita del ángulo ¿Podemos seguir complejizando el ejercicio?
Pues sí, ya habiendo obtenido varios datos podemos buscar otras incógnitas como muestra la imagen de la figura 1(c).
Precedemos a resolver, pudiendo usar seno o coseno, decidí hacerlo con:

$$sen\,\emptyset = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad hipotenusa = \frac{cateto\ opuesto}{sen\emptyset} \qquad hipotenusa = \frac{34\ cm}{sen\ (63º\ 26´)}$$

Luego, $hipotenusa = 38{,}01\ cm$

Cuando esta parte esté resuelta, podemos ir a lo más desafiante de esta actividad, REALIZAR UN TEXTO NARRATIVO PARA NUESTRO PROBLEMA.
¿Cómo narrar el problema?
La situación problema debe estar en un contexto, se puede contar la historia de ¿cómo lo pensaron? o ¿qué estaban haciendo?, o inventar un supuesto escenario. Debe contener los datos necesarios para la resolución, una imagen de referencia y la o las preguntas que se desean formular.

Para el ejemplo dado, el texto narrativo sería el siguiente:

"Al principio del aislamiento obligatorio una de los grandes problemas a los que me enfrenté fue no poder hacer deporte, por lo que encargué un caballete para mantener la rueda trasera de mi bicicleta fija y así poder hacer algo de ejercicio aeróbico mientras duraba la pandemia.
Luego de unos días de uso, empecé a escuchar un ruido extraño que provenía del caballete, y observé que se estaba desoldando la unión de dos caños. Decidí consultar con un amigo herrero quien me dijo que esa unión no debía superar los 60º ya que el peso y el movimiento debilitan la soldadura. Debido a que no tenía una herramienta para medir ángulos, decidí medir lados que formen un ángulo recto, y así aplicar las identidades trigonométricas que conozco. Con una cinta métrica medí, un lado 34 cm y otro de 17 cm como se observa en la imagen."

- *¿Cuál es el ángulo que forma la unión de los dos caños? ¿Esto es lo que provoca la rotura? ¿Por qué?*
- *Si tuviese que cambiar el caño más inclinado por otro más resistente para salvar posibles roturas, ¿Cuál sería su longitud? ¿Qué resultado sería en metros?*

Resultados de la actividad: los problemas planteados

A modo de ejemplo y dado el espacio asignado a la publicación, se muestran tres de los 19 trabajos entregados.

Problema elaborado por Brenda

"Aprovechando la cuarentena obligatoria en mi familia, decidimos comenzar con la ampliación de la casa, ya que mi papá es persona de riesgo y no puede trabajar.
Teniendo como base la platea, la idea es hacer abajo un comedor nuevo y arriba dos habitaciones y para este proyecto necesitamos realizar los planos en la PC.
Para esto debemos saber algunas medidas, y una que no pudimos medir fue la altura de la cabaña. Un dato importante porque la ampliación debe tener la misma altura. Realizamos las mediciones posibles como el largo de la platea dando 547,5cm, esta forma un ángulo de 90° con la pared de fondo (Figura 2 (a)). Atamos un hilo en la punta de la cabaña y ese lo pasamos por la mitad de la platea hasta el final de la misma, este hilo con la pared y la platea formaban un triángulo, la platea era el cateto adyacente, la pared el cateto opuesto y el hilo la hipotenusa (Figura 2(b)).
Para calcular el ángulo A realizamos un triángulo con medidas más chicas, quedando un cateto adyacente de 40 cm, el cateto opuesto de 43 cm y con la inclinación del ángulo igual al triangulo mayor".
Teniendo en cuenta lo leído:
¿El ángulo del triángulo más chico nos aporta algo para resolver la incógnita?, si/no ¿por qué?
¿Es posible calcular la altura de la cabaña? Proponga una solución matemática a esto.
¿Cuántos metros de hilo se necesitó para unir el extremo del techo y el extremo de la platea (Fig. 2)?

(a) *(b)*

Figura 2. Fotos presentadas por Brenda para la resolución de su problema. (a) Mediciones iniciales., (b)Datos de referencia e incógnita.

Problema elaborado por Axel

"A principios de esta pandemia, más o menos por abril del año pasado, con mi papá quisimos cambiar de lugar los muebles de mi habitación. Iba todo muy bien, pero se me ocurrió una idea: poner una estantería para colocar en ella libros, medallas, y recuerdos. Mi papá fue a comprar los soportes para la estantería y así empezar con este pequeño proyecto. Colocó los soportes y se puso la tabla, la cual esta se cayó.
Supusimos que era algún problema con los soportes, y en efecto, era un problema de los mismos. Fuimos con un amigo de mi papá que se especializa en este tipo de cosas, nos dijo que, para que la estantería quedara bien y no esté floja ni se caiga, el ángulo de soporte y la diagonal que une los extremos de las varas debía tener un ángulo de 45°, de lo contrario la tabla caería por la inclinación.
Las longitudes de los lados del soporte, se muestran en la siguiente imagen:

Figura 3. Foto presentada por Axel para la resolución de su problema.

¿Hallar la medida del ángulo que forma la diagonal y la barra que sostiene la tabla? ¿Se caerá la tabla?

<u>Problema elaborado por Matías</u>

Un practicante de taekwondo quiere mejorar su alcance en las patadas altas, realiza una medición de su cintura al suelo dándole 1m y estando a una distancia de 83 cm desde su cintura al objetivo de forma paralela al suelo, formando un ángulo de 45 grados al patear (Figura 3).
¿Calcular la altura que hay entre la línea de la cintura y el punto de impacto de forma paralela en cm.?
¿Calcular el alcance de la patada en cm?

Figura 4. Foto presentada por Matías para la resolución de su problema.

<u>Las voces del estudiantado</u>

Una vez finalizada la actividad, se propuso al grupo clase contestar, de manera individual, una encuesta de opinión la cual fue generada por el docente en un formulario de Google y distribuida en el Classroom del curso. La misma fue realizada como cuestionario "ad hoc" con preguntas abiertas y cerradas, cuyas respuestas se muestran a continuación.
El curso completo, compuesto por 27 estudiantes, respondió a la encuesta; 19 en tiempo y forma y 8 en etapa compensatoria.
Las y los encuestados, la mayoría con edades entre los 15 y 16 años (solo dos declararon tener 17 años) expusieron sus apreciaciones respecto a la tarea asignada.
Al consultarles acerca de qué había sido lo más complicado para ellos al momento de realizar la consigna, se les dio la oportunidad que eligieran más de una opción si lo creían necesario.

Figura 5. Gráfica indicativa de las dificultadas que tuvieron las y los estudiantes al realizar la consigna

Como puede verse en la figura 5, el 48% del estudiantado tuvo inconvenientes con la redacción del problema; el 41% en sacar los datos y hacer los cálculos; el 33% pensar el problema al revés; el 30% buscar la imagen con la cual trabajar y el 22% en editar la imagen.
Al consultarles acerca de si les había sido difícil encontrar la imagen de referencia para plantear el problema, el 52% declaró que "si", mientras que el 48% que "no".

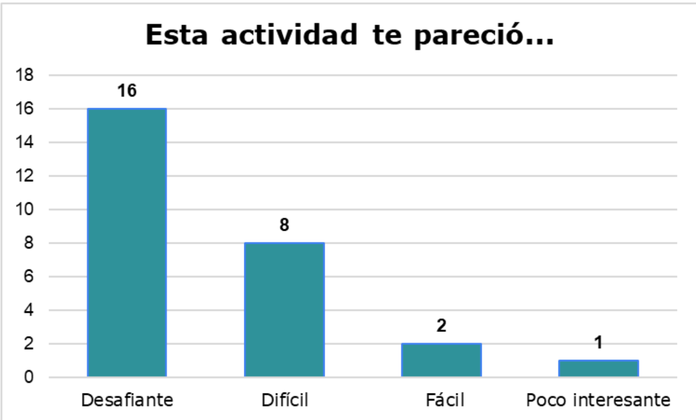


Figura 6. Gráfica indicativa de la opinión de las y los estudiantes respecto a la actividad realizada

Como puede verse en el gráfico de la figura 6, el 59% del estudiantado consideró la actividad como "desafiante", el 30% "difícil", el 7% "fácil" y solo un estudiante la consideró "poco interesante".
Se les consultó además si alguna vez habían aplicado conceptos matemáticos (trigonométricos) en tu vida cotidiana, a lo que sólo 4 estudiantes respondieron afirmativamente.
Al preguntarles si alguna vez habían redactado un problema en los años que llevaban de educación secundaria, el 63% indicó que "no" y el 37% que "si".
Por último, se les brindó un espacio de reflexión para que pudieran hacer algún comentario adicional en caso que desearan hacerlo. Solo dos estudiantes se obtuvieron de comentar; el resto aportó comentarios muy positivos tales como:

- ✓ *Fue una actividad muy distinta a lo que estaba acostumbrado, pensaba que no iba a poder hacerla, pero al final resultó ser fácil comparado a lo que pensaba.*
- ✓ *Me parece muy bueno el trabajo desde mi punto de vista y si le agarras la mano es fácil.*
- ✓ *Fue interesante hacer esta actividad, al principio no entendía tanto luego el profe nos explicó súper bien y lo pude hacer, estuvo bueno tener que pensar un poco nosotros y crear el problema.*
- ✓ *¡¡Que nos ayuda a hacer más creativos y precisos en la vida fuera de la escuela!!*
- ✓ *Fue interesante, al ser algo que no se hace casi nunca y estuvo bueno*
- ✓ *Me pareció muy buena actividad, ya que lo debíamos de hacer al revés, y hacer nuestro propio problema.*
- ✓ *El trabajo me pareció interesante porque me gusto que tuviéramos que usar cosas que no usaríamos para otro trabajo práctico, además me gusto que se pudiera hacer una historia para contar el problema.*
- ✓ *Este trabajo me ayudó a entender el concepto de trigonometría el cual al no entender del todo bien no podía realizar.*

- ✓ *Fue bastante desafiante por el hecho de encontrar algún objeto que encajase con la consigna, pero eso a la vez lo hizo entretenido*
- ✓ *Fue difícil en su momento, pero supongo que es como todo en la vida.*

Conclusiones finales

A través de la metodología y la actividad propuestas se logró salir del esquema de resolución tradicional de un problema en el cual predomina la memorización y el hacer mecanizado. El grupo clase fue capaz de plantear problemas contextualizados a su entorno y entender la importancia de conocer conceptos matemáticos de trigonometría. El rol de cada estudiante fue activo-participativo en todo momento consultando periódicamente al profesor sobre el avance de la tarea encomendada. Pudieron repasar y repensar los conocimientos trigonométricos necesarios para poder abordar en las próximas clases el tema: vectores.
Si bien, como muestran los resultados de las encuestas, en un comienzo mostraron dificultad en pensar a la inversa un problema, poniéndose como creadores, fomentando la capacidad de discernir y discriminar alguna variable-dato para confeccionar las preguntas, pudieron superarse a sí mismos y sortear las dificultades.
Se lograron poner en práctica habilidades de orden superior, incorporar concepciones adquiridas y estimular la creatividad y el aprendizaje proactivo sugeridos desde el enfoque STEAM. Asimismo, el grupo clase pudo visualizar la importancia del pensamiento lateral para el cual lo trascendental no es la solución final de un problema, sino saber qué preguntas deben formularse.

Agradecimientos

A la EEST N°1 “Crucero A.R.A General Belgrano” de Ingeniero White, especialmente a los estudiantes de 4°6° orientación Técnico Químico. A la Universidad Nacional del Sur (Argentina) el financiamiento del proyecto de grupo de investigación: 24/Q113 en el marco del cual se realizó este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Carreño, O.O. (2020). *Aprendizaje significativo de la física y las matemáticas mediante la contribución didáctica de las herramientas STEAM en la educación remota* (Documentos de trabajo Areandina 2020-2. Experiencias y prácticas pedagógicas de los docentes areandinos). Bogotá: Fundación Universitaria del Área Andina. DOI: 10.33132/26654644.1824

Cilleruelo, L., y Zubiaga, A. (2014). Una aproximación a la Educación STEAM. Prácticas educativas en la encrucijada arte, ciencia y tecnología. *Jornadas de Psicodidáctica*, 18.

De Bono E. (2007). El pensamiento creativo: el poder del pensamiento lateral para la creación de nuevas ideas. 1° reimpr. México. Editorial Paidós.

Elizondo Treviño, M. D. S. (2013). Dificultades en el proceso enseñanza aprendizaje de la Física. *Presencia universitaria, 3*(5), 70-77.

Galagovsky, L.R. (2004) Del aprendizaje significativo al aprendizaje sustentable. Parte 1: el modelo teórico. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(2), 229-240.

Jordi Domènech-Casal. (2018). Aprendizaje Basado en Proyectos en el marco STEM. Componentes didácticas para la Competencia Científica. *Ápice. Revista de Educación Científica, 2*(2), 2018 DOI: https://doi.org/10.17979/arec.2018.2.2.4524

Macancela-Coronel, G. F., García-Herrera, D. G., Erazo-Álvarez, C. A. y Erazo-Álvarez, J. C. (2020). Comprensión del aprendizaje interdisciplinar desde la educación STEM. *EPISTEME KOINONIA, 3*(1), 117-139.

Pastor, I. (2018). *Análisis de la metodología STEM a través de la percepción docente.* [Analysis of the STEM methodology through teacher perception]. Universidad de Valladolid. Recuperado de https://n9.cl/ktlx3

Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 35-49.

SECUENCIA DIDÁCTICA ENFRENTANDO PRECONCEPCIONES

Marisa REID, Rosana BOTTA GIODA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad Nacional de La Pampa, Argentina
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

En este trabajo se planifica una secuencia didáctica de actividades bajo la perspectiva del marco conceptual TPACK, como un modelo posible para gestionar y planificar las propuestas de integración de tecnologías en las aulas. Según este modelo, cuando diseñamos una propuesta de trabajo, es necesario tomar tres tipos de decisiones en este orden curriculares, pedagógicas y tecnológicas.

En relación a las concepciones alternativas Furió (2006), explica que no han de ser vistas como un impedimento al aprendizaje sino como un punto de partida necesario con el que se ha de contar para llegar a construir los nuevos conocimientos científicos. Es decir, las concepciones de los estudiantes son, sus hipótesis de partida que hay que tener en cuenta en la (re)construcción de los conocimientos científicos.

La propuesta se planifica para ser desarrollada en el espacio curricular Análisis Matemático I.A del primer año de las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, perteneciente a la Universidad Nacional de La Pampa. Esta asignatura cuenta con un aula virtual en el Campus Virtual de la FCEyN en la plataforma Moodle.

El objetivo de la secuencia es explicitar las preconcepciones que los estudiantes tienen en relación con las asíntotas de una función y que entran en conflicto con las ideas aceptadas actualmente por la comunidad científica.

Palabras clave: TPACK – Preconcepciones – Tecnología – Límite – Asíntotas.

Introducción

Los estudiantes que ingresan a la universidad tienen asimilados varios esquemas conceptuales en relación con las asíntotas*: "si hay asíntota horizontal, no hay oblicua"*, *"una asíntota horizontal, de una función que se aproxima a una recta, pero nunca la toca", "la función nunca puede cortar a la asíntota", "la asíntota y la gráfica de la función tienen un aspecto casi idéntico en el infinito"* o *"las ecuaciones de las asíntotas verticales con números enteros"*.
Así, en nuestras clases en muchas ocasiones nos encontramos con algunas concepciones erróneas de los estudiantes respecto de las asíntotas debido a las imágenes, intuiciones y experiencias previas. Este planteamiento tiene que ver con la concepción del concepto de límite y la creencia de los alumnos de que la función no puede rebasar el límite pues tiende a identificar la noción de límite con un proceso frente a un resultado, además de la idea de ir "acercándose a", asociada a "se acerca infinitamente pero nunca llegar a tocar", en lugar de un número al que se está aproximando. Estas observaciones concuerdan con la investigación desarrollada por Fernández Plaza (2015) quien afirma que para muchos alumnos el límite nunca se rebasa y nunca se llega a alcanzar. Varias investigaciones ponen de manifiesto las relaciones entre el concepto de asíntota, el de límite y el de función, enfatizando la falta de coordinación entre los valores de la variable y de la función, dificultad insalvable para muchos estudiantes.
Según Flores (2002), el término error enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los estudiantes y el conocimiento científico aceptado; las preconcepciones se caracterizan por las experiencias cotidianas y que se arraiga fuertemente en la mente de los estudiantes.
Las preconcepciones juegan un papel importante en la adquisición de conceptos matemáticos y son base indispensable para cualquier situación de enseñanza, ya que forman parte de las ideas previas. Por ello, dado que el factor que más influye en el aprendizaje es lo que el alumno ya sabe antes de pasar a los conceptos formales, no han de ser vistas como un impedimento al aprendizaje sino como un punto de partida necesario con el que se ha de contar para llegar a construir los nuevos conocimientos científicos. Su omisión puede originar una serie de dificultades y errores, dado que las preconcepciones se arraigan fuertemente en la mente de los estudiantes y son difíciles de cambiar.
De esta manera, con base en las ideas expuestas, consideramos como preconcepciones a las nociones que tiene el estudiante como resultado de sus experiencias, previamente al trabajo con la definición, propiedades y representaciones del concepto, en nuestro caso, el concepto de asíntotas.
Se propone que la superación de este tipo de concepciones alternativas en la enseñanza aprendizaje de las asíntotas puede favorecerse si se crean ambientes aprendizaje en el que se generen una rica gama de representaciones gráficas de distintos tipos de funciones que motiven su aparición y enfrentamiento.
En este trabajo se planifica una secuencia de actividades bajo la perspectiva del marco conceptual TPACK, como un modelo posible para gestionar y planificar las propuestas de integración de tecnologías en las aulas. Según este modelo, cuando diseñamos una propuesta de trabajo, es necesario tomar tres tipos de decisiones en este orden curriculares, pedagógicas y tecnológicas.
A continuación, se presenta un cuadro con los tipos de actividades de aprendizaje propuestas de acuerdo con los principios TPACK en la construcción del conocimiento:

Taxonomía del tipo de Actividades	Breve Descripción	Posibles tecnologías
Investigar un concepto	Los estudiantes exploran o investigan un concepto: asíntotas, usando Internet u otras fuentes de investigación.	Búsqueda en internet, bases de datos informativas (por ejemplo, Wikipedia).
Interpretar una representación **Interpretar una situación para construir un nuevo concepto** **Describir matemáticamente un objeto o concepto**	El estudiante explica las relaciones visibles en una imagen y también en una representación matemática (tabla, fórmula, diagrama, gráfico, ilustración, modelo, animación, etc.).	Software de geometría dinámica GeoGebra. También podrían haberse utilizado simulaciones en Desmos o Gizmos.
Plantear una conjetura	El estudiante plantea una conjetura, usando, por ejemplo, software dinámico para mostrar relaciones.	Software de geometría dinámica GeoGebra.
Rendir una prueba	Los estudiantes demuestran su conocimiento matemático dentro del contexto en un entorno	Rendir un cuestionario utilizando Quizizz. También se podría utilizar

	evaluativo, como, por ejemplo, con un software de evaluación asistido por computadora.	Mentimeter, Socrative, Kahhot.
Hacer cálculos **Estimar**	Los estudiantes utilizan distintas estrategias de estimación examinando relaciones con tecnologías de apoyo. Los estudiantes emplean estrategias basadas en computadora usando procesamiento numérico o simbólico.	Calculadora científica, calculadora gráfica, hoja de cálculo, GeoGebra.
Categorizar **Desarrollar un argumento**	Los estudiantes podrán registrar, organizar, mostrar y analizar los datos que hayan recopilado. El estudiante desarrolla un argumento matemático relacionado con las razones por las cuales él piensa que algo es verdad. La tecnología puede ayudar a formar y exhibir esos argumentos.	Hojas de cálculo de Google, procesador de texto.
Discutir y puesta en común **Producir texto o una representación colaborativa**	Los estudiantes discuten explicitan y discuten las conjeturas con otros estudiantes y el docente que guía el proceso. Los estudiantes elaboran una producción donde vuelcan los conceptos sobre asíntotas abordados en las actividades.	Foro en la plataforma Moodle. Videoconferencia a través de las plataformas Zoom o Google Meet. Herramientas en línea Genially o Canva para elaborar infografía o presentación. Herramientas de presentación de Google. Paddlet para diseñar un mural colaborativo.

La propuesta se planifica para ser desarrollada en el espacio curricular Análisis Matemático I.A del primer año de las carreras Profesorado y Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, perteneciente a la Universidad Nacional de La Pampa. Esta asignatura cuenta con un aula virtual en el Campus Virtual de la FCEyN en la plataforma Moodle. Desde el año 2020, el contexto de aislamiento por la pandemia de Covid-19 nos llevó a utilizar entornos y herramientas digitales como canal casi exclusivo de enseñanza y en relación con los estudiantes y las posibilidades de acceso para cursar las asignaturas en forma virtual, podemos mencionar que, aunque la pandemia trajo como consecuencia la visibilidad de las desigualdades en este sentido, desde la Institución se han realizado acciones necesarias para atenuar esas brechas y que los estudiantes cuenten con dispositivos y conexión a internet necesaria para cursar las asignaturas.

De la **Unidad 2** del programa analítico de la asignatura, se seleccionan los temas: Límites infinitos y en el infinito. Asíntotas.

El desarrollo del TPACK que proponen Harris y Hofer (2009) postula una forma de planificación basada en actividades. Conciben estas actividades ancladas en los diseños curriculares; a su vez, incorporan una selección sistemática y racional de las tecnologías y de las estrategias de enseñanza-aprendizaje. Así, los autores señalan que en la planificación intervienen cinco decisiones clave:

- la elección de los objetivos de aprendizaje;
- la toma de decisiones pedagógicas prácticas acerca de la experiencia de aprendizaje;
- la selección y secuenciación de tipos apropiados de actividades, que se combinen en función de la experiencia de aprendizaje prevista;
- la selección de las estrategias de evaluación que revelarán qué están aprendiendo los estudiantes y qué tan bien lo están haciendo;
- la selección de las herramientas y recursos más beneficiosos para que los estudiantes aprovechen la experiencia de aprendizaje prevista.

Es interesante señalar que este enfoque para la planificación de clases con TIC basado en tipos de actividades prioriza los procesos de aprendizaje disciplinares de los alumnos por sobre las tecnologías que pueden ayudarlos a alcanzar esos objetivos.
En este trabajo se describe la articulación de los conocimientos matemáticos, didácticos y tecnológicos, presentado una secuencia didáctica para enfrentar las preconcepciones y en donde prevalezca la claridad conceptual y relacional tanto como la intuición y la visualización, desde la utilización de conceptos, propiedades y procedimientos ya conocidos.
Esta propuesta del TPACK para planificar con TIC coincide también con los componentes de la programación que plantea Feldman (2010) en Madagán (2012):
"Una definición de intenciones de la unidad, el curso o la clase, tanto en términos de ***propósitos*** *como en término****s de objetivos****. Los propósitos definen lo que el profeso pretende de un curso. Los objetivos definen las intenciones en términos de lo que los alumnos obtendrán, sabrán o serán capaces de hacer [...]"*
Como **actividad inicial** se utiliza una estrategia que puede presentar mayor interés para los/as estudiantes. Sin partir de cuestiones sobre errores conceptuales sino a través del análisis de una imagen se llega a la explicitación, que consiste en la exposición por el alumnado de sus ideas; dando lugar a la reestructuración conceptual, donde han de modificarse las ideas de los estudiantes por medio de contraejemplos.
Identificar un error en una imagen suele ser más sencillo que en un texto y en ese sentido, tal como plantea Carrascosa (20026) "Estos análisis resultan atractivos para los/as estudiantes ya que la mayoría de las veces el error tiene que ver con imágenes y no podemos olvidar el importante papel que para ellos tiene la imagen. Por otra parte, identificar un error en la imagen de un texto supone un cambio de rol en el que los estudiantes pasan de ser evaluados/as a ser evaluadores, lo que hace que se esfuercen más en sus argumentaciones, a la vez que fomenta su autoestima y contribuye a desarrollar una actitud más positiva hacia la ciencia y su aprendizaje".
Para llevar adelante la actividad que aquí se propone, optamos por emplear un Foro de Pregunta y Respuesta. Este tipo de foro requiere que un/a estudiante conteste una vez antes de ver las respuestas de sus compañeros/as. Después de la respuesta inicial, los/as estudiantes pueden ver y responder a las respuestas de los/as demás. Esta característica permite una igualdad de oportunidades para el aporte inicial entre todos/a los/as estudiantes, fomentando además el pensamiento original e independiente.
Al comienzo de la **actividad 2**, luego de un proceso de investigación se realiza una puesta en común, con el objetivo discutir, generalizar y registrar a partir de interrogantes formulados por el profesor y respondidos por los estudiantes. El docente moderará la discusión para identificar y aclarar información y/o definiciones. Utilizará distintas estrategias para que los estudiantes participen activamente, incorporando preguntas que permitan también verificar la comprensión y alcanzar el objetivo propuesto con el rigor matemático apropiado.
En esta actividad se utiliza la HD GeoGebra, pues contribuye con el mejoramiento del proceso de aprendizaje, ofreciéndole al alumno un entorno para la exploración y la experimentación favoreciendo la comprensión y apropiación de los conceptos matemáticos de estudio a partir de la visualización gráfica. De este modo, los estudiantes pueden, con facilidad, estudiar numerosos ejemplos que, de ser realizados manualmente, constituirían una tarea tediosa de cálculos y gráficos.
También tiene por objetivo analizar si subyacen imágenes conceptuales erróneas como las siguientes: la no existencia de puntos de intersección entre la función y las asíntotas; y si en el conjunto imagen de la función siempre está excluido el valor de la asíntota horizontal. Además, se proponen situaciones para reconocer asíntotas, aunque no figuren punteadas o no cuenten con la expresión analítica de la función, se pretende poner en evidencia que los estudiantes consideren una asíntota oblicua a pesar de que existe un punto de intersección con la función. Se realizan exploraciones y preguntas por ejemplo acerca de la asíntota horizontal y el posible comportamiento de la función respecto a ella. Se plantean distintas actividades con el propósito, de "crear conflicto", proponiendo ejemplos que contradigan lo dicho previamente por el/la estudiante.
El objetivo de la **actividad 3** es que los estudiantes elaboren una producción donde expliciten y relacionen los conceptos de asíntotas y límites abordados en las actividades anteriores y cómo se relacionan, incorporando terminología propia de la matemática. A partir de las actividades abordadas se solicita la elaboración de una infografía ya que, como recurso educativo tecnológico, posibilita presentar información de manera visual.
En la actividad 4 se considera una forma de monitorear o evaluar el progreso de los estudiantes en relación con el objetivo de aprendizaje para el tema propuesto.
Cuando los estudiantes se autoevalúan, realizan esfuerzos para comprender conceptos y procesos matemáticos. Las tecnologías educativas pueden convertirse en aliados en esta tarea, apoyando a los estudiantes en el proceso de evaluación, ayudándolos a realizar comparaciones de conceptos, soluciones de pruebas o conjeturas, y/o integrar la retroalimentación de otras personas en las revisiones de su trabajo.

Para evaluar el aprendizaje se seleccionó la plataforma online llamada Quizizz, que es un sistema de gestión y creación de test o cuestionarios en línea que permite agregar elementos tiempo e imágenes con el propósito de motivar a los/las estudiantes en la realización de pruebas en la clase.

Secuencia didáctica

Título

Asíntotas de funciones

Propósitos generales

- Promover el uso de una herramienta digital como GeoGebra en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
- Promover el trabajo colaborativo, la discusión y el intercambio entre pares, la realización en conjunto de la propuesta, la autonomía de los alumnos y el rol del docente como orientador y facilitador del trabajo.
- Estimular la búsqueda y selección crítica de información proveniente de diferentes soportes, la evaluación y validación, el procesamiento, la jerarquización, la crítica y la interpretación.

Introducción a las actividades

En esta secuencia se trabajará el concepto de asíntota de una función. En las actividades los alumnos determinarán gráfica y analíticamente las asíntotas de diferentes funciones.

Objetivos de las actividades

Que los estudiantes:

Analicen y comprendan la noción de asíntotas horizontales, asíntotas verticales y asíntotas oblicuas.

Relacionen los conceptos de límites infinitos y en el infinito con las asíntotas de una función.

Interpreten la noción de asíntotas analítica y gráficamente.

Actividad 1

Los/as estudiantes reunidos en pequeños grupos analizarán la imagen que se propone.

El intercambio de ideas se realizará en un foro grupal, donde cada grupo tiene su espacio. En el aula virtual, verán que hay una conversación abierta por los tutores. Deben participar en ese espacio respondiendo en ese mensaje. Cada uno de ustedes debe dar su opinión e incluso pueden mostrar algún libro de texto, donde se hallen presentes graves errores conceptuales sobre este tema.

Al finalizar el debate se deberá realizar una síntesis que deberán publicar en el muro colaborativo en el siguiente enlace https://padlet.com/mareid66/we9u2zk4eqqpeesn o escanea con tu celular el código QR.

Actividad 2

1. Cuando trabajaron con límites infinitos, se han encontrado que las gráficas de las funciones se acercaban muchísimo a con rectas horizontales, verticales u oblicuas. A continuación, se les plantea el reto de

investigar la aproximación entre la gráfica de una función y una recta con una serie de enlaces de Internet.

Se los invita a visitar los siguientes links:

- Asíntotas, en Matemática
- Conexión entre límites y asíntotas
- Asíntota, en Wikipedia
- Asíntotas verticales, horizontes y oblicuas
- Asíntotas

2. Posteriormente se realiza una puesta en común, para indagar sobre los contenidos y para definir el grado de comprensión de la información abordada. Para ello deben responder:

a) ¿A qué se denomina asíntota de una función?

b) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que existan las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas de una función?

c) ¿Qué condiciones se deben cumplir para que existan las asíntotas horizontales, verticales y oblicuas en el caso particular de las funciones racionales?

3. Resolver estos ejercicios.

Actividad 3

En grupos de dos o tres estudiantes, elaboren una infografía con las conclusiones de la puesta en común utilizando una herramienta digital colaborativa.

Para diseñarla se pueden utilizar HD Genially y Canva, para lo que es necesario un proceso de transformación que implica análisis, selección y ordenamiento de la información a incorporar.

Actividad 4

Deberán contestar el siguiente cuestionario: https://quizizz.com/join?gc=31759525

Evaluación

La evaluación será procesual, durante el desarrollo de todas las actividades propuestas se recabará información sobre el progreso de los estudiantes respecto a los objetivos de aprendizaje, utilizando una rúbrica.

Se tendrá en cuenta los siguientes criterios:

Participación en las actividades, individuales y grupales, propuestas.

Incorporación y uso de la terminología asociada a la temática abordada.

Resolución de actividades mediadas por TIC.

A continuación, se muestra una posible rúbrica a utilizar, que será revisada a partir de los aportes, sugerencias de los estudiantes.

	Criterios	Deficiente	Mejorable	Excelente
Actividades individuales	Calidad de participación en el foro	Su participación en el foro del aula virtual ha sido poca, aleatoria y sin calidad	Ha participado en el foro, con un nivel aceptable	Su participación en los foros del aula virtual ha sido de calidad, propositivo y reflexivo
	Participación en las actividades.	Su participación fue escasa.	Su participación fue aceptable.	Su participación demostró una lectura y reflexión de los temas.
	Lenguaje específico y notación	Escaso uso o uso inadecuado del vocabulario y la notación correcta.	Escaso uso del vocabulario y la notación acorde al tema.	Uso adecuado y fluido del vocabulario y notación acorde al tema tratado.

Actividades grupales	Presentación	La presentación de los trabajos prácticos grupales ha sido confusa e incompleta	La presentación de los trabajos prácticos grupales han sido apropiados, aunque no se ha profundizado en todas las actividades	La presentación de los trabajos prácticos grupales ha sido muy apropiada, se ha profundizado en todas las actividades.
	Participación y responsabilidad en el trabajo.	Escasa participación de los miembros del grupo, no pudiendo elaborar la producción.	Participan todos los integrantes, pero en forma descoordinada, sin visión clara del conjunto.	Todos los integrantes del grupo participan en la distribución y elaboración de la producción.
	Resolución de actividades mediadas por TIC.	Tienen dificultades en la utilización de recursos y/o en la puesta en común.	Utilizan algunos recursos en la elaboración y participan en la puesta en común.	Para elaborar la producción utilizan distintos recursos y participan en la puesta en común.

Comentarios Finales

En este trabajo se planifica una secuencia didáctica de actividades bajo la perspectiva del marco conceptual TPACK, como un modelo posible para gestionar y planificar las propuestas de integración de tecnologías en las aulas.
Según este modelo, cuando diseñamos una propuesta de trabajo, es necesario tomar tres tipos de decisiones en este orden curriculares, pedagógicas y tecnológicas. El señalamiento del orden, se debe justamente a que, según Koehler y Mishra (2006), la tecnología debe integrarse a la propuesta en función de las necesidades curriculares y pedagógicas; nunca a la inversa. El desarrollo del TPACK que proponen Harris y Hofer (2009) postula una forma de planificación basada en actividades. Conciben estas actividades ancladas en los diseños curriculares; a su vez, incorporan una selección sistemática y racional de las tecnologías y de las estrategias de enseñanza-aprendizaje.
Se desarrollan estrategias de enseñanza de acuerdo con los principios TPACK en la construcción del conocimiento que posibiliten a los estudiantes trascender sus preconcepciones hacia un conocimiento aceptable.
Ubicados en una postura constructivista el error es considerado como una herramienta fundamental para la construcción del conocimiento, por tanto, su identificación, clasificación y manejo es de importancia.
Las investigaciones desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática permiten delinear algunas orientaciones para encarar el tratamiento de los errores, que son:

- Evitar emplear atajos en la enseñanza bajo el supuesto de que acelera los tiempos de aprendizaje.
- Dotar de sentido a los conceptos y procedimientos.
- Fomentar el análisis reflexivo de las técnicas.
- Involucrar al alumno en el análisis de los errores cometidos.
- Recopilar los errores que se detectan en torno a un objeto matemático y diseñar con ellos actividades en las cuales los alumnos deban detectarlos y corregirlos.
- Emplear variedad de situaciones y representaciones que enriquezcan el sentido del objeto matemático en estudio.
- Indagar en las causas que motivan los errores.
- Diseñar estrategias de corto, mediano y largo plazo.
- Dialogar con los alumnos para que comuniquen sus formas de pensar.
- Tener en cuenta que superar un error exige el mismo esfuerzo que el establecer un conocimiento.

La secuencia diseñada pretende ir en estos sentidos y se espera presentar resultados de la puesta en aula de la secuencia planificada en un futuro trabajo.

Referencias Bibliográficas

Carrascosa-Alís, J. (2006). El problema de las concepciones alternativas en la actualidad (parte III). Utilización didáctica de los errores conceptuales que aparecen en cómics, prensa, novelas y libros de texto. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 3(1), 77-88. https://www.redalyc.org/pdf/920/92030107.pdf

Fernandez Plaza, J. A. (2015). Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Furió, C. Solbes, J., y Carrascosa, C. (2006). Las ideas alternativas sobre conceptos científicos: tres décadas de investigación. Revista Alambique. 48, pp. 64-77.

Lestón, P. (2013). Ideas previas a la construcción del infinito en escenarios no escolares (Doctoral disertation). https://repositoriodigital.ipn.mx/bitstream/123456789/11569/1/leston_2008.pdf

Martínez Delgado, A. (1998). Ideas previas: experimentación acerca de ideas arraigadas e ideas inducidas sobre fracciones. Suma. https://redined.mecd.gob.es/xmlui/bitstream/handle/11162/13532/059-070.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Flores, C. D., Bello, G. A., & Millán, D. F. A. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Relime, 5(3), 225-250.http://www.redalyc.org/pdf/335/33505301.pdf

Bernal, F. C. (2012) Preconcepciones Matemáticas y Aprendizaje de Nuevos Conceptos-Edición Única. https://repositorio.tec.mx/handle/11285/571410

Magadán, C. (2012), "Clase 3: Las TIC en acción: para (re)inventar prácticas y estrategias", Enseñar y aprender con TIC, *Especialización docente de nivel superior en educación y TIC*, Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación.

Magadán, C. (2012), "Clase 4: El desafío de integrar actividades, proyectos y tareas con TIC", Enseñar y aprender con TIC, *Especialización docente de nivel superior en educación y TIC*, Buenos Aires, Ministerio de Educación de la Nación.

ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN PARA ESTUDIAR CUERPOS GEOMÉTRICOS EN EL NIVEL SECUNDARIO ARGENTINO: RESULTADOS DE UNA IMPLEMENTACIÓN

Andrea BERENGUEL RINALDI[1], Verónica PARRA[2]
[1]Instituto Don Bosco, Bahía Blanca, Argentina
[2]Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT), Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Tandil, Argentina
andreberenguel19@gmail.com, vparra@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

En este trabajo no se pretende abordar completamente el problema de la Geometría en el aula, pero sí proponer una manera diferente de estudiar aspectos geométricos en un aula real de la escuela secundara argentina. Se utiliza como marco teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD), específicamente al dispositivo didáctico denominado actividad de estudio e investigación (AEI). Se presentan los resultados de la implementación de una AEI diseñada para estudiar cuerpos geométricos en un curso de la escuela secundaria argentina (36 estudiantes entre 13 y 14 años). La AEI se origina con la pregunta Q_0: *¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, con un espesor despreciable, utilizando la menor cantidad de material posible y sabiendo que se vende por* cm^2*?* La implementación duró 21 clases de dos horas cada una. Esta propuesta permitió abordar los contenidos: cuerpos: prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas; unidades de longitud, superficie, volumen y capacidad; perímetro, área y volumen; números raciones, notación científica y ecuaciones de primer grado con una incógnita. Las conclusiones más relevantes refieren a la gran cantidad de preguntas derivadas generadas por los estudiantes, al compromiso asumido por el grupo de clase y a la funcionalidad del dispositivo AEI para recuperar un sentido al estudio escolar de cuerpos geométricos.

Palabras clave: Cuerpos Geométricos - Escuela Secundaria - Actividad de Estudio e Investigación Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, y de la Geometría en particular, está impregnada por una variedad de dificultades, obstáculos y fenómenos que han sido y son abordados por diferentes investigaciones (Gutiérrez, 2020; Flores-Compañ, Bellés Agut, Nebot Romero y Tintoré, 2019, Ciccioli y Sgreccia, 2017, Henríquez y Montoya, 2015, Corica y Marin, 2014; Martín, Fanaro y Parra, 2015; Farías, 2015, Araya y Alfaro, 2010, entre otros). Situándonos en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 2004, 2006, 2013, 2017, Gascón, 2003, 2004), estas dificultades se describen en términos de fenómenos didácticos. En este referente teórico se describe la forma "tradicional" de enseñar matemática como aquella donde el profesor explica, define, ejemplifica y los alumnos, copian y reproducen lo que el profesor ha presentado. De esta manera, el estudiante tiene poca, casi nula, intervención en su propia construcción del saber. Esta forma de enseñar y aprender Matemática en general, y Geometría en particular, se describe a partir de una analogía con la visita de obras expuestas en un museo y se denomina, en la TAD, el fenómeno de la monumentalización de saberes o visitas de obras. Los estudiantes son llevados a visitar las obras sin cuestionarlas ni involucrarse en su reconstrucción, incluso, ni tocarlas. El saber se presenta fraccionado con un valor en sí mismo, una obra que los estudiantes deben admirar y disfrutar, aunque no sepan casi nada sobre sus razones de ser, menos aún, sobre sus funcionalidades. En el caso de la Geometría, el problema reviste, en algunos sectores, mayor dificultad pues incluso ha desaparecido del estudio escolar, a pesar de su incorporación en los programas oficiales.
Como "contraparadigma" a esta enseñanza monumental, poco funcional, Chevallard (2004, 2005) propone la pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo (PICM), cuyo objetivo principal es formar ciudadanos que, ante una duda o un problema o una pregunta, empiecen un estudio e investigación con el objetivo de formular sub-preguntas y aportar respuestas, ya sea solos o con ayuda de otros. Dentro de esta pedagogía, se propone la incorporación del dispositivo didáctico actividades de estudio e investigación (AEI), que junto a la formulación de los recorridos de estudio e investigación (REI), se proponen como una posibilidad de promover enseñanzas funcionales en los distintos niveles educativos.

Marco teórico: actividades de estudio e investigación según la teoría antropológica de lo didáctico

En correspondencia con la premisa de investigar y cuestionar, y aludiendo al postulado clave de la TAD que afirma que el saber es el proceso y producto de un proceso de estudio emergente en la búsqueda de respuestas a preguntas, Chevallard (2006) describe que toda situación formulada a partir de una verdadera pregunta Q, se puede considerar como una situación de estudio e investigación. La pregunta Q debe ser considerada en sentido fuerte. Es decir, una pregunta que no pueda responderse simplemente con la búsqueda de información o con lo que ya "se sabe". Debe ser una pregunta con la capacidad de producir preguntas, de derivar otras sub-preguntas. Chevallard (2004, 2013) califica a estas preguntas como preguntas generatrices. Así, la pregunta generatriz Q debe ser tal, que tenga la capacidad de generar varias sub-preguntas, o preguntas derivadas Q_i, y que, a su vez la búsqueda de sus respuestas, dé lugar a numerosas preguntas particulares relacionadas a ella. El estudio de estas Q_i, debe producir la elaboración de una respuesta R_i, y esta respuesta no se puede limitar a una simple "información". La pregunta generatriz Q puede ser retomada en cualquier momento del proceso de estudio para prolongar la investigación o para recuperarla (Chevallard, 2005). Además, no solo actúa como eje articulador en todo el proceso, sino que junto con las Q_i son origen, motor y razón de ser de todo el proceso de estudio (Barquero, Bosch y Gascón, 2011). La búsqueda de respuestas R_i a estas preguntas Q_i, debería conducir a la construcción de un gran número de saberes, permitiendo recorrer el programa de estudio propuesto en un curso, o al menos, una buena parte de él.
Las AEI entonces dan lugar a procesos de estudio e investigación cuyo punto de partida son las preguntas. Chevallard (2013) propone que el abordaje de una AEI debe conducir al grupo de estudio a encontrar los elementos del saber deseado, o al menos, tener mayor probabilidad de encuentros con una organización matemática (OM) que se espera estudiar. En sus formulaciones iniciales, Chevallard (2004, 2005, 2006) propone la noción de AEI como un tipo de "modelo didáctico" útil para aportar "ayudas" al profesor y, en especial, para tratar de hacer frente al problema de la construcción no funcional de las organizaciones matemáticas escolares. De alguna forma, las AEI retomarían un concepto clave de la teoría de situaciones didácticas de Brousseau y a su propuesta de reconstrucción funcional de los saberes matemáticos a partir de "situaciones fundamentales", con la intención de encontrar y activar una "razón de ser" o un "sentido" de este saber dentro del proceso de estudio. Así, el diseño de una AEI se inicia a partir de una "situación del mundo", una cuestión problemática cuya resolución requiere la reconstrucción de la organización matemática (OM) local en cuestión, siendo el profesor el que propone dicha cuestión en el aula. Una vez que la situación ha sido

presentada a la comunidad de estudio, se inicia un proceso que puede describirse mediante los momentos o dimensiones de dicho proceso de estudio (Bosch y Gascón, 2010).
La cuestión generatriz de una AEI, aunque sea sugerida por el profesor es abordada por la comunidad de estudio. No es una cuestión que pueda resolverse llevando a cabo una tarea escolar previamente establecida y con una respuesta predeterminada. De hecho, las respuestas tentativas que vayan surgiendo serán consideradas y contrastadas por la propia comunidad de estudio, en lugar de delegar al profesor la responsabilidad absoluta de dicha evaluación. A lo largo del desarrollo de una AEI aparecerán otras dimensiones del proceso de estudio, por ejemplo, momentos donde será necesario llevarse a cabo un repertorio de "ejercicios" de manera sistemática. De esta forma se pondrá en marcha el momento del trabajo de la técnica, provocando el cuestionamiento al alcance de las diversas técnicas. La emergencia de "nuevas" técnicas (aunque sólo sean "nuevas" para la comunidad de estudio en cuestión) provocará nuevas necesidades tecnológico-teóricas que se materializarán en la "síntesis" que se lleva a cabo, prioritariamente, en el momento de la institucionalización, cuya gestión no debe recaer en exclusiva al profesor (Bosch y Gascón, 2010). En consecuencia, una integración de las AEI en el sistema de enseñanza requeriría un cambio, una nueva función en los topos (conjuntos de gestos didácticos a realizar) del profesor: la necesidad de conocer alguna funcionalidad o razón de ser de las OM curriculares. Además, las AEI necesitan, asimismo, un cambio en el lugar del alumno, ya que incorpora en sus topos la posibilidad de participar en la gestión de casi todos los momentos del proceso de estudio que, en la pedagogía monumentalista tradicional, se situaban bajo la responsabilidad exclusiva del profesor (Bosch y Gascón, 2010).
Si bien la noción de AEI, respecto a la noción de REI, es un dispositivo más limitado en términos de amplitud de trayectos, su implementación resulta viable en la medida en que se pretende alcanzar un punto intermedio en el intento de pasar de una pedagogía monumentalista a una pedagogía más funcional. Así, inmerso en el marco de la TAD y con el objetivo de introducir gestos de la PICM tales como la formulación de preguntas y búsqueda de respuestas, este trabajo presenta el diseño e implementación de una posible AEI para estudiar Cuerpos Geométricos con un grupo de estudiantes de segundo año del nivel secundario argentino. En Berenguel Rinaldi y Parra (2021) se describe detalladamente todo el proceso de estudio a partir de duplas preguntas-respuestas y se identifican las posibles OM encontradas y/o reencontradas durante este proceso. Por cuestiones de espacio, presentamos aquí, una síntesis de todas las preguntas derivadas y de los tipos de tareas que cada una de las preguntas derivadas permitieron encontrar o reencontrar en el aula.

Metodología de la investigación

La AEI fue diseñada e implementada durante el tercer trimestre en las clases usuales de Matemática de una escuela secundaria, del Instituto Don Bosco de la ciudad de Bahía Blanca (Argentina), específicamente durante dos meses hacia fin del año 2014, con un total de 21 clases de una hora reloj de duración cada una, distribuidas en cuatro clases semanales. La Institución es de gestión privada y la profesora a cargo del curso fue una de las autoras de este trabajo. El grupo estaba compuesto por 36 estudiantes (entre 13 y 14 años) y corresponde al segundo año del nivel secundario. Durante la implementación de la AEI, se organizaron, según su propia elección, en 8 grupos (rotulados con la letra G): 5 grupos de 5 estudiantes cada uno, 2 grupos de 4 estudiantes cada uno y 1 grupo de 3 estudiantes.
Las clases se desarrollaron en la Biblioteca de la Institución, que permitía físicamente trabajar en grupo y acceder con facilidad a los distintos recursos (tales como libros, conexión a Internet, diccionarios, enciclopedias, entre otros). Los alumnos utilizan, por resolución institucional, un libro de texto, en este caso Activados Matemática 2, Editorial Puerto de Palos del año 2013. Por esta razón, durante el desarrollo de la AEI se utilizaron y resolvieron actividades, seleccionadas por la profesora, referidas a las cuestiones formuladas durante la clase. La AEI parte de la pregunta: Q_0: *¿Cómo diseñar un envase de perfume de 125 ml, para utilizar la menor cantidad de material posible, con un espesor despreciable, sabiendo que se vende por cm²*? La idea inicial de esta pregunta se obtuvo a partir de algunos apuntes y vídeos referidos a optimización de funciones. Considerando los lineamientos del diseño curricular oficial para la provincia de Buenos Aires, la pregunta permitió abordar: cuerpos como prismas, pirámides, cilindros, conos, esferas; unidades de longitud, superficie, volumen y capacidad; perímetro, área y volumen; números raciones, notación científica y ecuaciones de primer grado con una incógnita.
Durante la implementación de la AEI se realizó la recolección de datos a partir de los siguientes registros:

- Las producciones de todos los estudiantes de todas y cada una de las clases: se retiraban al finalizar cada clase para poder escanearlos, y eran devueltos en el próximo encuentro.
- Notas de campo del tipo descriptivo: referidas a los acontecimientos experimentados mediante la escucha y la observación directa en el entorno que tuvieron por objetivo ser una herramienta de interpretación no interactiva que describió la AEI, con el objetivo de captar la imagen de la situación, las conversaciones y las reacciones observables lo más fielmente posible.

- Diario de clase de cada alumno: conformado por los protocolos personales de los estudiantes.
- Diario de investigación de los grupos: este registro fue realizado en un documento de Google, con el objetivo de poder explicitar la síntesis del trabajo diario, por parte de los estudiantes quienes se fueron organizando para su escritura, además los otros integrantes del grupo podían hacer aportes, comentar y completar si lo creían necesario. Al finalizar el desarrollo de la AEI, este diario fue entregado por los estudiantes de forma impresa.
- Diario del grupo del proyecto: se confeccionó un diario grupal, su escritura estuvo a cargo de un encargado de cada grupo rotativo, los alumnos podían ir completando si creían que estaba incompleto. Este registro permitió apuntar las síntesis de las puestas en común y las preguntas que quedaban para trabajar e investigar. Si en la clase se trabajó por grupos, se compartía en qué trabajó ese grupo en particular, y los otros grupos podían comentar qué habían producido.
- Planilla con la lista de los alumnos donde se registraron las asistencias/ausencias de los alumnos y las entregas de sus producciones.

Debido a que los estudiantes no estaban habituados a trabajar de esta manera, se acordó en redactar un “contrato de trabajo en aula” donde se explicitaron las pautas de trabajo y así poner en conocimiento a sus familiares y/o tutores.

Análisis de datos y resultados

Al proponer la pregunta Q_0, los estudiantes no sabían con qué nociones matemáticas podrían responderla. La profesora les indicó entonces que podían segmentarla anotando todas las nuevas preguntas que les surgían a partir de ella. Cada conjunto de preguntas de cada grupo se presentaría al finalizar cada clase para decidir, de forma colectiva, cuáles de ellas responder. Se generaron así una gran cantidad de preguntas y el correspondiente proceso de búsqueda de respuestas, que, por cuestiones de extensión del manuscrito, no podemos detallar aquí. Presentamos el análisis de todas ellas en términos de categorización en pertenencia a organizaciones matemáticas (OM) y detallamos sus respectivos tipos de tareas. Identificamos cuatro OM que detallamos a continuación.

1. OM en torno a las unidades de medida

Agrupamos en esta OM aquellas preguntas derivadas que referían a la noción de unidad de medida (de superficie, de volumen y de capacidad), a las unidades en sí mismas, al pasaje entre unidades de volumen y a la equivalencia entre ml y cm^3. Los tipos de tareas se detallan a continuación.

Preguntas derivadas de Q_0	Tipos de tareas
Q_1: ¿Qué significa espesor despreciable? ¿Qué función cumple? Q_2: ¿A cuántos ml equivale un cm^3? Q_{2-1}: ¿Los perfumes se venden en cm^2? Q_{2-2}: ¿Qué son cm^2, cm^3 y ml?	Explicar que son los cm^2 Explicar que son los cm^3 Explicar que son los ml Expresar una misma magnitud, en unidades de medida equivalentes. Expresar una unidad de medida de capacidad en una de volumen equivalente.
Q_{2-3}: ¿Que es una unidad de medida? ¿Para qué sirve?	Definir unidades de medida de superficie Definir unidades de medida de volumen Definir unidades de medida de capacidad. Expresar una medida de longitud en unidades equivalentes de la misma magnitud. Expresar una medida de superficie en unidades equivalentes de la misma magnitud. Expresar una medida de volumen en unidades equivalentes de la misma magnitud.

Por ejemplo, uno de los grupos (G6) registró cómo realizar el pasaje de una unidad de volumen a otra. Partieron de una información obtenida de un sitio web, que registraron como tal y que luego ejemplificaron basándose, según la nota de la parte superior izquierda de la figura 1, en el método utilizado para trabajar con unidades de longitud:

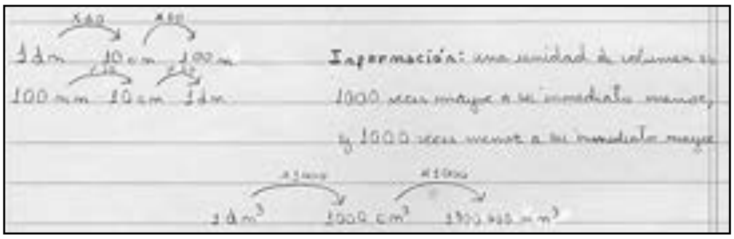


Figura 1. Ejemplo de pasaje de unidades de volumen realizada por G6.

2. OM relativa a la notación científica

En esta OM contemplamos las preguntas vinculadas a potencia de números racionales con exponentes enteros y a notación científica; aquí, se detallan los tipos de tareas que cada pregunta derivada permitió estudiar.

Preguntas derivadas de Q_0	Tipos de tareas
$Q_{2\text{-}3}$: ¿Que es una unidad de medida? ¿Para qué sirve? $Q_{2\text{-}3\,A}$: ¿Por qué $1{,}34 \times 10^{-6} = 0{,}00000134$?	Operar con números racionales.
$Q_{2\text{-}3\,B}$: ¿Por qué algunas calculadoras escriben los resultados con exponente negativo? $Q_{2\text{-}3\,C}$: ¿Qué es la notación científica? ¿Para qué sirve?	Leer y escribir un número en notación científica.

3. OM sobre cuerpos geométricos, capacidad y volumen

Se agruparon las preguntas sobre clasificación de cuerpos geométricos, elementos, capacidad de un cuerpo, área de figuras planas, volumen de cuerpos geométricos y equivalencia entre unidades (volumen y capacidad).

Preguntas derivadas de Q_0	Tipos de tareas
Q_3: ¿Cuáles son los cuerpos geométricos? ¿Cómo se clasifican?	Definir cuerpos geométricos Clasificar los cuerpos geométricos Describir y reconocer los cuerpos redondos Describir y reconocer los poliedros
Q_4: ¿Todos los cuerpos tienen capacidad? $Q_{4\text{-}1}$: ¿Cuáles cuerpos tienen capacidad, y cuáles no? $Q_{4\text{-}2}$: ¿Cuál es la capacidad de un cuerpo geométrico? ¿Cómo se calcula?	Comparar unidades de medida de volumen y unidades de medida de capacidad. Reconocer y clasificar los cuerpos geométricos. Calcular el volumen de cuerpos geométricos. Calcular la capacidad de un cuerpo geométrico. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras.
$Q_{3\text{-}1}$: ¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo geométrico?	Definir volumen. Calcular el volumen de cuerpos poliedros. Calcular el volumen de cuerpos redondos. Reconocer, identificar y trazar los elementos de cada uno de los distintos cuerpos.
$Q_{3\text{-}1\,A}$: ¿Cómo se calcula el volumen de un cuerpo si no se conoce su fórmula, o no tiene?	Calcular el volumen de cuerpos sólidos irregulares.
$Q_{3\text{-}2}$: ¿Alcanza para calcular el volumen de un cono, saber solo los valores de la generatriz y de la altura?	Reconocer la relación pitagórica en los triángulos rectángulos Reconocer la relación pitagórica entre los elementos del cono: generatriz, altura y radio. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras.
$Q_{3\text{-}2\,A}$: ¿Cómo se relacionan los valores de los distintos elementos de las pirámides y el cono?	Reconocer la relación pitagórica entre los elementos de la pirámide: altura del cuerpo, apotema de la base y apotema o altura lateral. Reconocer la relación pitagórica entre los elementos de la pirámide: altura del cuerpo, radio de la base y arista lateral. Calcular un elemento del triángulo rectángulo conociendo los otros dos, a través del teorema de Pitágoras. Construcción de cuerpos (pirámide y cono) en 3D, trazando de sus elementos.

Por ejemplo, un integrante de G6, registró el trazado de los elementos de la pirámide en un dibujo del cuerpo de la pirámide en 3D (figura 2). Al armar el cuerpo, la altura se indicó con un palillo pequeño, quedando formados dos triángulos rectángulos: el que se forma con la altura del cuerpo, la apotema lateral y la apotema de la base (encontrado con anterioridad al responder la pregunta Q3-2 A) y el que se forma con la altura del cuerpo, con el radio de la base y la arista lateral. El mismo integrante de G6 decidió registrar (figura 3) los dos triángulos rectángulos que se forman con la altura del cuerpo. Nombró los elementos que lo componen y los dibujó unidos por la altura, elemento que forma parte de ambos triángulos.

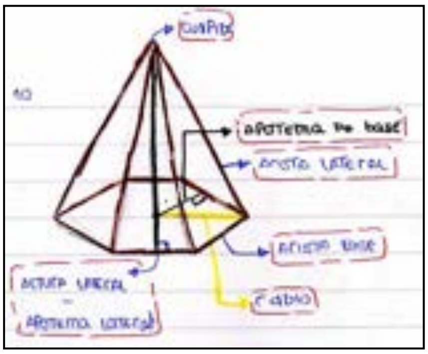


Figura 2. Figura de análisis de G6, elementos de una pirámide.

Figura 3. Registro de G6 de los triángulos rectángulos que se forman en una pirámide con la altura del cuerpo.

4. OM vinculada a cuerpos geométricos y área lateral

Finalmente, en esta última OM, se agruparon las preguntas relativas al desarrollo del cilindro y cuerpo en 3D.

Preguntas derivadas de Q_0	Tipos de tareas
Q_5: ¿Qué es el desarrollo de un cuerpo?	Dibujar el desarrollo de un prisma
$Q_{5\text{-}1}$: ¿Qué calculamos al encontrar el área de un cuerpo?	Reconocer un cuerpo dado su desarrollo. Calcular en área lateral, área de la/las bases y total de cuerpos geométricos. Calcular el volumen de cuerpos geométricos. Diseño y construcción de un cilindro. Planteo y resolución de ecuaciones. Resolver problemas. Calcular un elemento del trianguló rectángulo, conociendo los otros dos, planteando el teorema de Pitágoras.
Q_6: Dos cuerpos que tienen la misma área lateral ¿tienen la misma área total?	Diseñar el desarrollo de un cuerpo dado. Calcular en área lateral, área de la/las bases y total de cuerpos geométricos. Planteo y resolución de ecuaciones.
$Q_{6\text{-}1}$: Dos cuerpos que tienen la misma área, ¿tienen la misma capacidad?	Diseño del prisma de base rectangular Diseño del cubo Comparar cantidad de capacidades.
Q_7: ¿Cuál es el cuerpo que con el mismo volumen 125 cm^3, tiene menor área, el cilindro o el prisma?	Expresar una unidad de medida de capacidad en su equivalente de volumen. Reconocer en la dependencia del área y volumen de la esfera, de su radio Diseño del prisma de base rectangular Diseño del cilindro Planteo de ecuaciones

Así, y a partir de todo el estudio e investigación desarrollado, los estudiantes pudieron aportar una respuesta a Q_0. En las figuras 4 y 5 se presenta el trabajo y los cálculos que realizó el G4 y G7, respectivamente, para diseñar el envase del perfume con forma cúbica. G4 concluyó que el cubo debe tener 5 cm de arista y que la cantidad de material a utilizar es de 150 cm^2: "Sabiendo la capacidad, tenemos el volumen que es 125 cm^3 y calculando el área tenemos la cantidad de material que utilizaremos". El G3 optó por un envase esférico. Por ello, calculó el valor del radio de la esfera de 125 ml de capacidad. Para asegurarse que tenga 125 ml de perfume y un poco de aire (como los perfumes envasados), tomaron un r=3,2 cm. Este grupo decidió comprobar el volumen de su envase, que es de 137,24 cm^3. El G6 decidió realizar una semiesfera. Igualando la fórmula de volumen de la esfera a 250 cm^3, encontraron el radio de su envase. El radio encontrado corresponde a una esfera de 250 cm^3, pero desean trabajar con una semiesfera. Por ello muestra que, como una semiesfera es la mitad de una esfera, el volumen de una semiesfera es la mitad del volumen de la esfera, en consecuencia, el radio encontrado corresponde a una semiesfera de 125 cm^3. El G7, luego de la comparación entre el prisma y el cilindro, realizado para responder a la pregunta Q_7, escogió el cilindro. Además, realizó el cálculo de una posible caja para el perfume.

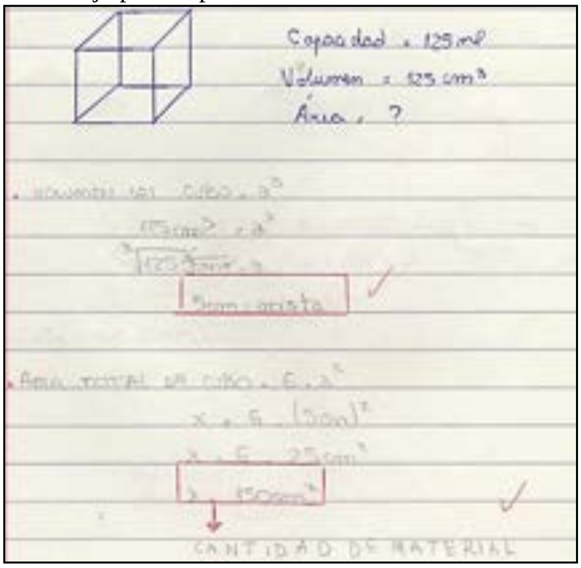


Figura 4. Respuesta del G4 de la pregunta Q_0.

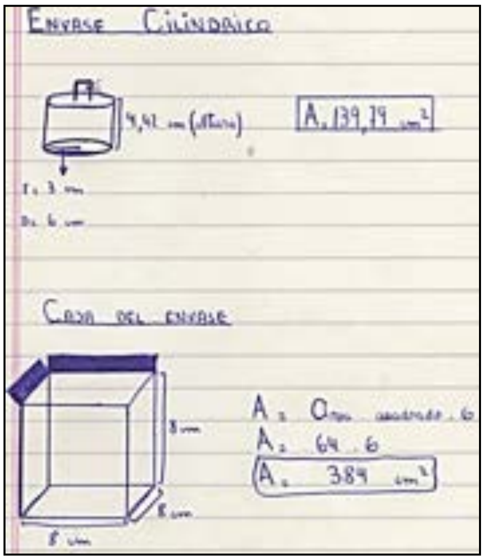


Figura 5. Respuesta de G7 a Q_0.

Consideraciones finales

Concluimos que la implementación de la AEI permitió:

- Generar un estudio de cuerpos geométricos de una forma funcional, a partir de duplas de preguntas y respuestas, preguntas generadas por los propios estudiantes y no impuestas por el profesor. Si bien Q_0 fue aportada por el docente (una condición clave que resulta necesaria para evaluar la generatividad de la misma), las preguntas derivadas fueron formuladas en su totalidad por los grupos de estudiantes, ocupando así un lugar central en la construcción de su propio saber.
- Generar y sostener un trabajo colaborativo, donde cada grupo discutió y consensuó resultados y caminos a seguir. Se plantearon debates al interior de cada grupo que les permitió justificar sus ideas y buscar puntos de acuerdo con sus pares y, además, debates con la clase en general en los momentos de difusión de respuestas, de puestas en común, donde se logró un clima de escucha y de respeto. Estas discusiones favorecieron el uso de vocabulario específico por parte de los estudiantes en particular y cierta evolución en la expresión oral en general.
- Estudiar "temas" pertenecientes a ejes distintos del diseño oficial. En general, en una "enseñanza tradicional" suele ocurrir un estudio lineal, es decir, se estudia un eje, por ejemplo "números", hasta agotar lo que se propone a estudiar en el programa y luego, una vez finalizado este estudio y una vez acreditado, se prosigue al eje siguiente. En este caso, el proceso de estudio no siguió un orden "lineal". Se lograron abordar cuestiones de diferentes ejes (geometría y magnitudes; números y operaciones e introducción al álgebra y al estudio de funciones).
- Y finalmente, la AEI permitió que la Geometría esté presente y de forma sostenida en un aula de matemática, aspecto que no es habitual en la enseñanza escolar, al menos, en Argentina.

En síntesis, le implementación de la AEI logró desarrollar algunos gestos que son claves en la PICM: estudiar cuerpos geométricos de una manera funcional, con sentido, con una razón de ser, a partir de respuestas a preguntas que formula la comunidad de estudio; estudiar determinados saberes en función de la necesidad de aportar respuestas y no solamente porque se encuentran detalladas en un programa de estudios; trabajar en grupos de forma colectiva arribando siempre a un consenso respecto, por ejemplo, a las conclusiones, síntesis y preguntas a explorar; e implicar de forma activa a los estudiantes en la construcción de su propio saber. Estos aspectos, tal como se han mencionado previamente, son algunos de los gestos claves que propone Chevallard (2017) dentro de una PICM.

Referencias Bibliográficas

Araya, R. G. y Alfaro, E. B. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, *14*(2), 125-142.

Barquero, B., Bosch, M. y Gascón, J. (2011). Ecología de la modelización matemática: los recorridos de estudio e investigación. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 553-577). Centre de Recerca Matemàtica.

Berenguel Rinaldi, A. y Parra, V. (2021). Enseñanza de cuerpos geométricos en el nivel secundario argentino: implementación de una actividad de estudio e investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *109*, 7-31.

Bosch, M. y Gascón, J. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas: de los "talleres de prácticas matemáticas" a los "recorridos de estudio e investigación". En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade, G. et C. Ladage (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). IUFM de l'académie de Montpellier.

Chevallard, Y (2001) Aspectos problemáticos de la formación docente. *XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2006). Les mathématiques à l´école et la révolution épistémologique à venir. http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela*. Libros El Zorzal.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *20*(1), 159-169.

Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (2017). Formación en geometría analítica para futuros profesores. Estudio de caso basado en el MKT. *Educación Matemática*, *29*(1), 141-170. https://doi.org/10.24844/EM2901.06

Diseño Curricular para la Educación Secundaria 2 año (SB). (2008). *Dirección General de Cultura y Educación. Gobierno de la Provincia de Buenos Aires. Matemática*. http://abc.gov.ar/lainstitucion/organismos/consejogeneral/disenioscurriculares/documentosdescarga/secundaria2.pdf

Farías, P. R. (2015). *Diseño e implementación de una actividad de estudio e investigación a partir de la pregunta: ¿Cómo se puede medir un fractal?* [Tesis de grado, Universidad Nacional de Centro de la Provincia de Buenos Aires]. https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/handle/123456789/570

Flores-Compañ, M-J., Bellés Agut, D., Nebot Romero, V. y Tintoré, D. R. (2019). Nuevas tecnologías y aprendizaje basado en proyectos aplicado a la Geometría. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *101*, 179-191.

Gascón, J. (2003). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria (I). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *44*, 25-34.

Gascón, J. (2004). Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria (II). *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, *45*, 41-52.

Gutiérrez, A. J. (2020). GeoGebra: herramienta didáctica para fortalecer competencias geométricas en Educación Media. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *105*, 165-188.

Henríquez, C., y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Enseñanza de las Ciencias*, *33*(2), 51-70.

Martín, N., Parra, V., y Fanaro, M. (2019). Enseñanza de fractales a partir de preguntas: descripción de una experiencia en un curso de matemática del último año de la escuela secundaria. *Épsilon - Revista de Educación Matemática*, *102*, 25-34.

LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS EN CURSOS DE MATEMÁTICA DE PRIMER AÑO DEL NIVEL SUPERIOR: USO, EVIDENCIAS Y PRIMEROS ANÁLISIS

Gustavo CARNELLI, Vilma COLOMBANO
Universidad Nacional de General Sarmiento
gcarnelli@campus.ungs.edu.ar, vcolomba@campus.ungs.edu.ar

Resumen

La inclusión de recursos tecnológicos en las clases de Matemática se generalizó producto del paso forzado a la virtualidad por la pandemia del COVID-19 en los ciclos lectivos 2020 y 2021. Bajo este contexto y centrados en la enseñanza de asignaturas de matemática del primer año del profesorado de Matemática de una institución de nivel terciario no universitario de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, nos interesó analizar la implementación de algunos recursos tecnológicos que seleccionamos intencionalmente. Tomamos como punto de partida un conjunto de categorías por acerca del uso de los recursos tecnológicos en la clase de Matemática. Este autor sistematiza y clasifica los usos de TIC, enfocados al empleo que el docente hace de ellos para que el estudiante aprenda matemática. La experiencia se llevó a cabo en dos cursos, uno de Álgebra I y otro de Análisis Matemático I. En función del grupo de trabajo y el nivel educativo al que pertenecen, seleccionamos algunos recursos tecnológicos que consideramos pertinentes, justificamos su uso, describimos cómo fueron implementados y exhibimos algunas intervenciones de estudiantes que ponen de manifiesto sus potencialidades o limitaciones. Como producto del análisis, observamos y describimos algunas potencialidades y algunas desventajas del uso de cada uno de estos recursos según el uso que se pretendía de ellos.

Palabras clave: Recursos tecnológicos – Enseñanza – Aprendizaje – Virtualidad – Matemática – TIC.

Recursos tecnológicos en la clase de matemática

La inclusión de recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática es un asunto de interés tanto para la docencia como para la investigación en educación matemática. Entre los numerosos trabajos que abordan esta temática, podemos mencionar a Gamboa Araya (2007) que analiza situaciones en las que los recursos tecnológicos permiten obtener conclusiones que se dificultan usando solo lápiz y papel; también a Villarreal Farah (2010), que en su tesis doctoral analiza la actividad de docentes y estudiantes al trabajar con TIC en la resolución de problemas abiertos; por último, a Pizarro (2009), que en su tesis de maestría propone un nuevo software educativo para resolver problemas de cálculo numérico y analiza su aplicación en cursos de esa asignatura. En particular, nos interesa mencionar a Bravo (2016) que ha estudiado el uso de recursos tecnológicos para el aprendizaje de la matemática y propone organizarlos sin tener en cuenta el uso que se hace desde la enseñanza sino el que le dan los estudiantes. En este sentido, agrupa a los recursos en tres dimensiones: tipos de dispositivos personales y aplicaciones para ellos; tecnologías que se usaban en las clases y persisten en la actualidad y una última referida a lo relativo al uso de la web.

Entre los dispositivos personales y aplicaciones está la calculadora científica, el teléfono celular, la computadora, etc. Pueden ser usados, por ejemplo, para hacer operaciones simbólicas, graficar y hacer construcciones geométricas.

Dentro de las tecnologías anteriores tenemos, entre otras, los libros y manuales de matemática, los útiles de geometría, los grabadores. En estos casos, el uso se da para realizar construcciones geométricas, buscar información, etc.

En lo referido a la web, se consideran recursos tecnológicos usados en la comunicación y en sitios de contenido matemático. Para la comunicación tenemos los blogs personales, las redes sociales, el correo electrónico y su uso se centra para llevar a cabo un trabajo colaborativo, para compartir materiales, etc.

En cuanto a sitios de contenido matemático tenemos los juegos colaborativos, los videos, entre otros. Su uso es para buscar información, realizar ejercitación, aprender contenidos, etc.

A su vez, Bravo (2016) considera que el uso que se hace de las TIC presentado anteriormente puede agruparse en distintas categorías:

- para producir matemática (hacer operaciones simbólicas, graficar, visualizar, hacer construcciones geométricas, documentar (clases, resoluciones, etc.), practicar y recibir retroalimentación, producir materiales).
- para recibir información matemática (buscar información, aprender contenidos, leer materiales).
- para comunicar información matemática (exponer trabajos con soporte, producir escritos con nomenclatura matemática, organizar la información).
- para favorecer la comunicación (trabajar colaborativamente a distancia en espacios virtuales; comunicarse con otros; compartir materiales, hacer preguntas, compartir respuestas o propuestas; usar aulas virtuales). Esta última categoría resulta transversal a las anteriores, ya que hace referencia a la comunicación en la clase, involucrando tanto docentes como alumnos.

Descripción de la experiencia

Implementamos y analizamos el uso de ciertos recursos tecnológicos en un curso de Análisis Matemático I y otro de Álgebra I del primer año del profesorado de Matemática del Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, una tradicional institución, del ámbito terciario, formadora de docentes. La experiencia se llevó a cabo durante la cursada 2021, dictada casi íntegramente en la virtualidad; solo hacia el final del año, se retomaron algunas actividades presenciales en forma aislada.

Los principales recursos tecnológicos que utilizamos fueron: un servicio de mensajería gratuito, un aula virtual y videoconferencias. Para mensajería creamos un canal y un grupo de Telegram, como aula virtual diseñamos una en Google Classroom y para las videoconferencias usamos Zoom o Meet, indistintamente. A esto se sumaron recursos más clásicos como la calculadora científica, ya integrados a las clases desde hace tiempo y el uso de software específico de matemática como GeoGebra. Por último, también se utilizó material digitalizado, entre los que podemos nombrar documentos de texto con teoría explicada y práctica para realizar, documentos de texto disponibles en la web con explicaciones acerca de distintos temas. A continuación, describimos cómo y para qué fueron usados cada uno de ellos. Por razones de extensión, no desarrollaremos el uso de la calculadora científica y de los materiales digitalizados.

Detalle del uso de los recursos utilizados

Tipos de recursos seleccionados

1. Servicio de mensajería instantánea: canal y grupo de Telegram

Se creó un canal en Telegram, con un grupo asociado. Al momento de su uso (las funcionalidades varían con cierta frecuencia), cada vez que el propietario del canal (docente) realizaba una intervención, las personas suscriptas (estudiantes) podían responder a ella. En el canal, cada intervención original y sus respuestas quedaban anidadas (ver la captura de pantalla del canal de la Figura 1).
Los suscriptores no podían realizar intervenciones sino solo responder a las intervenciones originales. Al responder, se generaba una conversación que quedaba localizada en el grupo asociado y podía verse ahí completa e independizada del canal. Hubo un inconveniente en el uso del canal y de su grupo asociado que no logró resolverse. Al responder a una de las intervenciones originales, aparecía un cartel de “unirse al chat”. Si se cliqueaba en la opción, el resto de las personas que no se había unido, no veía esa respuesta en el canal; solo la veían los que se unían. El docente sugirió que respondieran sin tomar la opción de “unirse al chat”. Sin embargo, hubo quienes no atendieron a esta indicación. El docente intentó resolver ese problema eliminando de esa conversación a quienes se habían unido (los veía como integrantes de ese mini-grupo) pero esto generó otro inconveniente: esas personas también quedaron eliminadas del canal y, además, los primeros intentos por volver a incorporarlas no funcionaron. Esto logró resolverse luego de agregarse mutuamente como contacto.

2. Aula virtual: clase de Google Classroom

Para la presentación y organización de las clases, el pasaje de los materiales y la entrega de tareas se usó una clase de Google Classroom (GC). Se dudó entre el uso de un aula en el campus virtual del Instituto y el GC. Debido a que la comunicación circularía principalmente por Telegram, se prefirió el GC debido a que es más simple y de acceso más directo.
Estas aulas virtuales son básicas y simples. Las clases se organizaron en forma semanal, presentándolas con los materiales necesarios y una descripción de lo que se esperaba realizar. En la captura de la Figura 2 puede verse un ejemplo.

Figura 1

Figura 2

3. Videoconferencias: Zoom o Meet

La propuesta didáctica en ambos cursos tuvo modalidad casi enteramente asincrónica. El recurso de las videoconferencias fue utilizado con dos intenciones: una, grabar explicaciones teórico – prácticas de algunos asuntos en videos y, otra, para realizar algunos encuentros sincrónicos de intercambio con el grupo de estudiantes.

Uso de los recursos utilizados: ejemplos de su aplicación

A partir de las categorías establecidas por Bravo (2016), que detallamos más arriba, organizamos el uso de recursos tecnológicos en nuestra experiencia, en los siguientes aspectos: para comunicación de docente a estudiantes y de estudiantes a docentes, para pasar información matemática de docentes a estudiantes y de estudiantes a docentes y para producir información matemática.

1. Para comunicación de docente a estudiantes

(a) Telegram

En el canal se creó una intervención denominada "Consultas generales de cosas no vinculadas con los ejercicios". Algunos ejemplos textuales de intervenciones son los siguientes:

Docente: Devolví todos los trabajos por audio a cada uno por mensaje privado. Hay un par de personas que no reconocí en el grupo. Me escriben por privado para pedirlo.
G: Hola profesor. Disculpas, pero no sé cómo enviar un mensaje privado. No recibí la devolución, soy AA. Gracias. Hice el tp con BB.
Docente: Sí, es que no te reconocí. En un rato te lo mando.

Docente: (adjunta una foto con un listado con nombres de estudiantes)
*Nos pasaron esta lista de estudiantes de la comisión B que deben el título. No pueden promocionar materias ni rendir finales hasta que resuelvan la situación. Se sugiere escribir a la secretaría a **.*

(b) Google Classroom

El tablón del GC fue utilizado para pasar información al grupo de estudiantes, solo en el caso de que lo que se informara fuera de carácter institucional o más importante (algunas se replicaron en el canal de Telegram).

¡Hola!
*- Recuerden que el **miércoles 3/11, de 8 a 10.30 horas**, en el aula de clase haremos la evaluación programada cuyos temas serán Relaciones y Números enteros. Se propondrán ejercicios del estilo y nivel de dificultad de los trabajados.*
*- El **miércoles 10/11, en el mismo horario**, tendremos una clase de cierre, con las indicaciones para el examen final y los recuperatorios, más consultas. No es obligatorio asistir.*
*- El **miércoles 17/11, a las 8 horas**, serán los recuperatorios. En esa instancia se podrá recuperar todo lo que haya pendiente (la evaluación presencial si no se aprueba y los dos TP)*
- Para poder rendir recuperatorio integrador en febrero es necesario estar activo en la cursada (al menos haber rendido estas instancias presenciales). Cualquier consulta específica, la pasan por privado en Telegram
- Todos los encuentros serán el aula 200.
Saludos

¡Hola! Las elecciones departamentales se llevan a cabo martes 26, miércoles 27 y jueves 28 de 9 a 11 horas y de 17 a 19 horas. Son obligatorias. El no voto impide presentarse al primer llamado de las mesas de diciembre. En el blog del departamento tienen publicados flyers de cada agrupación.
Estudiantes votan DOS cosas: dirección de carrera y representantes estudiantiles en junta

2. Para comunicación de estudiantes a docentes

(a) Telegram

En la intervención "Consultas generales de cosas no vinculadas con los ejercicios", ya mencionada como parte del canal, se formularon consultas. Algunos ejemplos textuales:

T: Profesor!! Una consulta, cuándo vamos a tener clase sincrónica
Docente: respondí en un audio a esa consulta. El dictado de la materia es en modalidad asincrónica, salvo algunos momentos que les avisaré.
T: Gracias profe!!

A: Buen día profe, quería informarle que hoy no me podré conectar porque tuve un corte de luz el día de ayer y hasta el momento no volvió. En caso de que vuelva durante la clase, me conectaré.

L: Profe una pregunta. ¿Te podemos hacer consultas de algún tema aunque lo hayamos visto hace mucho? Porque en mi caso estoy bastante atrasado con la materia y estoy tratando de ponerme al día, pero no voy a llegar a consultarte sobre todos los temas el día de mañana.
Docente: por supuesto que sí, ubicándola en el lugar correspondiente al tema.

(b) Google Classroom
No hubo ninguna publicación de estudiantes, ya que se ajustaron a realizarlo por el canal de Telegram. Sólo respuestas a publicaciones del docente.

3. Para pasar información matemática de docentes a estudiantes

Relevamos las siguientes formas en que el docente pasó información matemática: mediante audios o mensajes de texto en el canal de Telegram, en explicaciones por videoconferencias por Zoom o Meet y mediante el aula virtual de GC.
(a) Telegram
La información matemática que circuló de docente a estudiantes fue para dar respuesta a las consultas formuladas sobre contenidos. Las devoluciones fueron realizadas en su gran mayoría por audios (usando el mensaje de audio del servicio). Las situaciones más sencillas fueron respondidas por mensaje de texto. Un par de ejemplos de esto último:

Docente: (respondiendo a una consulta hecha a través de una imagen con la resolución de un ejercicio) este no está bien, z no es factor común. Terminaste resolviendo otra ecuación. Esta ecuación tiene 3 soluciones (una es el 2, la única que es real). Para encontrarlas hay que escribir todo en forma trigonométrica, como está explicado en algún ejemplo.

Docente: (respondiendo a una consulta hecha a través de una imagen y un mensaje de texto con la resolución de un ejercicio) no, si es capicúa hay lugares donde hay una sola posibilidad. Por ejemplo, si para la primera cifra hay 9 posibilidades, para la última hay solo 1 (la misma que puse en la primera).

(b) Zoom / Meet
La programación semanal de cada una de las clases incluyó un video explicativo elaborado por el docente para ser visto en forma asincrónica. En ellos se procuró proveer información teórica básica y ejemplos que permitieran luego realizar ejercitación que promoviera el debate. También se realizaron algunas videoconferencias sincrónicas con todo el curso. En este caso, el uso estuvo centrado en responder a preguntas y dudas, lo que lo asemejó al uso del canal de Telegram.

(c) Google Classroom
El pasaje de información matemática fue más bien indirecto (la documentación adjunta a la programación de las clases).

4. Para pasar información matemática de estudiantes a docentes

Para el envío de producciones, el docente propuso en los cursos dos opciones: realizarla en un procesador de textos (Word) y adjuntarla, o realizarla en papel y transformarla en imágenes mediante fotografías obtenidas con los celulares (foto común, uso del CamScanner o similar).
Vale precisar que la necesidad de enviar información al docente se presentó en dos situaciones: los intercambios en el canal de Telegram donde era necesario mostrar resoluciones y para enviar trabajos prácticos solicitados.
(a) Documentos de Word
Este recurso fue apenas utilizado y en una forma particular. Un par de estudiantes enviaron trabajos prácticos en un documento de Word en el que el contenido eran las imágenes de las producciones escritas en papel.
(b) Imágenes
El envío de imágenes fotografiadas o escaneadas fue utilizado con frecuencia en los intercambios por el canal de Telegram. También fue el recurso más utilizado para subir las resoluciones de trabajos prácticos en GC. Sobre esto último observamos que, en varios casos, las entregas contenían varias imágenes, lo que dificultaba la corrección. Por ejemplo, la entrega que se muestra en la Figura 3:
Un ejemplo del uso de imágenes en los intercambios por Telegram se ve en la Figura 4:

Figura 3

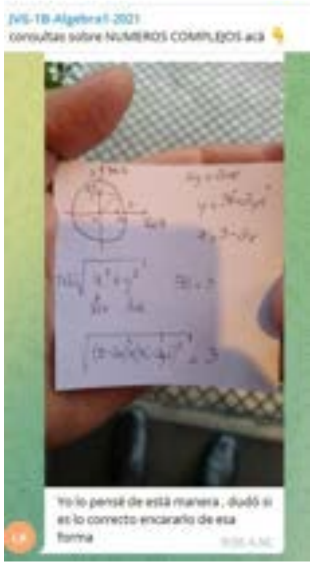


Figura 4

Podemos sumar un elemento más en lo que hace al pasaje de información matemática de estudiantes al docente: el uso de los mensajes de texto en Telegram.
(c) Telegram
En varias ocasiones, se utilizó el mensaje de texto para pasar información matemática. Como era esperable, se observaron inconvenientes para poder expresar la simbología matemática. Algunos ejemplos se muestran en la Figura 5:

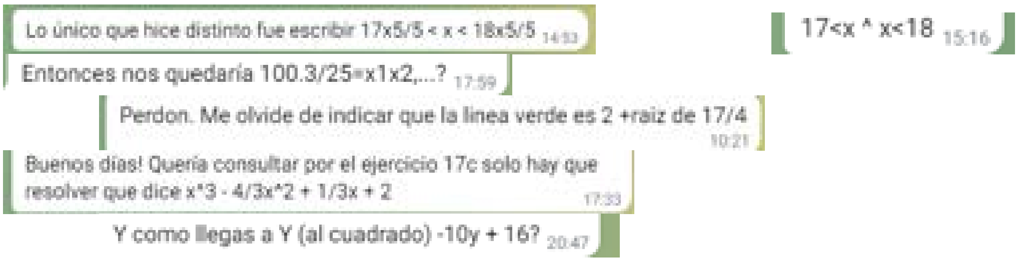


Figura 5

5. Para producir información matemática (estudiantes)
El único recurso que pudo verse en las producciones fue el uso de GeoGebra para la producción de gráficos de funciones a estudiar. En la propuesta didáctica de Análisis Matemático se propiciaba la realización de gráficos de las funciones a estudiar para luego justificar las particularidades mediante procedimientos matemáticos.
Por razones de espacio, omitimos desarrollar aquí las producciones en las que se observa el uso de calculadora científica ya que se trata de un recurso que está generalizado.

Análisis de resultados y cierre

A partir de la experiencia implementada podemos realizar algunas observaciones:
- El intercambio por Telegram, tanto por mensajes de texto como de audio, favoreció que las intervenciones docentes fueran más directivas. Al no producirse en forma sincrónica, el diálogo se ve limitado en su fluidez, lo que propicia que el docente incurra más frecuentemente en dar instrucciones y no tener un intercambio matemáticamente más valioso. Lo mismo ocurrió en las explicaciones de corte teórico grabadas por videoconferencias. Sin embargo, si esto se hubiera realizado en clases presenciales, las interacciones entre docente y estudiantes hubieran enriquecido el trabajo.
- El intercambio del docente con sus estudiantes también se dio en algunos encuentros sincrónicos por videoconferencia. En estos casos, las intervenciones docentes estuvieron mucho más ajustadas a lo esperado ya que la sincronía favorecía la fluidez del diálogo.

- El uso de la simbología matemática es un asunto por atender. Salvo en los casos en que se adjuntaron fotografías de escritos en papel, fueron evidentes las dificultades para pasar información matemática a través de Telegram y también con el uso del Word.
- Vemos que resultaría conveniente que la unificación de imágenes en un único archivo sea un requerimiento, lo que permitiría que las entregas resulten más cómodas para la lectura y corrección.

Lo que hemos presentado aquí es una primera aproximación al estudio que nos interesa realizar acerca del uso de ciertos recursos tecnológicos en la clase de matemática en el nivel superior. En particular, pretendemos avanzar en el estudio del uso de software matemático específico para el aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

Bravo, D. (2016). *Nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el Colegio del Castillo: descripción del uso actual y propuesta de proyecto de actualización tecnológica*. [Tesis de licenciatura no publicada]. UTN Regional Buenos Aires.

Gamboa Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática. 2 (3), 11-44.

Pizarro, R. (2009). Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos. [Tesis de maestría]. Recuperado sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/4152/Documento_completo.pdf?sequence=1

Villarreal Farah, G. (2010). Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática en el nivel de secundaria. [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona. Recuperado de tdx.cat/bitstream/handle/10803/82071/GVF_TESIS.pdf;jsessionid=C41C9F645824011640B12C8EA22F358D?sequence=1

REALIDAD AUMENTADA PARA EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA EN CARRERAS DE INGENIERÍA

Martha Susana ROSSO[1,2], Juan Manuel BROSSA[1]
[1]Facultad Regional Villa María, Universidad Tecnológica Nacional
[2]Grupo GIEMCI-Facultad Regional Paraná, Universidad Tecnológica Nacional.
marthasrosso@gmail.com, juanchib22@gmail.com

Resumen

La adopción de tecnologías emergentes como la Realidad Aumentada en el diseño de actividades de aprendizaje, constituyen en la actualidad una alternativa enriquecedora para los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Este trabajo se desarrolla en el marco del proyecto de investigación "*Estrategias de enseñanza, aprendizajes ubicuos y desarrollo de competencias matemáticas en carreras de ingeniería"*, código: TEUTNVM0007868. En este reporte se presentan los primeros resultados en el desarrollo de la app para Realidad Aumentada, su implementación en el diseño de una actividad de aprendizaje en la asignatura Análisis Matemático I del plan de estudio de las carreras de ingeniería que se dictan en la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional y la valoración que hicieron los estudiantes, tanto de la actividad como de la versión de prueba de la app. Los mismos indicaron, entre otros, que la mayoría de los estudiantes consultados utilizaron Realidad Aumentada por primera vez en una actividad de aprendizaje en matemática, que colaboró en la comprensión del problema y efectuaron una valoración positiva tanto de su implementación como de la aplicación.

Palabras clave: Realidad Aumentada – Aprendizaje – Matemática - Ingeniería.

Introducción

Vivimos en un mundo cambiante en el que el uso de la tecnología se hace imprescindible tanto en nuestra vida cotidiana como en el ambiente laboral. El acelerado cambio tecnológico y las potencialidades que este ofrece, han provocado fuertes transformaciones en la manera en que adolescentes y jóvenes construyen su identidad, se relacionan con su grupo de pares y con los adultos y en las modalidades en que incorporan los saberes y conocimientos. Las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones (TIC) han irrumpido en diversos ámbitos de la vida de todos y la educación no ha sido la excepción. Tal impacto demanda una verdadera transformación en las prácticas educativas y un replanteo de los paradigmas que las orientan, lo que implicará una renovación integral y global de sus concepciones, procesos y paradigmas actuales, con una proyección a corto plazo (Martínez & Martínez, 2017).

La pandemia CoVid-19 impuso grandes cambios en nuestros modos de vida, a partir de las medidas sanitarias que cada país debió implementar. La universidad se vio inmersa en una serie de transformaciones y adecuaciones demandadas por el contexto como no se había visto antes. Esta situación trajo nuevamente a consideración temas centrales como son la enseñanza y el aprendizaje a la luz de las nuevas circunstancias. Existe un nuevo imaginario social sobre la formación a distancia, la educación ya no se limita solamente a los espacios formales sino que contempla otros espacios no formales que, junto con la aparición de nuevas teorías del aprendizaje -como el aprendizaje ubicuo, el aprendizaje móvil, el aprendizaje rizomático y el aprendizaje invisible- sustentadas en el conectivismo, configuran los nuevos escenarios tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje (Almenara & Puentes, 2020). Estos autores señalan que “en esta galaxia tecnológica en la cual nos hallamos”, es posible afirmar que “nos encontramos con una tecnología que está acercándose fuertemente a los escenarios de formación, sean estos presenciales o a distancia, e independientemente del nivel educativo donde se desarrolle la acción formativa y la disciplina que se imparta” (p.36). Ese bloque de tecnologías emergentes abarca desde la web semántica (Rodríguez & Adrián, 2015, Castells, s/d), la introducción de la internet, las analíticas de aprendizaje (Sabulsky, 2019) hasta la Realidad Aumentada (RA).

Coincidimos con Martínez et al. (2021) en que la RA contribuye a que los procesos de enseñanza y de aprendizaje en Matemáticas sean prácticos y tangibles, a la vez que fomenta la motivación en los estudiantes y colabora en que resulte más atractiva para aquellos que deben estudiarla rigurosamente en el aula de clase o en entornos educativos virtuales. Es de gran ayuda ya que les permite tener una visión completa del problema y les da la oportunidad de visualizar elementos que apoyen la resolución del mismo. De este modo, potencia la comprensión y la apropiación de temáticas consideradas abstractas a través de una nueva realidad que permite la interacción con los objetos de conocimiento.

En esta línea, López Martínez et al. (2017) citan a varios autores que dan cuenta de que la aplicación de RA en el ámbito educativo tiene efectos positivos sobre el aprendizaje, motivación, o inclusive, construyendo modelos mentales innovadores sobre cuestiones de ingeniería. Asimismo, coincidimos con González Angeletti (2018) en que una de las novedades que las TIC aportan a los educadores es que al incrementar y fortalecer los procesos de comunicación, se potencian los procesos de enseñanza y de aprendizaje de un modo cualitativo y cuantitativo. Siguiendo a la autora, entendemos que innovar en las propuestas didácticas mediadas tecnológicamente implica romper con la estructura lineal del material tradicional incluyendo nuevos medios, modos y formatos, favoreciendo la interacción entre el material y el estudiante, entre los estudiantes mismos y entre estudiantes y docentes.

En la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional (FRVM-UTN), en la cátedra de Análisis Matemático I (AMI) desde el año 2017 se está trabajando en el desarrollo de un Proyecto de Innovación Curricular (PIC), cuyo fundamento es la transición entre paradigmas educativos, que evoluciona desde un modelo educativo centrado en la enseñanza, hacia un modelo centrado en el aprendizaje, es decir, aquel que considera al estudiante y al proceso que éste realiza para lograr que sus aprendizajes le resulten significativos (Burbules, 2014) con independencia del contexto, ya sea presencial o virtual.

En esta transición, la combinación de metodologías activas para la enseñanza y la elaboración de actividades de aprendizaje que incorporen de manera genuina las TIC y herramientas tecnológicas como la RA, favorecerían y potenciarían dicho proceso (Maggio, 2012).

Realidad Aumentada. Características principales y posibilidades educativas

El término RA aparece en los años 90. El investigador Tom Caudell fue el encargado de darle tal denominación para referirse a los dispositivos utilizados por los electricistas de fábricas aeronáuticas que proyectaban tableros virtuales sobre tableros reales, lo que provocaba un aumento de la realidad del usuario (*Antecedentes*, 2017).

Sin embargo, es en los últimos años cuando está adquiriendo mayor significación y presencia en diversos ámbitos, desde el sector industrial, del ocio y el formativo. Cabero y García (s. f.) señalan que la RA se presenta

como una de las tendencias de uso que se impondrá y tendrá presencia significativa en los aspectos relacionados con la formación.
¿Qué es la RA?
Almenara y Puente (2020) señalan que es una tecnología que permite la combinación de información digital e información física en tiempo real, por medio de distintos soportes tecnológicos, consiguiendo de esta forma una nueva realidad. Llaman “nueva realidad” a la combinación de la realidad del contexto real con elementos informativos ubicados en los dispositivos tecnológicos.
Por su parte, Pulido (2015) se refiere a la RA como un paradigma que se asienta en tres pilares. El primero se refiere a la combinación de objetos reales y virtuales en un entorno real, el segundo propone que la combinación debe hacerse en tiempo real y el tercero establece que debe alinear y componer objetos virtuales con la realidad en 3D significando que el resultado puede ser una imagen bidimensional, pero la alineación y composición de los elementos virtuales deben hacerse con base en un mundo tridimensional. El autor se refiere a la RA como paradigma de interacción ya que ofrece “altos niveles de interacción natural debido a que las técnicas de visión por computador que utiliza permiten detectar interacciones simples por parte del usuario” (p. 33). De esta manera, la información digital puede ser presentada al usuario directamente en el mundo real sin necesidad de requerir su atención explícita en la pantalla de un dispositivo. Estos aspectos han resultado de gran utilidad y soporte teórico para el desarrollo de nuestra aplicación.
Con respecto a las posibilidades de su aplicación al ámbito educativo, Johnson et al. (2010) se refieren a su gran potencial para proporcionar experiencias de aprendizaje potentes, ya sean estas contextuales, in situ, de exploración o por descubrimiento. De acuerdo a las teorías del aprendizaje, aluden al aprendizaje constructivista, contextual, basado en juegos o problemas, basado en investigación, a lo que deberíamos incorporar las propuestas del aprendizaje móvil y ubicuo. Asimismo, señalan que la tecnología de RA se adopta más rápidamente en el nivel universitario. Apoyando esta idea, diversos autores brindan sus argumentos en favor de las posibilidades de la RA en el terreno educativo (Almenara & Puente, 2020) entre los que podemos mencionar: permite presentar la información esencial y de mayor valor; mostrar la realidad de forma enriquecida o aumentada de manera que facilite su comprensión; permitir que el objeto sea observado de diferentes ángulos dejando al estudiante seleccionar la posición y el momento más adecuado para su observación; garantizar la contextualización de la información ante cualquier situación. Pero, quizás la más destacada, es que la RA “defiende una perspectiva no lineal de la formación, lo que supone una adaptación a la nueva cultura hipertextual propia de las nuevas generaciones y facilita que los estudiantes naveguen, interactúen y construyan su propio conocimiento” (p.39), favoreciendo el desarrollo del pensamiento divergente y la potenciación de las inteligencias múltiples, pues implica la utilización de diferentes tipos de recursos y sistemas simbólicos.
A continuación, exponemos los pasos seguidos para el desarrollo de la app de RA, la que se aplica en el diseño de una actividad de aprendizaje en la asignatura AMI. En ella se propone encontrar el área de una región plana limitada por dos funciones reales y el eje de abscisas. La misma se trabajó con alumnos de la quinta comisión que cursaron AMI en el segundo semestre de 2021. Esta comisión estuvo conformada por alumnos de las cuatro carreras de ingeniería que se dictan en la FRVM–UTN: Ingeniería en Sistemas de Información, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Química e Ingeniería Electrónica. La cantidad de inscriptos fue de 137 estudiantes. Si bien la actividad de aprendizaje fue preparada para ser trabajada en el aula en forma presencial, tuvo que ser adecuada al formato virtual para ser probada con los estudiantes. Para conocer los resultados de la experiencia, se administró una encuesta semiestructurada a través de un formulario de Google.

Entorno de desarrollo de la aplicación

Para el desarrollo de esta aplicación utilizamos el software *Unity* que es un motor de videojuegos multiplataforma, que se utiliza para el desarrollo de los mismos. Una vez que tuvimos instalado y preparado el software, necesitamos implementar en Unity la tecnología que nos permitirá trabajar con RA; en este caso trabajamos con *Vuforia*. Esta tecnología ya viene integrada en Unity, lo que hace mucho más fácil la creación de proyectos de RA dentro de este motor. Solamente tuvimos que descargar la dependencia correspondiente dentro de la misma interfaz de Unity. Se decidió utilizar Vuforia debido a que es la tecnología con mayor antigüedad en el mercado que trabaja con RA y que todavía se encuentra en el mercado, permitiéndonos agrandar el abanico de dispositivos móviles que pueden tener acceso a esta aplicación.

Desarrollo de la aplicación

Con el entorno de desarrollo listo comenzamos a trabajar. En el problema original que se tomó como base, se debía calcular el área comprendida entre dos funciones y el eje de abscisas mediante tres diferentes caminos: dos de ellos utilizando integrales definidas, tomando en un caso como variable independiente x, en el otro, tomando la variable *y* como independiente y en el tercer caso, incorporar al cálculo la geometría. La RA necesita identificar algún patrón para saber cuándo mostrar algo. Para ello, designamos tres diferentes imágenes, una para cada uno de los métodos a seguir y así poder dividir el problema también en la aplicación. De esta manera, de acuerdo a la imagen que se enfoque con la cámara del celular, se puede interactuar con un método u otro de solución. El patrón de cada una de las imágenes es captado e interpretado por la RA y gracias a esto se pueden mostrar por pantalla las diferentes formas de solución. Los elementos del mundo real que se utilizaron para que el software reconozca y muestre la información virtual asociada a cada uno de ellos, fueron las siguientes (Fig. 1):

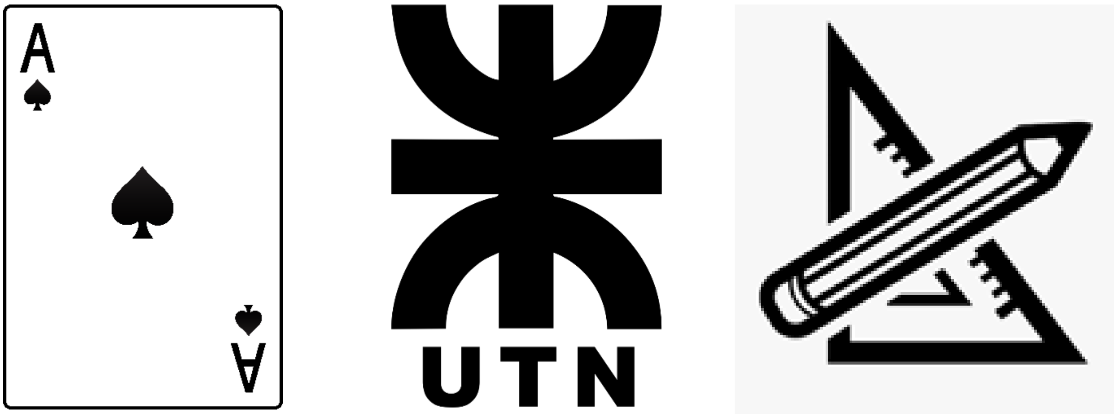


Fig. 1. Activadores

Respecto al funcionamiento de la aplicación, se crearon un conjunto de scripts (archivos de código) en los cuales se estructuró y se programó el comportamiento del software. A grandes rasgos, en esta primera etapa, se dividió la estructura en tres diferentes grupos de archivos:

- En uno de ellos se creó un archivo con el comportamiento que tiene el gráfico en pantalla (apariencia, funciones que se muestran en el plano cartesiano, pares ordenados de importancia).
- En el otro grupo, se creó un archivo por cada uno de los métodos por los cuales se puede resolver el problema (en este caso, 3).
- Por último, también se creó un archivo en el cual se desarrolló el comportamiento que realiza la aplicación al interactuar con algunos de los objetos que aparecen en pantalla.

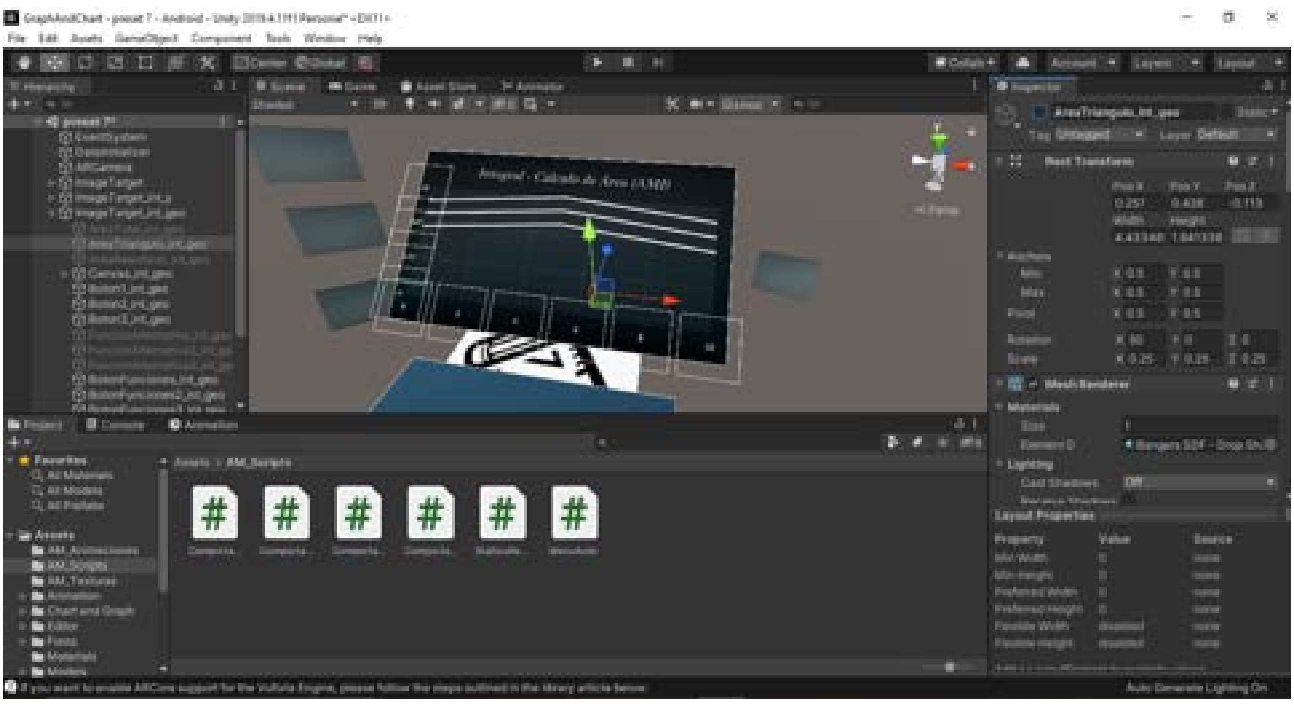


Fig. 2. Interfaz de trabajo de Unity

La programación de la aplicación se realizó en su totalidad utilizando el lenguaje de programación C# (llamado C Sharp, lenguaje que utiliza Unity para sus scripts) que es uno de los más conocidos y utilizados mundialmente, desarrollado y estandarizado por Microsoft. Para escribir el código se utilizó *Visual Studio Code* el cual, justamente, es un editor de código para Windows, Linux y macOS.
Una vez que la versión de la aplicación es considerada estable y correcta, se debe realizar un *Build* de la misma, es decir, el proceso mediante el cual Unity (en este caso) crea el archivo con el cual se podrá ejecutar el software desarrollado.

Ajustes y requerimientos

También es importante establecer y especificar correctamente los *ajustes* y *requerimientos* necesarios para el uso de la aplicación. Hacemos referencia a las especificaciones técnicas necesarias para la ejecución y correcto funcionamiento de la aplicación. Dentro de los diferentes ajustes, es importante determinar en cuáles versiones de los diferentes sistemas operativos (Android, iOS y Windows Phone) para dispositivos móviles se va a poder instalar y utilizar. En esta primera etapa del proyecto, la aplicación puede ser instalada y utilizada en sistemas operativos Android versión 6.0 Marshmallow en adelante, ya que esta es la versión mínima que soporta Vuforia (la tecnología de RA integrada en el proyecto).

Resultados

Respecto de los aspectos generales consultados, el 60,7 % de los estudiantes indicó que usaba por primera vez una herramienta de RA y los que contestaron que “No” (39,3%), la mayoría aclaró que la usaron en juegos, para prueba de ropa, decoración de interiores y navegación; sólo 10,7% usó RA en actividades de aprendizaje, específicamente en la asignatura Algoritmos y Estructura de Datos de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información.
Con respecto a la valoración que hicieron los estudiantes de incorporar RA en actividades de aprendizaje, el 60,7 % manifestó que había ayudado a entender la solución del problema entre las categorías “lo suficiente” y “mucho”. Un 7% indicó que “Poco” ayudó a la comprensión y el 32,1% no pudo utilizar la aplicación. Ante la consulta de que, si este tipo de herramientas facilitan la comprensión de problemas, la respuesta fue positiva en todos los casos, indicando un 53,6% que “sí” y un 46,4% que “Tal vez”. Consultados acerca de cómo podría colaborar la RA en la comprensión de conceptos teóricos de la asignatura, si bien todas fueron respuestas positivas, la mayoría (57,1%) indicó que “Tal vez” y un 42,9% señaló que “Sí”.
Con respecto a la valoración que hicieron de la app sobre la dificultad para su uso, las respuestas se repartieron entre “Normal”, “Fácil” y “Muy fácil” (68%), el 32% restante, no la pudo usar. En general consideraron que “es aplicación muy buena”, “muy útil”, “bastante completa”, que por ser una versión de prueba “está muy correcta”. También realizaron sugerencias sobre aspectos a mejorar como que esté disponible para iOS, mejorar algunas imágenes en estabilidad y orientación.
Entre las opiniones brindadas por los alumnos, destacamos las siguientes en concordancia con los datos estadísticos mostrados,

Sobre la aceptación de la aplicación
“Considero que es una aplicación muy buena y que se le puede sacar mucho provecho, obviamente tiene cosas a mejorar, …, pero creo que está muy bien trabajada y que esos son solo errores mínimos.”
“La aplicación me parece que es bastante completa”
“Nada que agregar dado que es una versión de prueba, muy útil”
“yo creo que para ser una versión de prueba está muy correcta la app”
“Está muy buena, por ahí se me ocurre que estaría bueno modificar el tema de los "botones de interacción" especificando para qué sirve cada cual.”
“Para mi está bien así”

Sobre los inconvenientes en el uso de la aplicación
“Que se encuentre disponible para iOS”
“La aplicación no me funciono”

“No me dejo abrirlo”
“Instalé la aplicación desde mi celular y al abrirla no me funciono, sólo me aparece buscando”
“No me deja descargarla desde el celular, no sé por qué”
“La aplicación se encuentra disponible únicamente para Android, y yo poseo iOS”

Sobre el uso de RA en actividades de aprendizaje
“Está muy buena, por ahí se me ocurre que estaría bueno modificar el tema de los "botones de interacción" especificando para qué sirve cada cual.”
“Me parece una buena idea para hacer algunos ejercicios de forma un poco más interactiva, no sé si es lo ideal, porque de alguna forma se podría dar la misma explicación, a través de un pdf y seguramente para algunos sea hasta más cómodo, y no sé si será muy distinta la llegada que hay entre la explicación y la persona que está realizando la actividad, espero haberme expresado bien. En resumen, me parece una muy buena idea, se nota que aún está en una instancia de prueba y creo que puede dar muy buenos resultados, es interactivo y llamativo porque no solemos trabajar con este tipo de herramientas, o por lo menos yo, un gusto haberla probado.”
“La aplicación me sirvió mucho. Me parece una buena forma de comprender mejor los conceptos de análisis matemático”
“Me parece muy bueno incorporar distintas herramientas que ayuden a simplificar lo que es el marco teórico de algunas materias debido a la complejidad que genera imaginar ciertas cosas de cada materia”
“me parece muy satisfactorio que implementen nuevas técnicas para la compresión de la materia”
“Está muy bueno el proyecto!!”

Conclusiones

En líneas generales podemos decir que nuestros estudiantes evaluaron positivamente tanto la actividad de aprendizaje con RA como la aplicación presentada en cuanto señalaron aspectos concordantes con lo explicitado en el marco teórico de este trabajo, a saber:

- ✓ Ayuda a la comprensión tanto de problemas como de conceptos abstractos. El trabajo cotidiano nos muestra que cuando el estudiante tiene que pensar en términos de *y* como variable independiente para efectuar el cálculo de área de una región comprendida entre curvas, aparecen dificultades tanto en el momento de determinar el intervalo de integración, como en el armado del integrando de la integral definida. La incorporación de RA para visualizar el problema, de acuerdo a las opiniones vertidas por los estudiantes, colaboró en la comprensión de la situación problemática. En este sentido, podemos mencionar algunos aspectos que incidieron favorablemente. Por un lado, lo que se refiere a la presentación de la información, es decir, la información es precisa lo que permite una mejor captación por parte del estudiante; por otro, al poder manipular el objeto, el estudiante puede visualizarlo desde diferentes perspectivas y seleccionar aquella que le resulte más significativa y un tercer aspecto, es que se garantiza la contextualización de la información.
- ✓ Es llamativo e interactivo, lo que refiere a captar la atención y estimular la motivación.
- ✓ La disponibilidad, en todo lugar y a toda hora lo que nos remite al aprendizaje móvil y ubicuo.
- ✓ Facilidad en el uso, tiene que ver con garantizar que permita interactuar con el objeto de forma intuitiva y fácil.

No obstante, dentro de las dificultades encontradas no podemos dejar de mencionar que un porcentaje significativo de alumnos (32%), no pudo usar la aplicación por diversos motivos. En este sentido, seguiremos trabajando para mejorar aspectos técnicos y realizar ajustes que permitan su uso en diferentes sistemas operativos tales como iOS y Windows Phone.
Como se expuso, este trabajo muestra los resultados de una primera entrada en terreno con el fin de obtener información primaria al respecto, la que nos permitió establecer relaciones preliminares entre el cuerpo teórico y observables, que utilizaremos en la construcción de otros instrumentos de recogida de datos que nos permitan poner en evidencia la comprensión alcanzada.
Por último, podemos decir que estas primeras conclusiones, compatibles con resultados de otras investigaciones, nos alientan a pensar que innovar con TIC significa movilizarnos para alcanzar aprendizajes activos, flexibles y colaborativos, no solo en la presencialidad sino también en otros contextos no formales.

Referencias Bibliográficas

Almenara, J. C., & Puente, A. P. (2020). La Realidad Aumentada: Tecnología emergente para la sociedad del aprendizaje. *AULA Revista de Humanidades y Ciencias Sociales*, *66*(2), 35-51. https://doi.org/10.33413/aulahcs.2020.66i2.138

Antecedentes. (2017, 25 de diciembre). Realidad Aumentada y Periodismo. Recuperado 11 de marzo de 2022, de http://realidadaumentadayperiodismo.blogspot.com/2017/12/antecedentes.html

Burbules, N. C. (2014). Los significados de "aprendizaje ubicuo". *Education Policy Analysis Archives/Archivos Analíticos de Políticas Educativas*, *22*(104). http://www.redalyc.org/resumen.oa?id=275031898105

Cabero, J., & García, F. (s. f.). Realidad aumentada: Tecnología para la formación. *Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación*, *49*, 241-242.

Castells, P. (s/d). *La web semántica*. http://www.ii.uam.es/-castells

González Angeletti, V. C. (2018). *La especificidad de los materiales didácticos: Su contribución a la construcción colaborativa de narraciones transmedia*. https://rdu.unc.edu.ar/handle/11086/12841

Johnson, L., Smith, R., Levine, A., & Haywood, K. (2010). *NMC Horizon Report: 2010 K-12 Edition* (pp. 1-35). The New Media Consortium. https://www.learntechlib.org/p/182020/

López Martínez, I., Aburto, V. R., Juárez, A. G. R., & Montesinos, R. S. (2017). Realidad Aumentada Educativa: Una propuesta desde las perspectivas y enfoques. *Interconectando Saberes*, *3*, 1-14.

Maggio, M. (2012). *Enriquecer la enseñanza. Los ambientes de alta disposición tecnológica como opotunidad*. casadellibro. https://www.casadellibro.com/ebook-enriquecer-la-ensenanza-ebook/9789501200324/2056585

Martínez, F. S., & Martínez, A. G. (2017). Fundamentos del aprendizaje en red desde el conectivismo y la teoría de la actividad. *Revista Cubana de Educación Superior*, *35*(3 set-dic), 98-112.

Martínez, O. M., Mejía, E., Ramírez, W. R., Rodríguez, T. D., Martínez, O. M., Mejía, E., Ramírez, W. R., & Rodríguez, T. D. (2021). Incidencia de la realidad aumentada en los procesos de aprendizaje de las funciones matemáticas. *Información tecnológica*, *32*(3), 3-14. https://doi.org/10.4067/S0718-07642021000300003

Pulido, R. D. B. (2015). Incidencia de la realidad aumentada sobre el estilo cognitivo: Caso para el estudio de las matemáticas. *Educación y educadores*, *18*(1), 7.

Rodríguez, D., & Adrián, H. (2015, abril 4). *Web Semántica, definición, historia y características* (World) [Text]. Diseño Web akus.net. https://disenowebakus.net/semantica-web.php

Sabulsky, G. (2019). Analíticas de Aprendizaje para mejorar el aprendizaje y la comunicación a través de entornos virtuales. *Revista Iberoamericana de Educación*, *80*(1), 13-30. https://doi.org/10.35362/rie8013340

CATEGORIZACIÓN DE IMÁGENES MENTALES SOBRE ASÍNTOTAS DE FUNCIONES USANDO SOFTWARE MATEMÁTICO

Roxana SCORZO, Adriana FAVIERI
Departamento de Ingeniería e Investigaciones Tecnológicas,
Universidad Nacional de La Matanza
rscorzo@unlam.edu.ar, afavieri@unlam.edu.ar

Resumen

En este artículo presentamos una categorización de imágenes mentales de asíntotas de funciones evidenciadas en clases con uso de software Mathematica, asociadas a los registros de representación utilizados para hacer explícitas las ideas sobre dicho concepto matemático. La misma forma parte de los resultados de una tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática, describimos la primera parte de la experiencia realizada con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, de la asignatura Análisis Matemático I, antes de explicar el concepto de asíntotas. Está enmarcada en un enfoque cognitivista considerando los conceptos de imágenes mentales, registros de representación semiótica y uso de tecnología en ámbitos académicos matemáticos. Mostraremos la elaboración de definiciones propias a partir del marco teórico adaptadas al contexto de trabajo, el diseño de instrumentos para la recolección y análisis de datos. Concluiremos con algunas reflexiones finales acerca del impacto de la clasificación propuesta, en el diseño de actividades con software específico.

Palabras clave: Asíntotas - Imágenes Mentales - Registros de Representación- Software Mathematica.

Introducción

El objetivo del artículo es dar a conocer una categorización de imágenes mentales de asíntotas de funciones evidenciadas en clases con uso de software Mathematica, asociadas a los registros de representación utilizados para explicitar para hacer explícitas las ideas sobre dicho concepto matemático. La misma forma parte de los resultados de una tesis de Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales con mención en Matemática. Se realizó una experiencia con estudiantes de carreras de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Matanza, de la asignatura Análisis Matemático I, que dio lugar a hacer una categorización de las imágenes mentales sobre el concepto de asíntotas, estas son previas a la enseñanza, conocerlas es esencial para la conceptualización del tema, ya que no siempre son correctas, se relacionan con él y pueden ser obstáculos para el proceso de aprendizaje. Vinner (1983) define *imagen mental* relacionada con un concepto matemático como el conjunto de todas las imágenes que están asociadas al mismo; y que puede incluir cualquier representación visual del concepto, incluso símbolos, gráficos o palabras. Las imágenes mentales tienen importancia en la construcción de actividades de aprendizaje que impliquen comprensión lectora, y son concebidas como una representación de origen perceptivo o bien un recuerdo de alguna experiencia vivida anteriormente (Silva, 2009). Trejo y Camarena (2011) plantean un marco teórico denominado Matemática en Contexto de las Ciencias, y sostienen que las *representaciones internas o mentales* juegan un papel importante en la comprensión de un concepto matemático y que estas se manifiestan externamente a través de gráficas, símbolos o palabras.

Marco teórico

Tall y Vinner (1981) sostienen que, en la Matemática, a diferencia de otras disciplinas, la definición de sus conceptos requiere de una gran precisión ya que toda la teoría se desarrolla a partir de éstos. Muchos conceptos matemáticos tienen denominaciones similares a términos ya conocidos por el alumno en su vida cotidiana antes de ser definidos formalmente en la disciplina. Dado que la estructura cognitiva de cada individuo es compleja, es posible que se generen diferentes imágenes mentales al evocar un concepto que se pretende aprender, definir o indagar. Los autores señalan que estas imágenes mentales son previas a la enseñanza de un concepto, no formales y de elaboración personal. Estas son las que aparecen más visibles en la mente del sujeto cuando piensa en un determinado concepto. Pueden ser contradictorias o erróneas y esto genera lo que llaman *conflicto*. Así, señalan que ciertas imágenes mentales que un sujeto tiene acerca de un concepto, elaboradas en su primera infancia, se transforman en obstáculos a la hora de definir un concepto de manera formal.

Duval (2006) distingue dos cuestiones centrales para que un estudiante pueda comprender un concepto matemático, por un lado, el contenido matemático conceptual y no semiótico y por el otro las diferentes representaciones semióticas que se pueden elegir para representar dicho concepto de acuerdo con la necesidad del tratamiento de este. Considera al concepto matemático como un proceso mental y a la representación semiótica como algo externo o material. Sugiere que toda actividad matemática que implique la comprensión de un concepto debe utilizar diferentes representaciones semióticas y que no debe confundirse el objeto matemático con la representación utilizada del mismo. Este autor asegura que, en la formación de un concepto matemático con uso de tecnología, esta no es el elemento central, sino que las *representaciones semióticas* son el medio para actuar sobre los objetos matemáticos y poder de esta forma romper con la *paradoja cognitiva del pensamiento matemático,* por un lado, se encuentra la comprensión conceptual del objeto matemático y por el otro la representación de este (Duval, 1993). Duval (1993) determina tres registros de representación: verbal, simbólico y visual. En el primero prevalece el lenguaje de la palabra, en el segundo el lenguaje algebraico y en el tercero las representaciones gráficas. Se denominan también verbal, algebraico y gráfico respectivamente. Rotula que un buen aprendizaje y el dominio de un determinado concepto se basa en el reconocimiento de diferentes registros de representación y la capacidad de poder pasar de uno a otro. D’Amore (2011) aporta que una *representación semiótica de un objeto o concepto no es absoluta,* se debe asociar con el registro de representación y este a su vez depende del objeto a representar. Por ejemplo, la representación semiótica de dos líneas paralelas $||$ puede asociarse a las barras de módulo al trabajar en registro algebraico o a la representación de rectas paralelas en el registro gráfico.

Tall (2000) destaca que el nuevo paradigma tecnológico obliga a los docentes a realizar una reflexión profunda acerca de cuáles son los contenidos matemáticos necesarios a enseñar, como así también a realizar un replanteo profundo en cuanto a la forma de organizar las clases. Barreiro et al. (2017), sugieren que la incorporación de nuevas tecnologías en el proceso de aprendizaje, nos obliga a rever los objetivos que nos formulamos en las actividades que planteamos a los estudiantes. Ponen como ejemplo que el enunciado “graficar una función a partir de una expresión un poco más compleja que las habituales”, hace un tiempo resultaba un objetivo en sí mismo, mientras que con el devenir de las TIC este objetivo cambia de estatus. Al usar la tecnología el estudiante introduce la expresión y con solo oprimir un botón la gráfica aparece. De allí la necesidad de incorporar nuevas cuestiones vinculadas a la realización de un gráfico, como ser si usa una escala adecuada para realizar el gráfico, para que la imagen obtenida con el software sea clara y entendible, entre otros aspectos. También recomiendan que el uso de la tecnología sea *pertinente y significativo. Pertinente* está vinculado con el uso consciente de ella, no es necesario que en todas las clases estén presentes las TIC y *significativo* se refiere a que lo matemático que surge con su uso no se advierta en resoluciones de lápiz y papel, con los conocimientos del estudiante. Por ejemplo, si sustituimos el uso del pizarrón por una presentación Power Point, sólo estaríamos haciendo un *cambio cosmético,* en palabras de los autores. Así establecen criterios para valorar justamente la *pertinencia y significatividad* del uso de TIC para resolver consignas matemáticas.

Metodología

La asignatura Análisis Matemático tiene un régimen de cursado cuatrimestral con una carga semanal de 8 horas distribuidas en dos días. Para acreditar y/o promocionar la materia los alumnos deben aprobar dos parciales y un trabajo práctico haciendo uso del software Mathematica. Este permite realizar cálculo simbólico, numérico, graficar en dos y tres dimensiones, realizar animaciones. Utiliza las llamadas celdas de texto, de ingreso de comandos y se salida de resultados, lo que permite trabajar todo en un mismo documento, característica que consideramos distintiva de este software. Al momento de realizar la experiencia la versión de software utilizada no permitía realizar gráfico si no se ingresaba una expresión analítica de función. Se realizó luego de enseñar funciones y la definición de límite funcional, y antes de enseñar el concepto de asíntotas y posteriormente continuidad. Participaron 20 grupos de 3 alumnos. Dado este contexto, consideramos apropiado adaptar las definiciones de imágenes mentales de Vinner (1983) y la correspondiente de registros de representación de Duval (1993) a nuestro contexto con uso de software matemático. *Imagen mental sobre el concepto de asíntotas de funciones en relación con el uso de software matemático:* es el conjunto de ideas previas a la enseñanza, sobre el concepto de asíntotas de funciones que el alumno expresa en diferentes registros de representación (verbal, gráfico o algebraico) haciendo uso del software matemático. *Registro Verbal con uso de software Mathematica (RVSM):* es cualquier expresión referida a cuestiones matemáticas o no, expresadas a través de palabras usando celdas de texto. *Registro Algebraico con uso de software Mathematica (RASM):* es toda expresión referida a cálculos algebraicos expresada a través de comandos, del software, adecuados. *Registro Gráfico con uso de software Mathematica (RGSM):* es toda expresión referida a gráficos matemáticos expresada a través de comandos del software que incluyen la expresión analítica de la función a graficar.
Para recolectar datos sobre imágenes mentales referidas al concepto de asíntotas y teniendo en cuenta que analizaremos en función de los registros de representación recién definidos, diseñamos un instrumento denominado "Test de Diagnóstico Inicial (TDI)", compuesto por dos actividades, siendo la primera la correspondiente al tema tratado en esta oportunidad. Consistía en una pregunta de tipo abierta (González Zamora, 2002) que los alumnos debían responder usando el software y sin consultar apuntes, libros ni sitios web, lo que se explicitó en la consigna. El texto de la misma fue*: Podrían explicar, haciendo uso del software ¿qué es para ustedes una recta ASÍNTOTA a una función? ¿Qué tipo de asíntotas conocen? En este ejercicio tienen la libertad de explicar con palabras sueltas, frases o párrafos, con gráficos, con expresiones con símbolos o números o cualquier otra forma que consideren apropiada para exponer sus ideas. Nos interesa saber cómo representan en sus cabezas las rectas asíntotas a una función y siempre usando el software.*
El análisis de las respuestas lo hicimos a través de lo que llamamos "Escala de Apreciación para las Imágenes Mentales con uso de Software (EAIMuS)", recomendada cuando se observa en forma directa los procedimientos, métodos o técnicas que emplean los alumnos cuando desarrollan una actividad (Ruiz, 2007). Los aspectos incluidos en la EAIMuS se detallan a continuación. **Descripción de la respuesta**: en este aspecto relatamos la respuesta del alumno usando el software, incluyendo una captura de imagen de esta. **Imágenes mentales**: ítem en el que representamos la imagen que hemos podido apreciar en la respuesta. **Función usada**: evidenciamos la función utilizada para responder la actividad. **Registros de representación utilizados**: referimos él o los registros de representación utilizados por los alumnos al responder.

Análisis de las respuestas

Nos limitamos a mostrar el análisis de dos de los grupos participantes (Fig. 1):

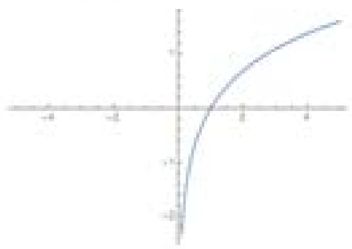
Grupo 1	
Descripción	Plot[Log[x], {x, -5, 5}]  En esta funcion podemos ver como se acerca a 0 pero nunca lo toca, en este caso Log x, fue elejida para ejemplificar Asintonta, en este caso Asintota vertical en x=0. Los alumnos ejemplican el concepto mediante un gráfico de una función prototipo como es la función logaritmica. Manifiestan en forma verbal *vemos que se acerca a "0" pero no la toca.* Por otra parte observamos que explicitan que existe asíntota vertical "en x=0", es decir no consideran la expresión como ecuación de la asíntota vertical sino que la misma está en el valor de abscisa que indican. Tampoco hacen referencia a los otros tipos de asíntotas, es decir se limitan a AV que es la única en el ejemplo elegido.
Imágenes mentales	Recta a la cual la función se acerca pero no tiene intersección con la misma
Función usada	Prototipo: logaritmica
Registros utilizados	Gráfico

Figura 1. Ejemplo de EAIMuS

Luego de analizar las producciones de los 20 grupos, hemos realizado una categorización de las imágenes mentales respecto de las asíntotas, asociadas a los registros de representación, inspirada en una clasificación de imágenes mentales sobre funciones de Vinner (1983). Hemos podido distinguir cinco categorías que describimos a continuación:

Imagen Mental Categoría 1 (IMC1)
Explicaciones verbales acerca de qué es una asíntota (RVSM)

Dentro de esta categoría incluimos a todas aquellas expresiones verbales, indicadas con palabras, sobre la idea de asíntota a una función, tal como lo dijeron los estudiantes. Las frases más destacadas de ella son:

- Rectas imaginarias.
- Rectas cuya distancia con la función tiende a cero.
- Rectas como valores numéricos que no pertenecen al dominio e imagen de la función.
- Rectas como valores a los cuales la función se acerca, pero no alcanza.
- Rectas paralelas a los ejes
- Rectas como parte de la función pero que no la intercepta.
- Recta a la cual la función se acerca, pero no tiene intersección con la misma.
- Recta a la cual la función se acerca y en algunos casos la función la puede atravesar.
- Rectas paralelas a los ejes a las cuales la función se acerca, pero nunca la toca.
- Rectas verticales, horizontales u oblicuas donde la función se acerca, pero no la corta.

Imagen Mental Categoría 2 (IMC2)
Explicaciones a través de ejemplos gráficos usando funciones prototípicas: racionales, exponenciales, logarítmicas. (RGSM y RASM)

En esta categoría incluimos los gráficos hechos con el software y las conclusiones acerca de las asíntotas a las que arriban a partir de lo que visualizan en la gráfica. A modo de ejemplo:

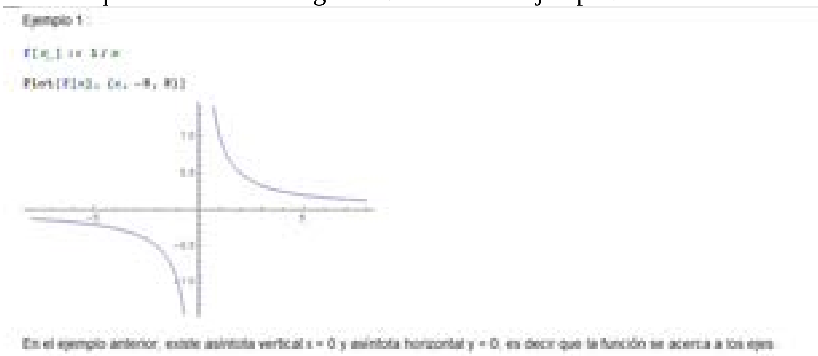


Imagen Mental Categoría 3 (IMC3)
Explicaciones a través de ejemplos con cálculos de límites funcionales (RGSM y RASM)

En esta categoría agrupamos aquellas respuestas en las que se incorpora no solo la fórmula para graficar la función sino el cálculo de los límites con el software para determinar las asíntotas.

Imagen Mental Categoría 4 (IMC4)
Explicaciones a través de ejemplos con funciones no prototípicas. (RGSM)

Aquí agrupamos aquellas explicaciones en las que se incluyen funciones no prototípicas.

Acá solo se observaron dos funciones, de expresiones: $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ y $f(x) = \tan(x)$. Muestran los ejemplos, en forma gráfica, respondiendo en forma errónea en qué valores de la función tangente existen AV.

Imagen Mental Categoría 5 (IMC5)
Explicaciones a través de relaciones no funcionales, expresadas en forma algebraica o gráfica. (RGSM y RASM)

Categoría relativa a ejemplos en los que se usan relaciones no funcionales.
Hubo un solo ejemplo de una relación no funcional: una hipérbola, en el que usaron el comando ContourPlot.

Reflexiones finales

La adaptación de las definiciones teóricas sobre imágenes mentales asociadas a registros de representación ha resultado apropiada para el análisis de las producciones de los alumnos de acuerdo con el contexto descripto y para categorizarlas. Estas definiciones no están acabadas, son dinámicas ya que, al estar asociadas al uso de un software en particular, con las mejoras de las nuevas actualizaciones podrían requerir ajustes acompañando a los cambios tecnológicos. Esta categorización nos permite tener un acercamiento a las concepciones con las cuales los alumnos se enfrentan al concepto. Remarcamos la fuerte predisposición a explicar con palabras el concepto de asíntota, es decir predominio del RVSM por sobre otros. Otro aspecto por resaltar es la utilización de funciones prototípicas, como las logarítmicas y exponenciales para ejemplificar asíntotas; razón por la cual se evidenciaron pocas referencias a las asíntotas oblicuas. Otra imagen mental con fuerte presencia es la no existencia de intersección entre la asíntota y la función. Sostenemos que esta categorización de imágenes mentales asociadas a registros de presentación podría servir de base para el planteo de actividades introductorias del concepto. Sugerimos presentar a los alumnos ejemplos diferentes a los que involucran las funciones prototípicas, orientados a las definiciones de asíntotas y a un análisis más profundo.

Referencias Bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., y Rodríguez, M. (2017). Rodríguez (coord.) *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática.* Universidad Nacional General Sarmiento.

D'Amore, B. (2011). Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: Interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. *Revista Científica*, 150-164.

Duval, R. (1993) Registres de représéntations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, *5*, 37-65.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, *9*(1), 143-168.

Ruiz, M. (2007). *Instrumentos de evaluación de competencias*. Universidad Tecnológica de Chile.

Silva, I. O. (2009). La creación de imágenes mentales y su implicación en la comprensión, el aprendizaje y la transferencia. *Sapiens. Revista Universitaria de Investigación*, *10*(2), 243-253.

Tall, D. (2000). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, *12*(3), 196-218.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular references to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Trejo, E., & Camarena, P. (2011). *Las representaciones mentales en la resolución de un problema contextualizado.* En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 321-329).

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*(3), 293-305.

Zamora, H. G. (2002, 24 agosto). *Tipos de preguntas: ¿cerradas o abiertas?* Eduteka. Recuperado 11 de noviembre de 2018, de https://eduteka.icesi.edu.co/articulos/PruebasAbiertasCerradas

INTEGRALES DEFINIDA: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA CON EL USO DE GEOGEBRA

Susana DE TOMA[1,2], Mariana PÉREZ[1,3]
[1] Instituto de Tecnología e Ingeniería, Universidad Nacional de Hurlingham
[2] Instituto de Formación Docente N°106, Argentina.
[3] Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
susana.detoma@unahur.edu.ar, mariana.perez@unahur.edu.ar

Resumen

Este trabajo propone una secuencia didáctica basada en el modelo TPACK para la enseñanza del concepto de la integral definida, como área bajo la curva, para estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería. Este modelo didáctico fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006) y aborda la problemática de integrar la tecnología en el aula para la enseñanza de un contenido matemático, describiendo los tipos de conocimiento que el profesor necesita para la efectiva enseñanza de un contenido específico por medio de la tecnología.

En este artículo se presentan dos problemas para ser analizados desde el entorno gráfico y algebraico que ofrece GeoGebra, recorriendo sus distintas vistas. El primer problema constituye la antesala de la formalización del concepto de la integral definida y el segundo avanza sobre la problemática del primero, generando una resolución mejor.

La propuesta presentada posibilita a los estudiantes la comprensión del concepto de la integral definida a través del acercamiento al valor de un área desconocida. El uso de GeoGebra permite la realización de aproximaciones sucesivas a través de la suma de un número suficientemente grande de pequeñas áreas conocidas. Complementa esta propuesta el uso de Applets de GeoGebra.

Palabras clave: Secuencia Didáctica - Integral Definida – GeoGebra - Modelo TPACK.

Introducción

Este trabajo surge a partir de la necesidad de mejorar la comprensión que tienen los estudiantes del concepto de la integral definida, mediante el uso de un software de libre acceso como es GeoGebra. Este surgió en el marco de una Especialización en Docencia Universitaria que las autoras realizaron.
La enseñanza mediada por la tecnología nos posibilita volver a mirar nuestras propuestas de enseñanza y encontrarles a las tecnologías, un sentido pedagógico y didáctico potente. Particularmente cómo entramar lo nuevo con lo viejo y otorgarles más y mejores significados. Teniendo en cuenta, además, el lugar que ocupa la tecnología en relación a los modos en que el conocimiento se produce y difunde y la necesidad epistemológica de su inclusión en las prácticas de enseñanza (Maggio, 2012).
La enseñanza depende en gran medida del acceso del que se dispone, al conocimiento profundo de una determinada área del conocimiento integrado con otros dominios del saber que contemplan el conocimiento sobre el pensamiento y los modos de aprendizaje de los estudiantes, con el contenido a enseñar y el uso de la tecnología. Sin olvidar, la diversidad de los contextos de enseñanza, que además son únicos (Koehler, Mishra y Cain, 2015).
Esta forma de enseñanza requiere del contenido, de la pedagogía, de la tecnología y de las interacciones múltiples y profundas entre ellos. Si no hay dudas acerca de que un saber a enseñar sufre necesariamente un conjunto de transformaciones que van a hacerlo objeto de enseñanza (transposición didáctica, Chevallard, 1991), tampoco habrá dudas sobre esta nueva transformación con el uso de la tecnología. La irrupción de la tecnología en las clases cambia no solo la mirada sobre el saber y los modos de enseñanza sino también sobre los múltiples modos de acceso a ese saber y en consecuencia las múltiples formas de aprendizaje que ese acceso posibilita.
Las interacciones entre conocimiento, pedagogía, tecnología y los contextos diversos en los que desarrollan constituyen el marco de este trabajo. Nuestra propuesta de enseñanza requiere del uso de GeoGebra para explorar distintos comportamientos del objeto de estudio. Propone integrar el conocimiento matemático, didáctico y tecnológico mediante el modelo TPACK (Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido a Enseñar). Este modelo didáctico fue desarrollado por Mishra y Koehler (2006) y aborda la problemática de integrar la tecnología en el aula para la enseñanza de la ciencia, describiendo los tipos de conocimiento que el profesor necesita para la efectiva enseñanza de un contenido específico por medio de la tecnología.

El marco TPACK y los saberes que lo componen en contexto

El modelo TPACK queda conformado por:

Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK): constituye el conocimiento pedagógico que es aplicable a la enseñanza de un contenido específico.
Conocimiento Tecnológico del Contenido (TCK): es la comprensión de cómo la tecnología y el contenido se interrelacionan.
Conocimiento Tecnológico Pedagógico (TPK): es el entendimiento de cómo la enseñanza y el aprendizaje pueden cambiar cuando las tecnologías específicas son utilizadas de forma concreta.
Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK): es una forma emergente de conocimiento que va más allá de las tres componentes: contenido, pedagogía y tecnología.

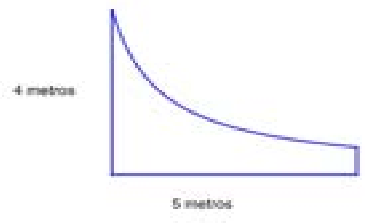
El TPACK es la base para una enseñanza con tecnología. Este requiere de técnicas pedagógicas que utilizan tecnología de manera constructiva, conocimiento de qué es lo que hace complejo aprender ciertos conceptos y cómo la tecnología puede redireccionar algunos de los problemas que enfrentan los estudiantes y, además de cómo éstas pueden ser utilizadas para construir a partir del conocimiento existente nuevos conocimientos.
Todo lo anterior se encuentra inserto en un contexto determinado, en una determinada aula, con un grupo determinado de estudiantes y con un determinado profesor. Por ello resultan centrales las habilidades de los profesores para recorrer flexiblemente los espacios definidos por los tres elementos del modelo y las interacciones complejas entre éstos, en contextos específicos (Koehler, Mishra y Cain, 2015).
Nuestra propuesta de enseñanza requiere del uso de GeoGebra para explorar aproximaciones al concepto de la integral definida, proponiendo integrar el conocimiento matemático, didáctico y tecnológico mediante el modelo TPACK. Para ello consideramos como *conocimiento pedagógico*, el Constructivismo, *conocimiento del contenido,* la integral definida y como *conocimiento tecnológico*, el GeoGebra.

La finalidad de la intersección de estos conocimientos posibilita que los estudiantes exploren y argumenten, en un primer momento, con la noción de área como la suma de rectángulos por exceso y por defecto y en un segundo momento, relacionar estas ideas con el concepto de la integral definida como límite de áreas.
A partir de problemas propios del área de competencia profesional se propone la resolución mediante la exploración algebraica y geométrica que permite la modelización matemática. Se arribará a una aproximación del concepto de límite que conlleva a la definición de la integral definida. El GeoGebra posibilita representaciones diversas de los objetos matemáticos, fundamentalmente las vistas gráficas y algebraica, conjugando lo experimental y lo conceptual que ayuda a nuestros estudiantes a visualizar contenidos matemáticos que son más complicados de comprender desde un dibujo estático. Les permite, además, realizar construcciones de manera rápida y sobre todo les permite probar, ensayar y explorar.

Secuencia didáctica: el problema sobre cortes de una máquina

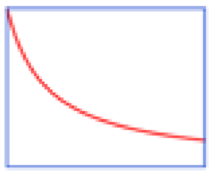
Generalmente se piensa en el área como una magnitud que mide el tamaño de una región acotada. Cuando estas regiones tienen la forma de alguna figura geométrica conocida como un rectángulo o un trapecio se disponen de fórmulas para calcular su área. Si en cambio, ahora tenemos una región acotada de la que no conocemos la fórmula para encontrarla, necesitamos disponer de alguna estrategia para poder aproximarnos a dicha medida.
Se proponen actividades que permiten, en una primera etapa, introducir en contexto la necesidad de dar una estrategia para encontrar el área de una figura acotada de la que no se conoce su fórmula. Para ello se consideran uniones de rectángulos que "se acercan" a la figura considerada. En particular, en su resolución se puede observar que el área de estas uniones se aproxima, cuando subdividimos la base de cada uno de ellos y ajustamos su altura, a un valor común, que se denomina el área de la figura en cuestión. En una segunda etapa se propone, a partir de este refinamiento, definir el concepto de sumas superiores e inferiores de una función continua $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ asociada a una partición de puntos del intervalo $[a, b]$ y del concepto de integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, como límite de dichas sumas. Por último, se propone una aproximación al área a partir de trapecios que permite desarrollar una estrategia más efectiva. Para lograrlo, resulta necesario el uso de un software, en este caso GeoGebra.
Los conocimientos que se necesitan para abortar estas actividades son el cálculo de áreas de rectángulos y trapecios, el límite de una sucesión y el concepto de función continua; como así también tener cierto manejo básico del software.

Problema 1*: Una fábrica de láminas de acero necesita realizar piezas como muestra la figura***:**



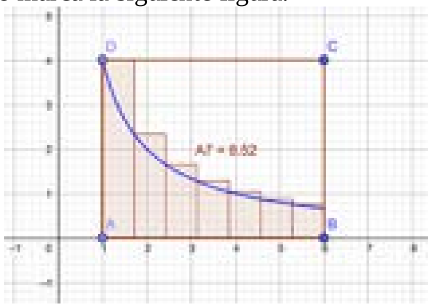
Para ello compró láminas rectangulares de 5 metros de largo y 4 metros de ancho. Se utiliza una máquina que realiza cortes solamente en forma horizontal y en forma vertical. Todos los cortes horizontales tienen la misma longitud.
a) Indicar una estrategia de corte para que la pieza resultante sea lo más parecida posible al producto final para determinada cantidad de cortes c (c=6, 12).
b) Sabiendo que la empresa necesita que la pieza tenga un área de $4 \cdot ln(6)$ metros cuadrados (7.16703 m^2 aproximadamente), analice cuál es el desperdicio de chapa con cada una de las posibilidades.

Los estudiantes disponen del siguiente dibujo, presentado en GeoGebra, donde se les ofrece la lámina rectangular de 5 metros de largo y 4 metros de ancho (figura en azul) y la lámina de acero que la fábrica quiere construir (figura en rojo).

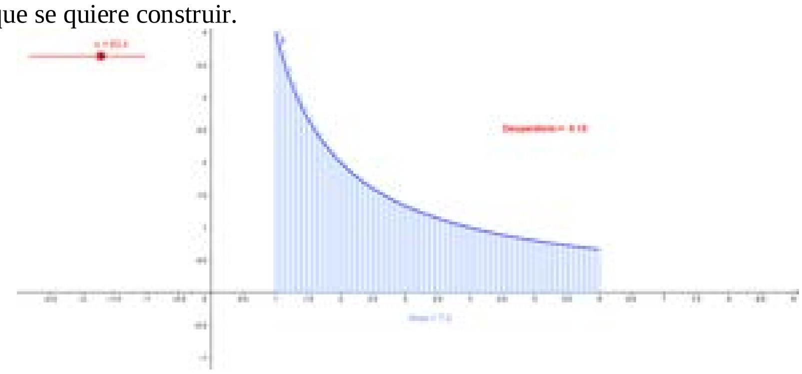


Los cortes horizontales y verticales van a dar lugar a la formación de rectángulos. En la primera etapa, la máquina realiza c=6 cortes. Como los cortes horizontales tienen todas las mismas medidas; éstos formarán n=4 rectángulos; cada uno de estos rectángulos tienen base 1.25 m. La altura de cada uno de estos rectángulos se forma con el valor máximo que alcanza la curva azul (G, H, I, J) en cada uno de los intervalos formados por las bases de los rectángulos.

Con la vista algebraica se puede realizar el siguiente cálculo del área total de la figura armada con los cortes realizados por la máquina: *A=Área rectángulo AGFB +Área BHKC +Área CILD + Área DJME = 5 + 2.22 + 1.43 + 1.05 = 9.7 m^2*. Si queremos el desperdicio de chapa que produce la máquina, se puede realizar el siguiente cálculo: *Desperdicio:=|4.ln(6)-9,7|=2.532962 m^2*.
De la misma manera, podemos usar esta estrategia para cada uno de los valores de c. Por ejemplo, si c=12 necesitamos n=7 rectángulos, como marca la siguiente figura.



En este caso el área total de los rectángulos es: 8.52 m^2 y el desperdicio es |4.ln(6)-8.52|=1.352962 m^2.
En la siguiente Applet de GeoGebra se puede observar la estrategia de corte para que la pieza resultante sea lo más parecida a la original. Los rectángulos formados tienen como base la misma la longitud y como altura el máximo alcanzado por la curva en el intervalo dado por la base. En esta construcción dinámica *n* indica la cantidad de rectángulos y *Área* el área total de cada una de las figuras rectangulares formadas por la máquina y *Desperdicio* cuál es el desperdicio realizado, es decir cuánto se aproxima la figura hecha por la máquina y la figura de acero que se quiere construir.



Podemos observar que a medida que realizamos más cortes horizontales y verticales, que *n aumenta*, nos acercamos por exceso cada vez más a la pieza de acero que hay que realizar.
En el siguiente link se puede acceder a la Applet construida: https://www.geogebra.org/m/xd8uvu2x
También se puede encontrar en https://www.geogebra.org/classic/er4v3kh3
En la Tabla 1 se observa las distintas áreas de los n rectángulos formados por exceso y el desperdicio ($|4 \cdot \ln(6) - Área|$ en m^2) al realizar los cortes.

n	Área (en m^2)	Desperdicio (en m^2)
4	9.703	2.536
9	8.19	1.023
14	7.803	0.636
19	7.628	0.461
24	7.528	0.361
29	7.464	0.297
34	7.419	0.259
39	7.389	0.219
44	7.361	0.194
49	7.34	0.173
54	7.324	0.157
59	7.311	0.144
64	7.299	0.132
69	7.29	0.122
74	7.281	0.114
79	7.274	0.1017
84	7.267	0.1
89	7.262	0.095
94	7.257	0.09
99	7.252	0.085
104	7.248	0.081
109	7.244	0.077
114	7.241	0.074
119	7.238	0.071

Tabla 1. Distintas áreas de rectángulos en función de los cortes por exceso

Podemos preguntarnos: ¿qué ocurre con el Desperdicio a medida que n aumenta?, ¿qué significa este proceso con respecto a la pieza que realiza la máquina y la pieza de acero que se quiere construir?
Si observamos que esta estrategia de corte es por exceso, entonces ¿cómo sería la estrategia de corte si los rectángulos hallados se aproximaran por defecto a la pieza que se quiere construir?
Si la construcción fuera por defecto se debe elegir para la altura el mínimo que alcanza la curva en cada una de las bases de los rectángulos. En el siguiente link se puede acceder a esta estrategia:
https://www.geogebra.org/classic/fv6mymbn
En la Tabla 2 se observa las distintas áreas de los n rectángulos formados por defecto y la diferencia ($|4\cdot\ln(6)-Área|$ en m^2) al realizar los cortes.

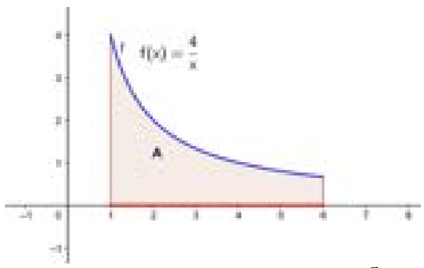
n	Área (en m^2)	Diferencia (en m^2)
4	5.537	1.63
9	6.338	0.829
14	6.613	0.554
19	6.751	0.416
24	6.834	0.333
29	6.889	0.278
34	6.929	0.238
39	6.959	0.208
44	6.982	0.185
49	7	0.167
54	7.015	0.152
59	7.028	0.139
64	7.039	0.128
69	7.048	0.119
74	7.056	0.111
79	7.063	0.104
84	7.069	0.098
89	7.074	0.093
94	7.079	0.088
99	7.084	0.083
104	7.088	0.079
109	7.091	0.076
114	7.095	0.072
119	7.098	0.069

Tabla 2. Distintas áreas de rectángulos en función de los cortes por defecto

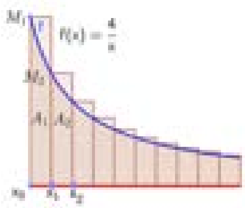
Nos preguntarnos: ¿qué ocurre con la Diferencia a medida que la cantidad n de rectángulos aumenta?, ¿qué significa este proceso con respecto a la pieza que realiza la máquina y la pieza de acero que se quiere construir?
A medida que agregamos más rectángulos nos acercamos por defecto a la construcción buscada.
A partir de este problema se puede definir las sumas superiores e inferiores y la integral definida de una función continua en un intervalo acotado.

Formalización del problema

La pieza que se quiere construir está dada por la función continua $f\colon[1,6]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}$. Queremos encontrar el área **A** bajo la curva en $[1,6]$.



Para ello dividimos $[1,6]$ en n subintervalos $[x_{i-1},x_i]$ con longitud $\frac{5}{n}$, con los puntos $1=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=6$. Tomamos el punto M_i como el máximo que alcanza la función en cada sub-intervalo. Como la función decrece $M_i=f(x_{i-1})$.
El área de los rectángulos construidos por exceso resulta ser $A_i \coloneqq Área(R_i)=M_i.(x_i-x_{i-1})=M_i.\frac{5}{n}$.



El área total de los n rectángulos hallados es

$$S_n := A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \frac{5}{n}.(M_1 + M_2 + \cdots . + M_n).$$

Esta suma de las áreas de los rectángulos se llama *Suma Superior de Riemann*. Observemos que $M_i = f(x_{i-1}) = \frac{4}{x_{i-1}}$. Como $x_i - x_{i-1} = \frac{5}{n}$, entonces $x_i = x_0 + \frac{5i}{n} = 1 + \frac{5i}{n} = \frac{5i+n}{n}$. De esta manera, tenemos que

$$S_n = \frac{5}{n}.(M_1 + M_2 + \cdots . + M_n) = \frac{20}{n}.\left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}}\right) = \frac{20}{n}.\sum_{i=0}^{n-1} \frac{n}{n+5.i}$$

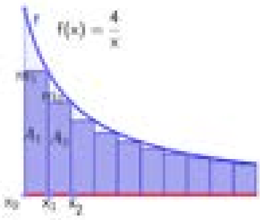
Por lo tanto, $S_n := 20.\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+5.i}$.

En la Tabla 1 se observa que si $n \leq m$ entonces $S_m \leq S_n$. Por lo tanto, $S_n \leq S_{n-1} \leq \cdots \leq S_1$.

Además, se tiene que **A** satisface:

$$\mathbf{A} \leq S_n, \forall\, n \qquad (1).$$

Si calculamos los rectángulos por defecto, tomamos el punto m_i como el mínimo que alcanza la función en $[x_{i-1}, x_i]$. Como la función decrece, $m_i = f(x_i)$, y el área de cada uno de los rectángulos construidos es $A_i := Área(R_i) = m_i.(x_i - x_{i-1}) = m_i.\frac{5}{n}$.



El área total de los n rectángulos es

$$s_n := A_1 + A_2 + \cdots + A_n = \frac{5}{n}.(m_1 + m_2 + \cdots . + m_n).$$

Esta suma se llama *Suma Inferior de Riemann*. En este caso , se tiene que $m_i = f(x_i) = \frac{4}{x_i}$. Como $x_i - x_{i-1} = \frac{5}{n}$, entonces $x_i = x_0 + \frac{5i}{n} = 1 + \frac{5i}{n} = \frac{5i+n}{n}$. Por lo tanto,

$$s_n = \frac{5}{n}.(m_1 + m_2 + \cdots . + m_n) = \frac{20}{n}.\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{20}{n}.\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+5.i}$$

Entonces, $s_n := 20.\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+5.i}$.

En la Tabla 2 se observa que si $n \leq m$ entonces $s_n \leq s_m$. Por lo tanto, se tiene que $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n$.

Además, se cumple que

$$s_n \leq \mathbf{A}, \forall\, n \qquad (2).$$

De (1) y (2) tenemos que **A** satisface $s_n \leq \mathbf{A} \leq S_n\ \forall\, n$.

Nos preguntarnos ¿qué sucede con S_n y s_n a medida que n aumenta?, y más en general, ¿Qué ocurre con estas áreas a medida que n crece indefinidamente?

Si queremos calcular los límites de las sucesiones S_n y s_n recurrimos a GeoGebra en su vista CAS.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 4.\ln(6) \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} s_n = 4.\ln(6)$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 4.\ln(6) \qquad (3)$$

De $s_n \leq \mathbf{A} \leq S_n$ y (3), deducimos que $\mathbf{A} := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 4.\ln(6)$.

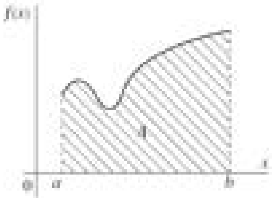
Este número **A** se lo conoce como la *Integral Definida de la función f en el intervalo [1,6]* y se denota con $\int_1^6 \frac{4}{x}\, dx$. Concluimos,

$$\mathbf{A}=\int_1^6 \frac{4}{x}dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 4.\ln(6)$$

A partir de este ejemplo se podría construir las Sumas de Riemann asociadas a cualquier $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ y definir la integral $\int_a^b f(x)dx$ como área de la región formada por la curva f(x) y las rectas x=a y x=b.

Aproximación a la definición de integral definida

Sea una función continua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x\epsilon[a,b]$, y sea A el área determinada por la región acotada que se forma por la función f(x) y las rectas x=a y x=b.



Dividimos $[a,b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$, de longitud $\frac{b-a}{n}$, con $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.
Como la función es continua en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ alcanza un máximo M_i y un mínimo m_i, o sea existe $c_i, d_i\, \epsilon [x_{i-1}, x_i]$ tal que $M_i = f(c_i)$ y $m_i = f(d_i)$.
Como $(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}$, la *Suma Superior de Riemann* es

$$S_n := \frac{b-a}{n}.(M_1 + M_2 + \cdots. + M_n),$$

y la *Suma Inferior de Riemann* es

$$s_n := \frac{b-a}{n}.(m_1 + m_2 + \cdots. + m_n).$$

Se puede observar las siguientes propiedades

1. Si $n \leq m$ entonces $S_m \leq S_n$.
2. $A \leq S_n$, para cualquier n.
3. Si $n \leq m$ entonces $s_n \leq s_m$.
4. $s_n \leq A$, para cualquier n.

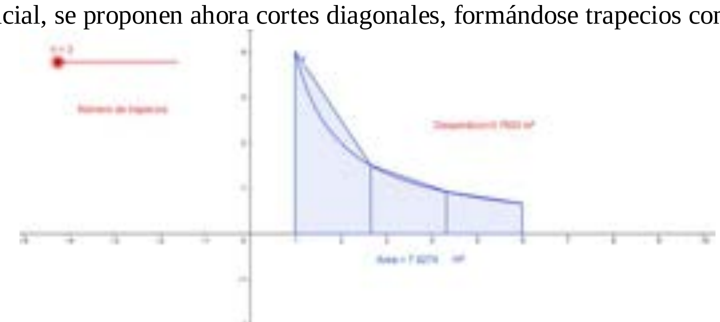
Como $s_n \leq A \leq S_n$ y $\lim_{n\to\infty} S_n$ y el $\lim_{n\to\infty} s_n$ existen y coinciden, se define la *Integral Definida* $\int_a^b f(x)dx$ *de* f *en el intervalo* $[a,b]$ como este número, que representa el área A bajo la curva dada por f(x), x=a y x=b (ver, GarcíaVenturini y Scardigli, 2012).

Secuencia didáctica: una mejor solución al problema sobre cortes de una máquina

Problema 2. *Supongamos que la empresa que quiere realizar las láminas de acero compra una nueva máquina que realiza no solo cortes horizontales y verticales, sino también cortes en diagonal.*

a. ¿Cuál sería la estrategia de corte para que la pieza resultante sea lo más parecida posible al producto final, si se admiten cortes en diagonal?
b. Analice el desperdicio de la chapa para cada una de las posibilidades, sabiendo que el área de la pieza que se quiere armar es de $4.\ln(6)$ m^2**.**

Siguiendo la idea inicial, se proponen ahora cortes diagonales, formándose trapecios como se muestra:



En el siguiente link se observa que a medida que *n* aumenta, la figura se acerca cada vez más a la figura original: https://www.geogebra.org/classic/h6uwh7fc
En la Tabla 3 se observa este proceso de construcción:

n	Área	Desperdicio
1	11.6667	4.4996
4	7.6201	0.4531
9	7.2643	0.0972
14	7.2079	0.0408
19	7.1893	0.0223
24	7.181	0.014
29	7.1766	0.0096
34	7.174	0.007
39	7.1724	0.0053
44	7.1712	0.0042
49	7.1704	0.0034
54	7.1698	0.0028
59	7.1694	0.0023
64	7.169	0.002
69	7.1687	0.0017
74	7.1685	0.0015
79	7.1683	0.0013
84	7.1682	0.0011
89	7.1681	0.001
94	7.168	0.0009
99	7.1679	0.0008
104	7.1678	0.0007
109	7.1677	0.0007
114	7.1677	0.0006
119	7.1676	0.0006

Tabla 3. Distintas áreas de trapecios en función de los cortes

Si observamos las tres tablas se puede ver que con trapecios se obtiene una mejor aproximación al área buscada que con los rectángulos. Por ejemplo, si n=54 tenemos una aproximación a dos decimales al área.

Conclusiones

¿Qué aporta de diferente la tecnología para la propuesta de enseñanza sobre la integral definida aquí desarrollada? ¿Qué decisiones pedagógicas hemos tenido que tomar y si estas fueron en el sentido de favorecer la profundidad del contenido y no su mera extensión? ¿En qué medida las actividades propuestas multiplican los sentidos para nuestros/as estudiantes más allá de qué son temas que necesitan saber y que hay que enseñar? ¿Cómo entramar lo nuevo con lo viejo? ¿Hay otros modos de enseñar? ¿Qué posibilidades de exploración y de descubrimiento les proponemos a nuestros/as estudiantes?

Respondemos a estas preguntan afirmando que la tecnología nos permitió otras miradas sobre la integral definida con el uso de GeoGebra, que en la enseñanza clásica resulta complejo de comprender. Permite variar parámetros y observar las modificaciones en forma instantánea, lo que facilita la comprensión y la profundidad de los conceptos; permite hacer y hacernos nuevas preguntas, posibilita al estudiante interactuar con las variables, probar, ensayar, hacer conjeturas y ponerlas a prueba.

Todas estas acciones propias de la matemática se ven ampliamente facilitadas por la tecnología; ya que la actividad matemática no es solo encontrar la respuesta correcta, sino también la elaboración de hipótesis, de conjeturas que son confrontadas con otras y testeadas en la resolución del problema.

Referencias Bibliográficas

[1] Chevallard, Y. (1991), La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado, Aique, Buenos Aires, 1991.

[2] García Venturini, A., y Scardigli, M. (2012). Análisis Matemático I para estudiantes de Ingeniería (5ta. edición). Ediciones Cooperativas. Buenos Aires.

[3] Koehler, M. J., Mishra, P., & Cain, W. (2015). ¿Qué son los Saberes Tecnológicos y Pedagógicos del Contenido (TPACK)? Virtualidad, Educación Y Ciencia, 6(10), pp. 9–23. Recuperado a partir de https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/11552

[4] Maggio, M. (2018) Reinventar la clase en la universidad (1ra. edición). Buenos Aires: Paidós.

[5] Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for integrating technology in teacher knowledge. Teachers College Record, 108 (6), pp. 1017-1054.

METEORITOS Y MATEMÁTICA: EXPLORANDO IMPACTOS

Juan Pablo SIMONETTI[1,2,3], Vanesa Paola VARGAS[2]
[1]UNPSJB, Sede Trelew
[2]ISFD Nº 808
[3]Escuela Nº 7721
juanpablosimonetti@gmail.com, vane.p.vargas87@gmail.com

Resumen

La siguiente programación didáctica tiene como intención que las y los estudiantes, a partir de la experimentación, puedan conjeturar y construir modelos matemáticos que describan la caída de un meteorito en tierra y el tamaño del cráter que produce. La modelización se realizará en diferentes etapas y considerando distintas variables a la hora de realizar el estudio. En particular: el vínculo entre la altura de la que cae un cuerpo y la profundidad y diámetro del cráter que realiza al golpear un suelo compuesto por un material determinado (harina), considerando fijos su tamaño y masa durante la caída. Las funciones lineales aparecen, en este contexto, como opciones adecuadas de respuesta, dado que forman parte de los saberes matemáticos que los y las estudiantes disponen, permitiendo resignificar y problematizar conceptos como función, variables, correspondencia y dominio e imagen, de cara a la construcción de los conceptos de modelización matemática.

Palabras clave: Modelización Matemática – Función – TIC - Escenario de Modelización.

Introducción

Esta producción navega en dos universos diferentes: la enseñanza secundaria y la superior, en un entrecruce que, si bien apela a las mismas actividades, tienen destinos diferentes. Para el colegio secundario se busca realizar un trabajo matemático que involucre un proceso de modelización, usando herramientas matemáticas ya conocidas; en el Nivel Superior se pretende que las y los estudiantes del profesorado, además de recorrer el proceso mencionado, puedan llevar adelante una reflexión al respecto, que si bien no será analizada en el transcurso de la secuencia, se espera recuperar en otros espacios de la formación.

Según el Diseño Curricular de Matemática de la Provincia de Chubut, las y los estudiantes de 6to año deben acceder a propuestas educativas donde utilicen el lenguaje algebraico para modelizar situaciones intra y extra matemáticas (p. 276). Donde el lenguaje funcional debiera hacer uso de diferente tipos de registros, esto es: tablas, leyes de formación y/o gráficos, y donde esta pluralidad de representaciones permita su constitución en objetos matemáticos (Pochulu, 2013) por parte del estudiantado. En el Nivel Superior el uso de modelos para la construcción de saberes disciplinares tiene fundamentos similares. Según el INFOD (2010, p. 29) las y los futuros profesores deben de poder acceder a experiencias educativas que permitan la construcción de modelos funcionales polinómicos para la descripción de situaciones de la realidad física.

Así, proponemos una problemática, muy simplificada de un fenómeno físico que si bien no es habitual, es convocante y representativa de las acciones matemáticas que se deben llevar a cabo dentro de ambos niveles educativos. Aquí la modelización matemática se presenta como una posibilidad de poner a circular en el aula la construcción, profundización y resignificación de los conceptos de variables, correspondencia, dominio e imagen, interpretación de gráficos y función lineal. Además, se pretende dar apertura a un espacio que permita vivenciar las distintas etapas de un proceso de modelización matemática.

La construcción de esta secuencia didáctica atiende a la realidad de nuestro contexto, situación actual, tiempos, espacios y conocimientos con los que cuentan nuestros y nuestras estudiantes, donde consideramos que la irrupción de la pandemia nos ha enseñado a considerar las herramientas digitales desde la potencialidad que tienen y el enriquecimiento que aportan a las propuestas pedagógicas. La secuencia didáctica que presentamos ha sido diseñada, pensada y organizada desde una metodología de enseñanza híbrida: encuentros asincrónicos mediante una plataforma virtual y momentos presenciales dentro de los cursos. Se espera llevarla a cabo al comenzar el ciclo escolar 2022, proponiéndonos recabar datos y registrar lo acontecido, de cara a realizar un análisis investigativo de la implementación de la propuesta y sus resultados.

Marco Teórico

Detrás de toda planificación docente, hay un posicionamiento en el que pararse y considerar los conocimientos y objetos matemáticos, la manera en cómo ponerlos en funcionamiento deja a la luz los supuestos implícitos en relación a la enseñanza y el aprendizaje. Para la planificación y construcción de esta secuencia didáctica, consideramos lo sostenido por Cristina Esteley (2014): “(un) escenario de modelización se caracteriza por la presencia de un conjunto de espacios, situaciones, circunstancias, materiales, acciones e interacciones que confieren un sentido al proceso (de aprendizaje) y con ello transforma ese conjunto en una experiencia cuyo fin es llevar al aula la modelización” (p. 86).

Nuestro propósito descansa, entonces, en construir un escenario de modelización matemática en el que la incorporación de recursos tecnológicos y digitales, legitimados desde la institución escolar y el contexto social, modifiquen no sólo la praxis, sino también los valores pragmáticos y epistemológicos de los objetos matemáticos implicados que adquieren sentido en la situación problemática que se plantea en el escenario. Adherimos a lo sostenido por Almeida y Silva (2015) que la modelización se propone dar respuesta a una problemática cuyo origen no está en las matemáticas. Desde aquí, se parte de considerar que un modelo matemático está asociado con esa respuesta. La matematización de la situación permite construir un sistema conceptual, descriptivo y explicativo, cuyo propósito es representar el comportamiento de una situación mucho más compleja, que entre otras potencialidades, permite realizar predicciones sobre el fenómeno estudiado. Podemos afirmar entonces, que el modelo matemático permite describir, explicar y predecir el comportamiento de un fenómeno (Almeida y Silva, 2015, p. 211) e incluye:

- Interpretar, ya que requiere conocimiento extra e intra matemático, describir ideas, organizar información, establecer supuestos, relatar el proceso;
- Representar la información en distintos registros, ya sea con lenguaje coloquial, con símbolos, con lenguaje matemático; construir diagramas, esquemas, figuras, gráficos, imágenes;
- Utilizar diferentes medios de representación, como ser el lápiz y papel, objetos físicos, realizar una simulación, herramientas digitales y tecnológicas;
- Matematizar, es decir, utilizar conceptos y procedimientos matemáticos.

Con base en lo dicho, consideramos que un modelo matemático es una forma matemática de percibir la realidad. Por ello nos proponemos convocar a los y las estudiantes a una situación que emerge del imaginario social, introducida por los medios de comunicación y la industria del cine: el impacto de un meteorito fatal sobre la tierra. Sostenemos que necesariamente, al crear un modelo se establecerán supuestos y se simplificará esa realidad, por lo que el resultado se verá restringido a las variables que se consideren importantes de recuperar y las variables que se desestimen.

En el desarrollo de las tareas usaremos software matemático como herramienta que enriquezca la creación de los escenarios de aprendizajes. Donde los objetos matemáticos, en particular las funciones polinómicas lineales, se encuentran implicadas y adquieren sentido para comprender la situación problemática, analizarla, describirla, explicarla y resolverla, puesto que el uso de las herramientas TIC resulta crucial para la enseñanza de las funciones en general. Sanes (2020, p.9) recupera de Artigue (2016-a) que "las potencialidades que brinda la tecnología en torno a las funciones pueden sintetizarse respecto a la programación, la representación, a dar experiencia física a conceptos abstractos y a la visualización". De allí que deviene útil y necesario el uso de éstas herramientas dado que permiten gestionar de maneras más completas y complejas que el uso del papel y el lápiz, la potencialidad modeladora de las funciones.

Enseñar con estas herramientas requiere elaborar tareas donde los objetivos no sean la mera manipulación de un Software o una aplicación. Se requiere que las mismas sean pertinentes y significativas (Rodríguez, 2016), en tanto su uso, por parte de las y los estudiantes, aporten a la comprensión del objeto a aprender. Por ello, a la hora de diseñar nuestra propuesta de enseñanza, tomamos como base la construcción de consignas enriquecidas con TIC mediante criterios directores que se encuentran en Rodríguez (2016, p. 69).

Pensar la construcción de una propuesta híbrida, conlleva el esfuerzo de diseñar estrategias de enseñanza donde recursos como foros de discusión, wikis, plataformas virtuales y herramientas de mensajería creen puentes con los encuentros presenciales, en el que el debate y la confrontación de ideas sean verdaderas oportunidades de aprendizaje, permitiendo la mediación entre estudiantes y contenidos, entre las y los propios estudiantes y entre docentes y estudiantes. La figura del docente se hace potente, puesto que sin esa mediación no habría conversación, reflexión y confrontación dentro del grupo, "la interacción entre alumno y contenido, [...], no garantiza por sí sola formas óptimas de construcción de significados y sentidos" (Onrubia, 2005. p. 4).

<u>Propuesta de Enseñanza</u>

Seguidamente, compartimos las actividades y tareas que proponemos en las diferentes clases, enmarcadas en una propuesta híbrida.

<u>Clase 1</u> - Propuesta Asincrónica

Actividad Introductoria: Meteoritos y su impacto en la Tierra

Los y las estudiantes poseen conocimientos y saberes previos que utilizan en su encuentro con la información, procesándola y construyendo sentido acerca de la misma y su entorno. La problemática de la posible caída de un meteorito o un asteroide en la Tierra siempre se ha escuchado y es una situación que forma parte del imaginario colectivo, fantasear con ella o preguntarse *¿Qué sucedería si…?* no es algo ajeno para los y las estudiantes o por lo menos ello esperamos.

El muro de Padlet reúne información que se presenta en formato de artículo escolar, en material audiovisual y en artículos periodísticos. La lectura y visualización de estos materiales permite introducir a los y las estudiantes a la temática que se desea abordar: el cráter como impacto de un meteorito en la Tierra. La selección de los recursos apunta a considerar la problemática real desde su mirada natural, social, tecnológica y política.

La Actividad 1 se propone como momento de reflexión, las preguntas no tienen respuesta única, por lo que las consideraciones y reflexiones que realice cada estudiante en el muro de Padlet será enriquecedor para ir construyendo las primeras aproximaciones a la temática. Se espera que el alumnado logre reconocer la situación de impacto de un meteorito con la Tierra, el cráter que dejaría, su forma y dimensiones. Podrán considerarse otras variables que son necesarias a la hora de evaluar el impacto de un meteorito en la superficie terrestre, sin embargo, las mencionadas otorgan una base sólida para comenzar a modelizar la situación.

Actividad 1:
Los y las invitamos a recorrer el Padlet, los videos que se encuentran compartidos en él y los artículos. Luego les solicitamos responder las siguientes preguntas a partir de la reflexión de los materiales:

a) La forma que deja el impacto de un meteorito en la tierra ¿será siempre circular? ¿Cómo podrías describir la forma de un cráter?
b) ¿Existirá una relación entre el tamaño del meteorito y su impacto en la Tierra? ¿Podrías enunciar alguna conjetura?
c) ¿Qué características de un meteorito habría que tener en cuenta si quisiéramos "medir" el impacto del mismo en la tierra?
d) ¿Qué características tienen los cráteres que podrían describir el impacto de un meteorito en la Tierra?
e) Teniendo en cuenta el artículo periodístico compartido en el Padlet titulado "*Un simulacro de un impacto de un asteroide revela que destrozaría Europa*" ¿Qué contribuciones consideras que podría realizar la Matemática para realizar predicciones en relación al impacto de un meteorito en la Tierra?

Compartir las respuestas en el Muro de Padlet.

Clase 2 - Encuentro Sincrónico

Primer Momento: Puesta en común

La puesta en común busca recuperar las impresiones que los y las estudiantes han construido, las respuestas acerca de los interrogantes planteados en la Actividad 1, las nuevas preguntas que surgen a raíz de la reflexión sobre lo analizado y las variables tenidas en cuenta a la hora de pensar en modelizar una situación en la que impacta un meteorito en la Tierra y su necesidad de "medir este impacto". Se proyectará en el aula el muro de Padlet, con el objetivo de tener a la vista los materiales compartidos y las intervenciones de los y las estudiantes como respuesta a las consignas de la clase anterior. El/la docente irá guiando el debate solicitando la fundamentación de las opiniones y afirmaciones. Se utilizará Mentimeter como medio para conocer las ideas que se han ido construyendo a partir de las reflexiones y las interacciones (https://www.menti.com/apnony7yb1).
La puesta en común hará hincapié en: las variables tenidas en cuenta a la hora de pensar en medir el impacto de un meteorito en la Tierra y los aportes de los conocimientos matemáticos para predecir y anticipar este impacto.

Segundo Momento: Actividad experimental

Se propondrá agruparse en pequeños grupos, con el fin de llevar adelante la experiencia de dejar caer un mismo objeto en harina desde diferentes alturas y anotar la profundidad y el diámetro del cráter que se forma con el impacto. El/la docente proporcionará los recipientes que pueden utilizar para llenar con harina.
Es necesario tener en cuenta que pueden surgir interrogantes propios de la experiencia, como por ejemplo, *¿cuál referencia tomar para medir la altura del objeto?, ¿qué significa dejar caer el objeto?, ¿por qué para algunos valores distintos de la altura, el diámetro del cráter o la profundidad del mismo no se modifican?, ¿cómo reconocemos cuál es el cráter para realizar las mediciones?* etc. Estas dudas se socializarán para que entre todos/as se tomen decisiones y se reflexione en relación a estos interrogantes. En todo momento se apuntará a complejizar la medición realizada mediante interrogantes que permitan poner en evidencia esta complejidad.
En relación a los recipientes, el/la docente será el encargado de proveer los mismos, es importante que brinden una superficie aceptable para recibir el impacto del objeto. La harina debe poder esparcirse bien y tomar determinada altura, en principio, mucho mayor que la altura del objeto. Se aclarará que es necesario que la harina del recipiente sea tamizada cada vez que se quiere realizar el experimento, ya que la misma debe estar correctamente esparcida, de lo contrario, si hay harina suelta el objeto puede hundirse.
Finalizada la clase se solicitará que los y las estudiantes analicen y valoren su propio aprendizaje y el de un compañero/a, completando una rúbrica:
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdUzZLvsA5W41Wmm_cUmyO8eXGVmbaTXKnlKTjL6moGAVcz9g/viewform.

Actividad 3:
En grupos de tres o cuatro estudiantes deberán realizar la siguiente experiencia: dejar caer un objeto sobre harina variando las alturas y tomando nota de las dimensiones del cráter que deja al impactar. Al menos realizar quince mediciones, variando las alturas.
Completar la siguiente tabla a medida que se va realizando la experiencia:

Altura	Diámetro del cráter	Profundidad del cráter
…	…	…

Tomar algunas fotos de la experiencia realizada en el grupo y guardarlas.

A continuación, se presenta una tabla elaborada a partir de la experiencia de dejar caer una bola de billar sobre harina variando la altura de caída.



Altura (cm)	Diámetro del cráter (cm)	Profundidad del cráter (cm)	Altura (cm)	Diámetro del cráter (cm)	Profundidad del cráter (cm)
5	5	1,6	30	6	2,5
10	5,3	1,8	35	6,5	2,5
15	5,5	2	40	6,5	2,5
20	5,8	2,1	45	6,5	2,5
25	5,6	2	50	6,5	2,5

Clase 3 - Propuesta Asincrónica

Primer Momento: Compartiendo experiencias

El muro de Padlet se presenta como un espacio en el que se reúnen las distintas experiencias, no sólo la tabulación de los datos obtenidos, sino los distintos objetos utilizados, la forma de realizar las mediciones, la organización de los roles en el grupo, etc. Por ello se les solicitará:

Actividad 4:
Organizarse al interior de cada grupo para participar en el Padlet, compartiendo lo siguiente:
- Dos fotos de la experiencia realizada en la que se pueda observar el objeto elegido, la forma en que se han realizado las mediciones y los instrumentos utilizados.
- Los nombres de los integrantes del grupo y el rol que ha cumplido cada uno en la experiencia.
- La tabla confeccionada a partir de los datos recogidos.
- Una conclusión cualitativa que han podido construir, a partir de la experiencia, del fenómeno analizado.

En relación a la conclusión, ir leyendo las intervenciones de sus compañeros y compañeras para no repetir las mismas observaciones.

Observar y reflexionar sobre la información recogida por otros grupos en relación a la experiencia y las conclusiones a partir de la observación del comportamiento del fenómeno analizado, serán claves para poder realizar una reflexión individual.

Segundo Momento: Análisis individual de la experiencia

Este momento será de análisis y reflexión individual de los datos recogidos, buscando que los y las estudiantes logren reconocer el fenómeno analizado como una modelización de un fenómeno más complejo. En este reconocimiento de la modelización del fenómeno, deberán determinar cuáles son las variables involucradas y cuáles han sido desestimadas. Una vez identificadas las variables deberán justificar cuáles son dependientes e independientes; es importante preguntarse si puede considerarse, a partir de los datos de la tabla, la existencia de una relación entre las mismas. Este trabajo de análisis individual se realizará por medio de un cuestionario que deberá ser entregado en el Aula Virtual.

Actividad 5: Cuestionario
A partir de la experiencia realizada, los datos recogidos y las observaciones acerca del fenómeno, responder:

a) Suponiendo que efectivamente la experiencia realizada es una modelización de la formación de cráteres por causa de la caída de meteoritos ¿Cuáles consideras que son las variables que se han tenido en cuenta para realizar el o los modelos? y ¿cuáles son las variables reales que se despreciaron (es decir que no se tuvieron en cuenta en la modelización)?
b) Centrándonos en las variables analizadas ¿Consideras que existe alguna relación entre la altura del objeto que cae y el diámetro del cráter que deja su impacto en la harina? Si respondiste que sí, explica con tus palabras cómo es esa relación. Si respondiste que no, explica por qué piensas esto.
c) ¿Consideras que existe alguna relación entre la altura del objeto que cae y la profundidad del cráter que deja su impacto en la harina? Si respondiste que sí, explica con tus palabras cómo es esa relación. Si respondiste que no, explica por qué piensas esto.
d) ¿Consideras que la velocidad con la que se realiza el impacto tendrá alguna relación con la altura con la que se deja caer el meteorito?
e) Analiza la siguiente afirmación: “A mayor altura, mayor diámetro del cráter. La altura y el diámetro del cráter son variables proporcionales entre sí”. ¿Es correcto lo que dice la afirmación? ¿Por qué?

Clase 4 - Actividad Sincrónica

Primer Momento: Puesta en común

El debate colectivo buscará recuperar la experiencia, las respuestas al cuestionario y la reflexión colectiva. El/la docente realizará interrogantes pertinentes que permitan reconocer que el fenómeno realizado y analizado en la experiencia es una modelización de la caída de un meteorito en la Tierra, que permite interpretar las dimensiones del cráter formado en su impacto con la superficie. En todo proceso de modelización hay variables que se tienen en cuenta y otras que se desprecian, el debate se centrará en si existen otras variables que forman parte de la situación y que no fueron tenidas en cuenta, pero que sería interesante analizarlas.
Además, se hará hincapié en que los datos recogidos como el diámetro y la profundidad, aunque en algunos casos se trate de la misma altura y de similares objetos, puede variar. Se recuperará la problemática de la medición con los instrumentos utilizados y la potencia de la matemática como una herramienta de aproximación.
En relación a las variables analizadas, se consultará sobre la existencia de relaciones entre ellas y se hará especial énfasis en la pregunta acerca de si consideran que la relación entre la altura/profundidad y altura/diámetro, son efectivamente funciones. También se problematizará si se trata de relaciones proporcionales o no, recuperando la última pregunta del cuestionario y considerando también la relación altura/profundidad. En todos los casos, se solicitará argumentos que expliquen las apreciaciones y consideraciones de los y las estudiantes. Para trabajar estas ideas, se propondrá el uso de Mentimeter como una manera de recoger las ideas construidas en torno a las relaciones entre las variables consideradas (https://www.menti.com/gwuwbd6hhj)

Segundo Momento: Modelizamos

Una vez reconocidas las variables y su dependencia/independencia y la relación funcional existente entre las duplas altura/diámetro y altura/profundidad, se propondrá encontrar los modelos matemáticos a partir de los datos obtenidos en la experiencia. Las consignas serán entregadas en etapas, destinando un tiempo prudencial para el trabajo con cada una de ellas. La actividad deberá ser resuelta por los mismos grupos que realizaron la experiencia y cada uno deberá entregarla resuelta por la plataforma del Aula Virtual.
El/la docente irá aclarando dudas generales sobre el uso de los softwares. Al final de la clase se aclarará que como los grupos han obtenido tablas diferentes, es esperable que los modelos matemáticos encontrados sean distintos. El debate del Cierre de clase se centrará en identificar el modelo lineal como un ajuste apropiado que expresa las relaciones entre las variables altura/diámetro, sus coeficientes y su significado en relación al fenómeno analizado y las similitudes y diferencias entre los modelos encontrados por cada grupo de trabajo.

Actividad 6:
Primera Parte: Con el uso de los software GeoGebra o Desmos

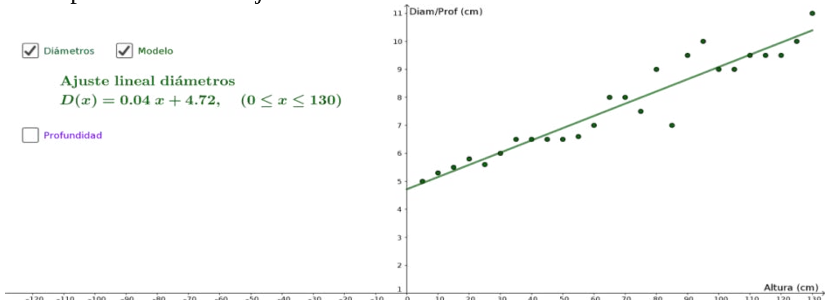
a) Utilizando la Hoja de Cálculo, incorporar los datos obtenidos altura/diámetro de la experiencia.
b) Crear a partir de la tabla anterior, los puntos que representan esos datos.
c) Si quisiéramos encontrar una función que se aproxime “mejor” a los puntos graficados ¿qué forma tendría su gráfico? ¿Sería alguna función conocida?

Segunda Parte:

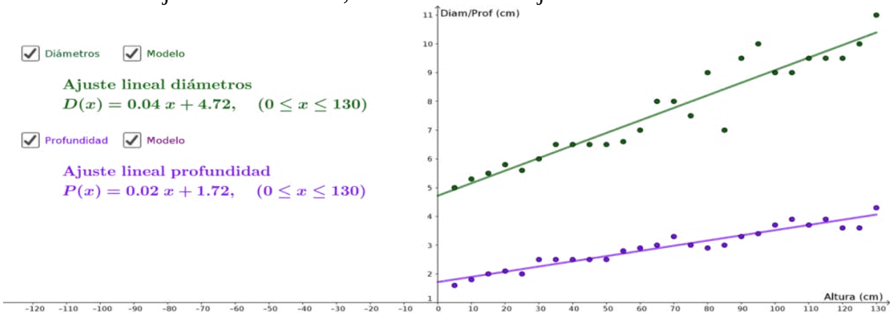
a) Si utilizan GeoGebra, con la opción de Ajuste, elegir el modelo funcional que aproxime mejor a los puntos graficados. Si utilizan Desmos, proponer un modelo específico (para más referencias pueden ver el siguiente tutorial: https://www.youtube.com/watch?v=IVIp63t549k)
b) Determinar el modelo matemático en su expresión analítica.
c) Capturar las imágenes de los puntos graficados y el modelo funcional elegido que mejor se aproxima a ellos.
d) Explicar qué significan cada uno de los coeficientes encontrados en la expresión analítica del Modelo.

Entregar la resolución en el espacio del Aula Virtual destinado a ello.

Es posible y esperable, teniendo en cuenta los saberes previos con los que cuentan los y las estudiantes, que a partir del gráfico de puntos surja la idea que una manera de modelizar el problema es a través de un modelo lineal. A continuación presentamos el Ajuste lineal realizado mediante GeoGebra.



Aquí, pueden observarse mejor ambas curvas, considerando mejor uso de las escalas a la hora de presentarlas.



Dejamos las representaciones, realizadas con Desmos, del ajuste lineal para el diámetro en función de la altura y del ajuste lineal para la profundidad en función de la altura. En ambos casos, las predicciones entre ambos softwares coinciden.

Finalizada la clase se solicitará que los y las estudiantes analicen y valoren su propio aprendizaje y el de un compañero/a completando una rúbrica: https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSdUzZLvsA5W41Wmm_cUmyO8eXGVmbaTXKnlKTjL6moGAVcz9g/viewform.

Clase 5 - Actividad Asincrónica

Actividad de Resignificación

Se solicitará que de manera individual y eligiendo la herramienta que sea más adecuada, revisen nuevamente lo realizado para aplicarlo ahora en construir el modelo que permite expresar la relación existente entre altura/profundidad. Se plantearán determinados interrogantes que apuntarán a analizar el fenómeno mediante la expresión analítica de los modelos. Encontrar un modelo matemático de una situación, no es más que encontrar una herramienta que permite realizar análisis, reflexiones y predicciones acerca del fenómeno real. Por supuesto que habrá limitaciones, no hay que olvidarse que hay variables del fenómeno que se han decidido desestimar, por ello es fundamental implicar a los y las estudiantes en el análisis de los modelos y sus dominios de validez en relación al fenómeno analizado. La lectura de los gráficos también es considerada importante y crucial porque permite analizar los dos modelos lineales entre sí y su interpretación en el contexto real. Es también fundamental que tengan la oportunidad de constatar el modelo con el fenómeno real a través de la experiencia.

Actividad 7

a) Con el uso de GeoGebra o Desmos encontrar el modelo matemático que mejor se ajusta a los valores obtenidos en la experiencia en relación a las variables altura/profundidad. Sacar fotos o capturas de pantalla de los puntos que representan esos datos y del modelo funcional de ajuste, con su expresión matemática.
b) Explica con tus palabras qué sentido o significado tienen los coeficientes encontrados en este modelo matemático, teniendo en cuenta el fenómeno analizado.

Actividad 8

Teniendo en cuenta los modelos matemáticos encontrados que expresan (aproximadamente) la relación entre las variables altura/diámetro y altura/profundidad, contestar las siguientes preguntas

a) ¿Qué sucede con las dimensiones del cráter si la altura vale cero? Explicar teniendo en cuenta la experiencia.
b) ¿Cuál sería el dominio adecuado para que los modelos matemáticos encontrados modelicen apropiadamente los fenómenos analizados?
c) ¿Cuáles son las dimensiones del cráter si el objeto se deja caer a 0,75m? ¿y a 30 cm?
d) ¿Podrías determinar aproximadamente cuáles serían las dimensiones del cráter si la altura desde que la que se deja caer el objeto es de 1,50 m? ¿y si fuera de 1,70 m?
e) ¿Habrá alguna altura en la que dejemos caer el objeto y las dimensiones de la altura y la profundidad coincidan? ¿por qué?
f) ¿Para qué valores de la altura, la medida de la profundidad supera a la medida del diámetro del cráter?
g) ¿Habrá algún momento en que suceda que al aumentar la altura el diámetro del cráter se mantenga constante? ¿Por qué?
h) Constatar lo predicho por el modelo en los puntos anteriores realizando las experiencias y comparando los resultados.
i) En caso de ser necesario, proponer un nuevo modelo, incorporando los nuevos datos.

Entregar resueltas la Actividad 7 (capturas de pantalla/fotos) y 8 en el espacio del Aula Virtual destinado a ello

Clase 6 - Actividad Sincrónica

Con la finalidad de realizar una integración de los saberes trabajados hasta el momento, se propondrá un Juego de Escape para realizar de manera individual. Los/las estudiantes deberán ingresar al siguiente link, resolver adecuadamente tres propuestas y dejar escritas las resoluciones realizadas, enviándolas por el espacio del Aula Virtual destinado para ello: https://view.genial.ly/620fca6e6ad65900195e5d62/interactive-content-quiz-galaxia

Una vez que se han recuperado las principales ideas por medio del juego, se propondrá que de forma individual participen de una instancia de evaluación por medio de la aplicación Kahoot: https://create.kahoot.it/share/evaluacion-meteoritos-y-matematica/3c3c84bd-a7d4-4cdc-bb24-87a848732017
Se solicitará a los y las estudiantes que completen una rúbrica final, autoevaluando su propio proceso de aprendizaje y co-evaluando a algún/na compañero/a. La misma rúbrica será completada por el/la docente como una forma de cerrar esta etapa mediante una valoración de los conocimientos construidos y alcanzados.
https://docs.google.com/forms/d/e/1FAIpQLSfc1QF-lPY-Thg2uc2iqWGSpoOd1vigMNXkn8YaJnE2aQAJ5Q/viewform

Conclusiones, Anticipaciones y Proyecciones

Para ir cerrando nuestra propuesta didáctica queremos señalar que, en posteriores etapas, se propondrá estudiar y modelar otras relaciones que hayan quedado fuera de esta primera etapa, a saber: la relación entre la masa del objeto y el diámetro del cráter, considerando fijos la altura de caída y el tamaño del meteorito y entre la variación de la velocidad del meteorito, según la altura desde donde cae. Con estas nuevas relaciones, se espera que las y los estudiantes puedan estudiar otros tipos de relaciones funcionales que muestren la naturaleza multicausal del fenómeno original, demostrando que todo modelo es de naturaleza provisoria. Así, los escenarios de modelización se presentan como formas posibles de continuar ampliando los contenidos y conocimientos matemáticos en los distintos niveles educativos. El proceso de Modelización así concebido es un proceso de transformación, ya que a partir de él y del uso de tecnologías digitales, las y los estudiantes conciben la situación y la simplifican, tomando decisiones en relación al modelo que ajusta mejor al fenómeno. Procesos tales como la experimentación, la exploración, la simulación, la visualización, la interpretación, el cálculo y la estimación, se ven entonces enriquecidos y beneficiados.
Tenemos ahora el desafío de poner en práctica la propuesta, convencidos de que la misma permitirá trabajar los objetos matemáticos, a partir de lo empírico, pero profundizando en un sentido epistemológico, dándole significado a los mismos en un escenario de modelización. Poner a circular la propuesta no será más que iniciar el camino a investigar lo realizado, a interpelarnos en nuestros objetivos y analizar los resultados obtenidos, con el fin de realizar los ajustes necesarios para lograr en un futuro propuestas superadoras.

Referencias Bibliográficas

ALMEIDA, L. & SILVA, H. (2015) Matematização em Atividades de Modelagem Matemática. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 8(3), 207-227.

DISEÑO CURRICULAR JURISDICCIONAL. Resolución 543/19 (2019) Profesorado de Educación Secundaria en Matemática. Dirección General de Educación Superior.

ESTELEY, C. (2014) Desarrollo profesional en escenarios de Modelización Matemáticas: voces y sentidos. Universidad Nacional de Córdoba.

INFOD (2010) Proyecto De Mejora Para La Formación Inicial De Profesores Para El Nivel Secundario. Área Matemática. 1ra Edición. Argentina.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE CHUBUT (2014) Diseño Curricular de Matemática. Educación Secundaria. Recuperado de: https://www.chubut.edu.ar/descargas/recursos/secundaria/Dis_curricular/Matematica.pdf.

ONRUBIA, J. (2005) Aprender y enseñar en entornos virtuales: actividad conjunta, ayuda pedagógica y construcción del conocimiento. Revista de educación a distancia. Disponible en https://revistas.um.es/red/article/view/24721. Revisado por última vez el 2 de diciembre de 2020.

POCHULU, M. (2013) Clases 1 a 5. Propuesta educativa con TIC: Enseñar con TIC Matemática I. Especialización docente de nivel superior en educación y TIC. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

RODRÍGUEZ, M. (Coordinadora) (2016) Capítulo 2. Consignas para la clase de matemática. En *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* 1ra Edición. 1ra Reimpresión. Ediciones UNGS. Los Polvorines.

(2016) Capítulo 4. Criterios para valorar el uso de nuevas tecnologías en la clase de matemática. En *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática.* 1ra Edición. 1ra Reimpresión. Ediciones UNGS. Los Polvorines.

SANES, C. (2020) Trabajo Final de la Asignatura. Seminario de Didáctica Específica III. UNSAM. Material en Edición.

HEURÍSTICAS EMERGENTES EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS AL RESOLVER UN PROBLEMA

Margarita BENÍTEZ, Roxana OPERUK
Facultad de Ciencias Exactas Química y Naturales, Universidad Nacional de Misiones
mbenitez@fceqyn.unam.edu.ar, roxsoperuk@gmail.com

Resumen

Este artículo constituye "un recorte de un trabajo de investigación" iniciado en 2019 en el marco de una tesis de maestría cuyo propósito es reconocer, clasificar y describirlas e interpretar las estrategias heurísticas desplegadas por los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos en los encuentros de Seminario II del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Misiones (UNaM), desde la perspectiva de la escuela anglosajona. El trabajo de campo se realizó en 2019 y 2020, la primera cohorte de manera presencial y la segunda en la virtualidad Se analizaron los registros escritos mediante la herramienta metodológica "Tabla de Heurísticas" (Barreiro, et al., 2019). Lista de descriptores, heurísticas y descripción de las mismas como así también los procesos que los estudiantes reconocen haber puesto en juego durante la resolución de problemas

En ambas cortes abordaron el problema con los datos obtenidos al realizar la experiencia, es decir partiendo de las condiciones de la situación. La mayoría de los grupos, a partir de los datos que recogieron al realizar su experiencia confeccionaron una tabla, recurrieron a otros contenidos matemáticos que pudieron identificar para esta situación. En relación a los conceptos que favorecen a la resolución, se pueden mencionar los gráficos, en papel o con software.

La actividad resultó movilizadora, puso a los estudiantes en acción, tomando decisiones y trabajando con contenidos matemáticos, objetivo principal de la actividad. La resolución de problemas desde esta perspectiva se constituye en un eje valioso para que los estudiantes resignifiquen conceptos matemáticos trabajados en otros espacios.

Palabras clave: Heurísticas - Resolución de Problemas – Estudiantes - Universidad.

Introducción

En estos dos años tuvimos que pensar y re pensar nuestras prácticas docentes, de la presencialidad a la virtualidad y nuevamente a la presencialidad ¿aprendimos algo? ¿qué nos llevamos? estos cambios ¿se quedarán?

La actividad que presentamos se llevó a cabo en dos instancias en el año 2019 con un cursado presencial y posteriormente en al año 2020 con un cursado virtual. La misma se desarrolló en la cátedra denominada Seminario II de Profesorado en Matemática.

Se analizarán las heurísticas utilizadas por los estudiantes, en particular, los escritos presentados respecto de una actividad en la cual el objetivo principal es poder determinar una función lineal. Los aportes se realizan desde el marco teórico de la escuela anglosajona.

Marco Teórico

¿Qué entendemos por heurística?

La heurística es un concepto aplicable en todas las ciencias e incluye la elaboración de principios, estrategias, reglas y programas que faciliten la búsqueda de la solución en un problema, es decir, para tareas no algorítmicas de cualquier tipo y de cualquier dominio científico o práctico. Ciertamente, los procedimientos heurísticos tienen una parte del uso del azar, de la intuición o de las diversas estrategias acerca de cómo resolver los problemas. Estos procedimientos y ensayos intuitivos pueden incluir dibujos de esquemas, realizar aproximaciones sucesivas, buscar analogías en otros campos, probar una solución, desmenuzar el problema en otros más simples, generalizarlo primero para luego interpretarlo a un caso concreto.
Desde la mirada de las ciencias “La heurística moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso” (Polya, 1965, p. 102) donde puede vislumbrar determinados pasos que colaboran a una determinada búsqueda.
Hoy, gracias a aportes de diversos autores como Polya (1965), Charnay (1997), Pozo-Pérez Echevarría (2009), Santos Trigo (2014), entre otros, se sabe que, si los estudiantes se apropian de procedimientos que apoyen la realización de actividades que exijan no solo cálculos, pueden llegar a mejores resultados en la resolución independiente, como así también, mejores interpretaciones de los problemas a resolver y de los resultados a los que se arriban.

Concepción de Problema

Uno de los aportes fundamentales que brinda Charnay (1997), respecto de la resolución de problemas es que:

> El alumno debe ser capaz no sólo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas. Y es, en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como herramientas para resolver problemas como se permitirá a los alumnos construir el sentido. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas. (p. 4)

Los aportes de los distintos autores advierten con claridad el modo en que se debería considerar la resolución de problemas en el nivel superior, no solo convendría desarrollar los contenidos en forma tradicional sino, de a poco, incorporar esta línea de trabajo.

Estrategias heurísticas

Adoptamos la concepción de heurística, como lo enuncian los autores Barreiro et al. (2019) “Asumimos las heurísticas como estrategias sistemáticas de búsqueda para el análisis y la transformación de un problema que le ayudan significativamente al resolutor, aunque no se lo garantizan, a aproximarse a hallar una solución apropiada”. (p.19).
Estas estrategias cognitivas se ponen en juego cuando se comienza a pensar en el cómo resolver una situación, ante la exploración y la formulación de posibles caminos de solución.
Los términos estrategias cognitivas o métodos heurísticos (Santos Trigo, 2014) y heurísticas o estrategias heurísticas (Rodríguez, 2012) serán considerados indistintamente. Estas estrategias “pueden ayudar a avanzar o resolver un problema” (Santos Trigo, 2014, p. 63). Se ponen en funcionamiento ante una situación desconocida, en este caso frente a un problema a resolver. Dependiendo de los conocimientos ya disponibles

podemos organizar la información mediante una figura, un esquema, mediante la analogía con otros problemas similares, etc., estos permiten bosquejar el mismo.

Metodología

Siendo la educación una práctica social, su estudio requiere de estrategias que respeten su naturaleza, en concordancia con esto, adherimos a un paradigma cualitativo y nos posicionamos en un enfoque interpretativo, descriptivo. Nos orientamos a comprender una realidad, no buscamos encontrar datos explicativos a teorías, ni comprobar hipótesis, más bien intentamos, como lo expresa Sirvent (2003) "…hacer comprensible los datos".
Posicionadas en esta postura metodológica y atendiendo al enfoque teórico, se optó por llevar a campo actividades-problemas. Estas situaciones se presentaron a los estudiantes de un Seminario de resolución de problemas de un Profesorado en Matemática, pretendiendo que los mismos desarrollaran el mayor número de estrategias posibles y que pudieran identificar cuándo utilizar unas u otras, atendiendo al tipo de problema que debían resolver. La experiencia se llevó a cabo en 2019, la primera cohorte de manera presencial con 32 alumnos y, en el 2020, la segunda cohorte de con 28 alumnos, en la virtualidad debido a la ASPO por covid-19, en instancias sincrónicas y asincrónicas a través distintas aplicaciones y video llamadas.
El tiempo aproximado para el abordaje de cada situación problema fue entre tres y cuatro semanas dependiendo del problema y de situaciones externas al seminario.
En la primera semana se daba a conocer una situación, por lo general la misma aparecía luego de abordar un debate en torno a una problemática real, como por ejemplo el cuidado del medio ambiente. En esa semana debían realizar las experiencias empíricas si las hubiera en horario extra, trabajar la situación grupalmente en clase. En la segunda semana se traía al encuentro del seminario los avances, para ser presentado a los demás grupos las heurísticas emergentes, los procedimientos de resolución, que eran discutidos y analizados entre los distintos grupos. En la tercera semana, se continuaba con el proceso de resolución, realizando los ajustes necesarios en encuentros extra clase y preparando la presentación de la resolución, en formato escrito. Para ser presentado en la cuarta semana, al grupo total.
Las presentaciones escritas se constituían en el soporte empírico que luego serían analizados.

Instrumentos. Técnicas. Herramienta de análisis

La herramienta utilizada para el análisis de las heurísticas, a partir de las producciones escritas de los estudiantes, fue la lista de Descriptores, Heurísticas y descripción de las mismas, confeccionada a partir de la "Tabla de Heurísticas" de Barreiro et al. (2019), con un agregado de descriptores sobre el uso de GeoGebra de construcción propia.
La lista de descriptores por lo general se presenta en un cuadro. En la primera columna se mencionan los descriptores generales: Planificar, activar las experiencias previas, seleccionar una representación adecuada para el problema, modificar el problema, examinar casos particulares y examinar la solución obtenida. En la segunda columna se enumeran las heurísticas que pueden surgir al resolver una situación. Trabajar hacia adelante: Abordar el problema partiendo de las condiciones y los datos dados. Trabajar empezando por el final: Suponer que se tiene una solución y analizar sus características. Recurrir a teoría relacionada: Recordar y utilizar teoría relacionada con el problema que puede ser útil para su resolución. Razonar por analogía: Recordar problemas anteriores, cuya resolución resulte útil para abordar la resolución del nuevo problema. Realizar un dibujo: Realizar una descripción grafica del problema mediante una figura, un diagrama o un gráfico. Reinterpretar el problema en un lenguaje diferente: Traducir el problema en un lenguaje diferente al dado que facilite el abordaje: del simbólico al coloquial o al numérico etc. Reducir a problemas ya resueltos: Realizar alguna variación en el problema que permite transformarlo en otro ya conocido. Reducir a un problema más sencillo: Realizar una simplificación para obtener un problema semejante pero más sencillo, cuyo abordaje ayude a resolver el problema original. Dividir el problema en subproblemas: Descomponer en subproblemas, analizarlos independientemente y luego, recombinar las soluciones parciales para formular una solución general. Introducir un elemento auxiliar: Presentar algún elemento que no fue dado en el enunciado del problema (como cambio de variables, construcción auxiliar, etc.). Análisis sistemático de casos (inducción): Asignarles valores a los parámetros del problema, para extraer pautas y realizar una generalización que permita avanzar en la resolución. Analizar casos limites o especiales: Considerar valores extremos para explorar la gama de posibilidades. Analizar ejemplos: Considerar valores cualesquiera que sirvan para ejemplificar y explorar el problema. Verificar utilizando distintos registros de representación: Verificar la respuesta usando un registro de representación distinto de aquel en el que se produjo dicha respuesta. Verificar usando casos particulares: Verificar la respuesta en casos particulares. En la tercera columna de la tabla se presenta una descripción de las heurísticas.

Respecto a los descriptores incorporados para analizar el uso del programa GeoGebra, se considera: para graficar, pensar la actividad desde el inicio y para verificar datos.

Actividad - problema

El problema se planteó mediante una pregunta que los grupos debían responder ¿Cuánta agua consumimos al bañarnos? Los estudiantes conformaron pequeños grupos, decidieron como realizar la experiencia empírica, como recabar los datos necesarios, como efectuar las mediciones, la organización de los datos, registrar las heurísticas emergentes, los posibles procedimientos de resolución, la solución o respuesta al interrogante y como mostrar los resultados en un lenguaje matemático.

Algunas heurísticas emergentes en los grupos de estudiantes

En esta presentación se comparte las reflexiones de las heurísticas surgidas durante el desarrollo de una actividad problema. A modo de ejemplo, presentamos recortes de las respuestas de algunos grupos, como así también la reflexión acerca de las heurísticas que surgieron durante el proceso de resolución.

Grupo A
Figura 1. Recorte de la respuesta dada por el grupo A.

Todos estos pasos los realizamos todos los integrantes del grupo para poder comparar luego nuestros datos.

Los resultados fueron los siguientes:

a) $4\frac{L}{min} \times 8min = 32L$

b) $2{,}4\frac{L}{min} \times 6min = 14{,}4L$

c) $2\frac{L}{min} \times 8\,min = 16L$

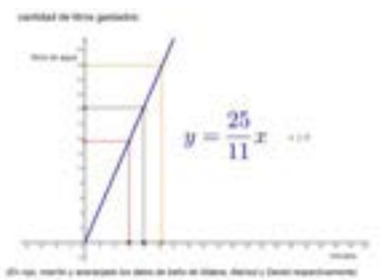
d) $3\frac{L}{min} \times 6\,min = 18L$

Ya con estos datos decidimos calcular los promedios de cada incógnita, obteniendo la siguiente formula: $2{,}8\frac{L}{min} \times 7min = 19{,}9L$.

Nota. Fuente propia.

El grupo describe la experiencia, expresan la cantidad de litros por minuto consumidos y lo multiplican por la cantidad de tiempo que les demanda bañarse a cada uno de los integrantes. Con esos datos calcularon el promedio del consumo de agua, como así también, el promedio de tiempo que les demandaría darse un baño. En relación a las heurísticas utilizadas el grupo trabaja hacia adelante, recurre a un concepto matemático conocido e incorporado como ser el cálculo del promedio.
Grupo B
Figura 2. Recorte de la respuesta dada por el grupo B.

3. Con estos datos usamos la ecuación punto-pendiente de la recta: $y-y_0=(x-x_0)$, reemplazando por los datos obtenidos $y-\frac{25}{11}=\frac{25}{11}(x-1)$ y realizando propiedad distributiva obtenemos: $y=\frac{25}{11}x$ donde "x" es igual al tiempo en minutos e "y" igual a la cantidad de litros gastados.



Nota. Fuente propia.

Para recabar datos, los integrantes manifiestan que deciden “Averiguar cuanto tiempo tardaría en llenarse una jarra de 1 litro para después, sabiendo previamente cuánto tiempo tardamos en bañarnos, mediante regla de tres simples averiguar la cantidad de litros que habíamos ocupado”
Luego de este cálculo y en sus palabras “optamos por armar una función lineal”, utilizan la ecuación “punto pendiente” obteniendo para ello las coordenadas de dos puntos, por medio del cálculo del promedio antes mencionado.
Las heurísticas a las que recurrió el grupo son: trabajar hacia adelante, el manejo de conceptos como el cálculo de promedios, la ecuación punto pendiente para determinar la expresión particular y asociarla a una función lineal. Se evidencia una reinterpretación en un lenguaje diferente: el algebraico, como así también la utilización de gráficos. El grupo utiliza GeoGebra para verificar datos y obtener la expresión asociada al gráfico.

Grupo C
Figura 3. Recorte de la respuesta dada por el grupo.

Por último, calculé los volúmenes de agua por día y calculé el promedio para poder determinar cuántos litros de agua utilizo por día al bañarme.

Formula general para determinar el volumen de agua: $V = b * l * h$

Día 1	Día 2
$V_1 = b * l * h_1$ $V_1 = 55cm * 120cm * 10cm$ $V_1 = 66.000cm^3$	$V_2 = b * l * h_2$ $V_2 = 55cm * 120cm * 8cm$ $V_2 = 52.800cm^3$

Promedio: $\frac{V_1+V_2}{2} = \frac{66.000cm^3+52.800cm^3}{2} = \mathbf{59.400cm^3 = 59{,}4L}$

donde:
- V_1 es el volumen de agua en el día uno
- V_2 es el volumen de agua en el día dos
- b es la medida de la base de la bañera
- l es la medida del largo de la bañera
- h_1 es la altura alcanzada por el agua el día uno
- h_2 es la altura alcanzada por el agua el día dos

Se pudo establecer así un modelo matemático donde el volumen de agua utilizado al bañarse se calcula mediante la fórmula:

$$Volumen\ de\ agua = superficie\ de\ la\ bañera * altura\ del\ agua\ acumulada$$

En este caso en particular:

$$Volumen\ de\ agua = (55cm * 120cm) * 9cm$$

$$Volumen\ de\ agua = 59.400cm^3 = 59{,}4L$$

Nota. Datos propios.

Este equipo expresa que realiza la experiencia utilizando una bañera, considera a la misma como un prisma rectangular. Toman como datos la cantidad de agua consumida durante el baño, de dos días consecutivos y determinan un promedio entre ambas, generalizan esta expresión para calcular el agua utilizada. El grupo evidencia haber trabajado hacia adelante, utilizan teoría relacionada para la resolución de la situación como ser el cálculo del volumen, expresan la situación en un lenguaje diferente: el algebraico y calculan la cantidad de litros utilizados.

Grupo D

Figura 4. Recorte de la respuesta dada por el grupo.

INTEGRANTE	CÁLCULO EFECTUADO	OBSERVACIONES
CRISTINA	Q = C x T = 1/6 x 720 = 120 litros Q= Cantidad de litros consumidos C= Cantidad de agua recogida en segundos T= Tiempo de baño en segundos	Cálculo de tiempo está expresado en segundos
ROMINA	**Cantidad inicial – Cantidad Final = Cantidad utilizada** **15 - 7,5 = 7,5 litros**	Cálculo exacto de agua utilizada, medida con balde.
MARÍA	**V= 10/3 x t = 10/3 x 18 = 60 litros** V= Volumen de agua utilizado t = tiempo de baño	Cálculo de tiempo expresado en minutos
NOELIA	**Cantidad total/Tiempo de baño = Litros consumidos por minuto** 10litros/5minutos = 2 litros por minuto	Cálculo de tiempo expresado en minutos

Nota. Fuente propia.

Para realizar la experiencia cada integrante del grupo utiliza instrumentos diferentes: una jarra de un litro y el tiempo de llenado, para otra medición se utiliza un recipiente de 20 litros y un balde de 10 litros tomando el tiempo de llenado. Con los datos de la experiencia, confeccionan el escrito sin llegar a una conclusión grupal. Se evidencia el trabajo hacia adelante en relación a los datos obtenidos, una de las integrantes indica una expresión algebraica lo que muestra una reinterpretación del problema en un lenguaje diferente, otras dos integrantes realizan el gráfico de la situación utilizando un software. Si bien se realiza lo solicitado, cada integrante del grupo presenta su producción separadamente, no acuerdan la entrega de una producción grupal, en este caso no se evidencia una de las componentes esenciales de la resolución de problemas que es el trabajo en equipo.

Heurísticas emergentes frente al problemas del cuidado del agua

La organización de las heurísticas demandó el análisis minucioso de los procedimientos de resolución registrados en las producciones escritas que presentaron los grupos. Durante el proceso de análisis se fueron identificando y clasificando las heurísticas antes mencionadas.
No se evidenciaron, en esta actividad, dificultades relacionadas a las difíciles condiciones por las que pasamos en el 2020, los estudiantes pudieron organizarse y realizaron lo solicitado, nos comentaron que las dificultades a las que se enfrentaron tuvieron que ver con la imposibilidad del encuentro presencial, pero con muy buena predisposición pudieron llevar adelante la actividad.
En ambas cortes abordaron el problema con los datos obtenidos al realizar la experiencia, es decir partiendo de las condiciones de la situación. La mayoría de los grupos, a partir de los datos que recogieron al realizar su experiencia confeccionaron una tabla. Además, recurrieron a otros contenidos matemáticos que pudieron identificar para esta situación, por ejemplo: cálculo de promedios, proporcionalidad entre los datos, ecuaciones lineales, fórmula de volumen y funciones lineales. En relación a los conceptos que favorecen a la resolución, se pueden mencionar los gráficos, algunos grupos utilizaron los ejes coordenados para graficar la recta obtenida.
La mayoría de los grupos interpretaron lo obtenido en un lenguaje diferente, una minoría utilizó el concepto de función lineal para modelar la situación, tal como lo expresan: “Optamos por armar una función lineal”, otro grupo utilizando el programa GeoGebra comenta: “En el software se pudo graficar una función lineal”, el resto de los equipos manifestó hallar una “fórmula”, “ecuación”, “expresión algebraica” con las cuales calcular la cantidad de agua que consumen.
En un grupo tomaron la decisión de calcular la cantidad de agua que se consumen al cepillarse los dientes, y otro grupo, opta por determinar el agua utilizada al lavar los platos al dejar la canilla abierta. Se considerar que ambos realizan una simplificación de la situación al proceder de esta manera con la experiencia.
Solo algunos grupos graficaron la recta asociada a la función lineal, utilizando algún programa, no específicamente el GeoGebra.

A modo de conclusión

En esta presentación se muestra la identificación y descripción de las estrategias heurísticas desplegadas por estudiantes universitarios durante la resolución del problema ¿Cuánta agua utilizamos al bañarnos?

Los grupos realizaron la actividad, llevaron a cabo la experiencia para recabar datos empíricos, utilizaron distintas estrategias heurísticas, intentando plasmar lo sucedido mediante un modelo matemático.

En la instancia de evaluación de la actividad, realizada con el grupo total, cada equipo expresaba su, dificultades, logros y apreciación acerca de la misma. Es importante mencionar que, en las dos cohortes, tanto los que trabajaron de manera presencial como los que transitaron la virtualidad, al reflexionar acerca de la actividad y de cómo lo resolvieron y cómo se sintieron, expresaron que la actividad los sorprendió, que la consideraban como una propuesta original. También coincidieron en que no es usual este tipo de actividad en otros espacios de la carrera que, si bien resuelven problemas, no se les presenta a modo de situación para experimentar y a partir de ella elaborar conjeturas y tomar decisiones para arribar a una conclusión de tipo matemática.

Esto nos moviliza a seguir pensando ¿Qué fue lo que sucedió para que no se pueda cumplir lo solicitado?, ¿la consigna fue lo suficientemente clara?, ¿Qué aspectos son necesarios tener en cuenta para que avancen en la conclusión de tipo matemática y no queden simplemente en algunos esbozos de cálculos luego de la experiencia?

Es evidente esta actividad es movilizadora, pone a los estudiantes en acción, tomando decisiones y trabajando con contenidos matemáticos que es el objetivo final de la actividad.

Opinamos que la resolución de problemas desde este enfoque puede generar interesantes aprendizajes significativos en la clase, depende de nosotros continuar con lo positivo de lo que vivimos en la enseñanza de nuestras clases en estos dos años. El desafío sobre el que sería interesante avanzar es el logro de acuerdos a nivel carrera para implementar la resolución de problemas como un eje transversal.

Referencias Bibliográficas

Barreiro, P. Casseta, I. Chacón, M. González, V. Zuvialde, D. Leonian, P. Marino, T; Rodríguez, M. (2019) *Heurísticas en la resolución de problemas matemáticos.* Ediciones Universidad Nacional de General Sarmiento.

Charnay, R (1997) Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En Parra, C y Saiz, I (comps.). *Didáctica de la Matemática*. (pp.51-64) Editorial Paidós.

Diccionario de la Real academia española https://dle.rae.es/heur%C3%ADstico

GeoGebra, software libre, versión clásica 5.0.672.0. año 2001 https://www.geogebra.org/

Polya G. (1965). Como plantear y resolver problemas. México. Editorial Trillas. vigesimosegunda reimpresión.

Pozo, J I; Pérez Echevarría, M del P (2009) Aprender para comprender y resolver problemas. En Pozo, JI; Pérez Echevarría M del P (Coord.). *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*. (pp.31-43). Editorial Morata. España

Rodríguez, M (2012). Resolución de Problemas. En Pochulu, M; Rodríguez, M. *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos.* (pp. 153-174). Editorial Universitaria Villa María.

Santos Trigos, L (2014) *La resolución de problemas matemáticos: Fundamentos cognitivos*. 2da edición. Editorial Trillas.

Sirvent, M. T. (1993) La investigación participativa aplicada a la renovación curricular. Revista Latinoamericana de Innovaciones Educativas. Año V. Nº13. Buenos Aires.

UNA PROPUESTA PARA LA ENSEÑANZA DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN LA FORMACIÓN DE FORMADORES

Verónica SAN ROMÁN[1], Beatriz MARRÓN[2], Sandra A. HERNÁNDEZ
[1,2]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
[3]Gabinete de Didáctica de la Química-Departamento de Química, Universidad Nacional del Sur. INQUISUR (UNS-CONICET)
vsanroman@gmail.com, beatriz.marron@uns.edu.ar, sandra.hernandez@uns.edu.ar

Resumen

En la actualidad se destaca la importancia de la alfabetización estadística para la formación integral de ciudadanos adultos capaces de interpretar grandes volúmenes de datos y tomar decisiones en base al estudio estadístico. Por ello resulta trascendental que los futuros formadores fortalezcan sus competencias específicas en probabilidad y estadística. Sin embargo, el estudio realizado en diferentes investigaciones en Didáctica de la Estadística deja al descubierto ciertas dificultades para consolidar el aprendizaje de los conceptos y procedimientos relacionados, tanto con el azar como con la estadística. En este trabajo describimos el diseño, la implementación y el análisis de una secuencia de enseñanza destinada a introducir los conceptos y procedimientos aplicados en Estadística Descriptiva en la enseñanza universitaria a estudiantes de Profesorado en Matemática. Con el propósito de promover estrategias basadas en la investigación e innovación que permitan mejorar la educación en el área STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática), se conjuga un estilo de aprendizaje basado en la experimentación colectiva junto con la incorporación de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) como dos estrategias metodológicas potentes para lograr competencias significativas en estadística matemática. Del análisis de esta experiencia se desprende que el uso de las TIC junto con la metodología de aplicación en el aula, resultaron una combinación ideal para vivenciar las diferentes etapas de una investigación estadística en un contexto cotidiano y tecnológico.

Palabras clave: Enseñanza Universitaria - Educación Estadística – TIC - Simulación por Computadora – STEAM.

Fundamentación

A lo largo de los últimos años, se ha observado una tendencia a promover la enseñanza de la estadística en todos los niveles educativos. Desde el Consejo Federal de Educación se implementaron acciones tendientes a favorecer la enseñanza de la Estadística y la incorporación de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC) en el nivel medio. Las mismas se encuentran reflejadas tanto en los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios (NAP) como en los Diseños Curriculares, que incluyen el estudio de la probabilidad y estadística como contenidos prioritarios del área de matemática en la educación secundaria, destacando su importancia en la formación integral de los estudiantes ya que como ciudadanos adultos les permitirá cuantificar la incertidumbre y argumentar la toma de decisiones evaluando la razonabilidad de las inferencias.
Por ello, el interés por la enseñanza de la probabilidad y la estadística en la formación de estudiantes de Profesorado en Matemática, viene ligado tanto al rápido desarrollo de la misma como ciencia que brinda apoyo a la investigación, la técnica, la vida profesional e incluso la vida cotidiana de este mundo globalizado en que vivimos, como a su crecimiento, impulsado por el uso de las nuevas tecnologías para procesar grandes volúmenes de datos y comunicar resultados (Batanero, 2001). Esto pone en evidencia la necesidad de perfeccionar las prácticas educativas para favorecer el desarrollo de una cultura estadística,

> *"la misma refiere a dos componentes interrelacionados: a) capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación, pero no limitándose a ellos y, b) capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante" (Gal, 2002, p. 2-3).*

Asimismo, con el propósito de promover estrategias basadas en la investigación e innovación que permitan mejorar la educación en el área STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática), adherimos a la idea de López-Simó, Couso y Simarro quienes postulan "la necesidad de aportar una perspectiva al uso de herramientas digitales en el aula que trascienda las modas pasajeras, y que se centre en por qué y en el cómo usar cada una de estas herramientas", señalando "tanto las oportunidades que ofrece la enseñanza digital para el aprendizaje STEM como las oportunidades que ofrece la enseñanza STEM para el aprendizaje digital". (2020, p. 20)
Por otra parte, la crisis provocada por la pandemia de Covid-19 impactó fuertemente en todos los ámbitos de la vida, y la educación no fue la excepción. De forma abrupta, la tradicional educación presencial debió mutar hacia la educación virtual y las TIC pasaron de ser una alternativa en el diseño curricular a protagonistas indiscutibles. La importancia de su incorporación trasciende la interacción o intercambio en la distancia, por lo que su implementación debe ser planificada de manera reflexiva y contextualizada, aprovechando sus potencialidades para dar sentido a la construcción del conocimiento.
En la confluencia de estas dos realidades surge la imperiosa necesidad de que los docentes se involucren en un proceso de reestructuración y revisión general de sus propias prácticas, apostando por la plasticidad de los conocimientos impartidos, la formación continua y la diversificación de metodologías y formas de desarrollo de las mismas. No se trata simplemente de la creación o uso de tecnologías para la educación, de la recepción crítica o de la incorporación de las informaciones de los medios en las instituciones educativas; se trata de entender que se han creado nuevas formas de acceder y producir conocimiento. Así, como sostiene Edelstein (2002),

> *"sostenida sobre procesos interactivos múltiples las prácticas de la enseñanza cobran, sin embargo, forma de propuesta singular a partir de las definiciones y decisiones que, el docente concreta en torno a una dimensión central y constitutiva de su trabajo: el problema del conocimiento, cómo se comparte y construye el conocimiento en el aula" (p. 468-469)*

Por lo dicho anteriormente, la planificación de esta propuesta de intervención pedagógica está enfocada a partir de los principios de las nuevas pedagogías, con una perspectiva constructivista del aprendizaje. En éstas se destaca la importancia que adquiere el aprendizaje en profundidad, que va más allá del dominio del conocimiento de los contenidos y se define como "la creación y utilización de nuevos conocimientos en el mundo" (Fullan y Langworthy, 2014, p. 20). Así, la propuesta educativa diseñada bajo este enfoque favorecerá la elaboración de conocimientos integradores desde una perspectiva de investigación colaborativa.

En él, el alumnado podrá vivenciar las diferentes etapas en la realización de una investigación: planificación, desarrollo y evaluación-retroalimentación de resultados en un contexto cotidiano, involucrándose en los

métodos de investigación y modos de razonamiento estadísticos-probabilísticos, desarrollando su espíritu crítico e iniciativa personal.
Entonces, con el objetivo de innovar priorizando la calidad pedagógica, se diseña esta propuesta didáctico-pedagógica donde se incorporan las tecnologías para co-crear junto con los demás participantes del acto educativo un espacio de intercambio abierto y dinámico que permita el desarrollo de las distintas operaciones mentales (identificación, diferenciación, transferencia del conocimiento, etc.), las diversas formas de razonamiento (inductivo, deductivo) y de pensamiento (convergente, divergente), involucrando en este proceso los conocimientos previos del estudiantado.
En este sentido y bajo una modalidad de enseñanza virtual basada en el uso de tecnologías o recursos digitales, los materiales didácticos cobran un especial sentido para dar lugar al aprendizaje activo del alumnado. Estos se seleccionarán considerando su potencial para propiciar el aprendizaje significativo a través de la interacción entre docente y estudiante, estudiante y actividad y estudiante con su par, estableciendo así las bases de una forma altamente enriquecedora para el desarrollo del acto pedagógico (Schwartzman & Odetti, 2011).
Desde este marco de referencia el desafío es claro: avanzar en esta realidad compleja atravesada por las nuevas tecnologías, favoreciendo el aprendizaje colaborativo, empleando soportes telemáticos tendientes a vincularnos desde una nueva mirada y enriquecer tanto el aprendizaje formal como el informal. Como afirma Mariana Maggio (2012) los nuevos entornos nos dan una enorme oportunidad ya que permiten facilitar y encauzar el diálogo en pos de los objetivos de una propuesta de enseñanza integradora:

> *"Usar las posibilidades que ofrecen los foros, los blogs, otros sistemas de comunicación en línea para conversaciones simultáneas y servicios de redes sociales en general, no garantiza, automáticamente, la promoción del diálogo en la enseñanza. Más aún, con una computadora conectada a Internet a disposición, nuestros alumnos pasan o pasarán varias horas al día en esos espacios y teniendo ese tipo de interacciones. Si queremos que el "habla" ocupe ese espacio, un habla donde en el intercambio con el otro me enriquezco, aprendo, lo reconozco, soy más culto y mejor ciudadano, el desafío educativo que tenemos es inmenso." (Maggio, 2012, p. 66)*

Marco curricular e institucional

Las actividades diseñadas fueron planificadas para la asignatura Estocástica, perteneciente al tercer año de la carrera de Profesorado en Matemática de la UNS, planeadas para desarrollarse en un período de tiempo limitado y vinculadas con el proceso de enseñanza-aprendizaje propio de cada estudiante.
El objetivo primordial de este espacio curricular es proporcionar una introducción temprana a las ideas básicas de la Teoría de Probabilidades y de la Estadística. El espacio curricular de esta asignatura se compone de dos ejes fundamentales: modelos probabilísticos uni y multi dimensionales, estadística descriptiva e inferencial.
Debido al aislamiento social, preventivo y obligatorio (ASPO) surgido de la pandemia de COVID-19, en 2020 se buscó dar una vuelta de página, reestructurando las prácticas de enseñanza a través de un proyecto de intervención docente que contemplara la necesidad de transformar e innovar las prácticas educativas, incorporando la tecnología con un objetivo pedagógico concreto y sin perder de vista la calidad pedagógica. Para esto se consideró en la selección del dispositivo didáctico y tecnológico las potencialidades del mismo para estimular las habilidades de pensamiento crítico, reflexivo y creativo, promover el tratamiento dinámico de la información, e impulsar las prácticas del trabajo colaborativo tanto grupal como individual. Luego, la creación de este nuevo entorno didáctico afectó de manera directa tanto a los actores del proceso de enseñanza-aprendizaje como al escenario donde se lleva a cabo el mismo.
Este espacio, creado a partir de las Nuevas Tecnologías, requiere de un nuevo tipo de estudiante interesado más en el proceso que en los resultados, preparado para la toma de decisiones y elección de su ruta de aprendizaje, es decir, preparado para el autoaprendizaje.

Propósitos y Objetivos

Considerando que *a través de la dimensión reflexiva, el profesor deja de ser un mediador pasivo entre la teoría y la práctica, para convertirse en un mediador activo que desde la práctica reconstruye críticamente sus propias teorías* (Edelstein,G. 2002, p.480), el sentido pedagógico de esta propuesta educativa está relacionado con la posibilidad de:

- promover un ambiente digital flexible que permita expandir los horizontes educativos y favorezca el autoaprendizaje;
- integrar la teoría con la práctica, estimulando a los estudiantes a desafiar sus conocimientos previos y construir nuevos marcos conceptuales;

- conjeturar, argumentar, interpretar y tomar decisiones ante situaciones de la vida real utilizando los medios tecnológicos;
- establecer un Entorno Virtual de Enseñanza y Aprendizaje (EVEA) que permita la participación activa del alumnado, tanto individual como grupal, incorporando recursos hipertextuales para la construcción del conocimiento; y
- valorar la incorporación de actividades con competencias en el área STEAM.

De este modo, los objetivos propuestos relacionados con el proceso de construcción del conocimiento son:
- resignificar los conocimientos matemáticos previos a partir de la resolución de problemas que les permitan acceder a nuevas significaciones
- desarrollar en el alumnado la aptitud para asimilar herramientas y técnicas estadísticas, fomentando la búsqueda, análisis, síntesis y conceptualización de la información en ambientes digitales de aprendizaje.
- valorar el uso de los gráficos obtenidos a través de un software específico, para tomar decisiones y atribuir un significado a las medidas de centralización, posición y dispersión obtenidas.
- experimentar con herramientas digitales, accediendo a diferentes espacios y recursos, que permitan conjeturar, argumentar, interpretar y tomar decisiones ante situaciones de la vida real.
- elaborar informes estadísticos que den cuenta de los procesos de comprensión y análisis de los contenidos a través de diferentes aplicaciones digitales.
- producir material audiovisual con el fin de comunicar los resultados obtenidos.
- crear ambientes colaborativos de trabajo que promuevan la comunicación, socialización y retroalimentación, docente-estudiante y estudiante-estudiante, para la construcción del conocimiento.
- desarrollar y promover estrategias que permitan mejorar la educación en el área STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas).

Metodología de enseñanza

La planificación de esta secuencia didáctica, orientada desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, se basa en la concepción de que la realidad es una construcción interna, propia del individuo. A lo largo de su desarrollo se combinan momentos destinados a perfeccionar las competencias de los estudiantes; no solo en su conocimiento declarativo sino también en los conocimientos estratégicos (razonamiento) y explicativos (argumentación) (Furió Mas, 2006). En este contexto, la incorporación de las TIC forma una parte primordial en el aprendizaje multimedia donde el sujeto logra la construcción de representaciones mentales ante una presentación multimedia, es decir, logra construir conocimiento (Mayer, 2005 citado en Latapie, 2007). Por ello es necesario que los docentes incorporemos en la metodología del aula más de una herramienta tecnológica, para evitar el tecno-centrismo, y de este modo lograr que la combinación de las TIC y los diversos tipos de conocimiento puedan generar una dinámica de aula más rítmica y variada. (Harris & Hofer, 2009 citado en Cabero Almenara et al., 2015).

Luego, la metodología propuesta tiene como objetivo fundamental ofrecer una enseñanza vivencial, que permita al alumnado la posibilidad de experimentar distintos recursos digitales y la manipulación de los datos, mientras relacionan, aprenden y resignifican los conceptos estadísticos. Para ello las clases fueron organizadas teniendo en cuenta diferentes criterios: los esquemas y conocimientos previos del alumnado, las características y dinámica del grupo y los recursos tecnológicos y humanos disponibles. La matrícula del curso estuvo compuesta por seis estudiantes, cinco mujeres y un varón, sin problemas de accesibilidad ya que todos poseían sus propios dispositivos y acceso a internet.

La forma de interacción propuesta bajo la modalidad virtual fue tanto sincrónica como asincrónica, contando con materiales educativos que favorecieron el proceso de construcción del conocimiento. Así, los contenidos se desarrollaron a través de:
- encuentros semanales sincrónicos, de dos horas reloj, a través de la plataforma Zoom,
- trabajos teorico-prácticos asincrónicos utilizando el aulavirtual dispuesta en la plataforma Moodle, y
- foros de consulta y debate donde se canalizaron las dudas e inquietudes surgidas del proceso de aprendizaje propio de cada estudiante.

Desarrollo y Análisis de la propuesta

Para la implementación y puesta en marcha de las actividades planteadas se consideraron las siguientes estrategias de enseñanza:
- incorporación de herramientas digitales para: integrar la teoría con la práctica, estimular a los estudiantes a desafiar sus conocimientos previos y construir nuevos marcos conceptuales,

- selección de herramientas tecnológicas accesibles desde diferentes dispositivos como computadoras, celular y/o tablet, que no requieran grandes recursos de hardware ni de conectividad, y
- diseño de materiales flexibles e interactivos, que faciliten el acceso y/o descarga de textos y otros materiales.

A continuación, se presenta la secuenciación del esquema de actividades de enseñanza propuestas:

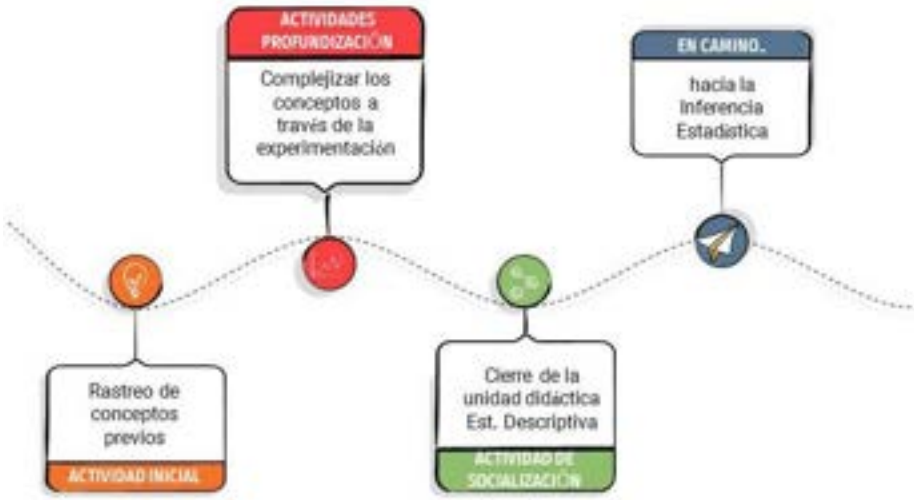


Figura 2: Esquema de actividades propuestas (diseño propio)

En el **primer momento** de la secuencia didáctica se plantea una actividad disparadora para indagar los conceptos previos relacionados con Estadística Descriptiva a través de la siguiente **actividad inicial.**

¿Qué sabemos de Estadística? Se utiliza la nota periodística de interés social seleccionada previamente por el cuerpo docente, de un diario digital como actividad disparadora que brinde el marco de referencia esencial para recuperar los conocimientos previos relacionados con estadística descriptiva. En el desarrollo de esta actividad se propone la exposición libre a través de la participación en un *Foro de Discusión* disponible en el aula virtual de Moodle, de los conceptos relacionados con estadística que el alumnado descubrió en el artículo periodístico. Es decir, la consigna es que en este espacio de socialización cada estudiante vuelque entre tres y cinco palabras que representen el contenido abordado dándoles una visión más general del mismo y les permita reconocer la interrelación entre el contenido trabajado y la cotidianeidad, favoreciendo la capacidad argumentativa y la exposición de las ideas por parte del alumnado.

En el **segundo momento**, con el objetivo de intensificar y complejizar los conceptos trabajados a través de la experimentación, se proponen las siguientes **actividades de profundización**

¡Investiguemos acerca de la Estadística Descriptiva! Se plantea esta actividad como vertebradora al desarrollo de toda la secuencia de actividades sucesivas. En esta instancia los estudiantes trabajaron tanto con los recursos propuestos por la cátedra disponibles en el aula virtual de Moodle (apuntes, libros online, video-clase, etc.), como con aquellos provenientes de distintas fuentes de internet dando prioridad a los Recursos Educativos Abiertos (REA), para establecer una primera aproximación de los conceptos básicos de Estadística Descriptiva como: población y muestra, variables cuantitativas vs cualitativas, medidas de resumen: centralización, dispersión y posición, y la representación gráfica de los datos. Como producto resultante de este trabajo de investigación cada estudiante elaboró un documento, a través de la herramienta digital Google Docs, denominado *"Notas de Estadística Descriptiva"* que les sirvió de fundamento para la realización de las actividades sucesivas. En este proceso cada estudiante compartió el trabajo con el cuerpo docente que ofreció su guía y apoyo, respetando los tiempos de cada uno y favoreciendo la auto-regulación y auto-organización del aprendizaje. La intención de esta actividad es movilizar el interés del estudiantado en la investigación y profundización de estos conceptos, y permite: - *describir matemáticamente un concepto*, asistido por la tecnología en el proceso de descripción o documentación del mismo,

- *generar un texto*, a partir de la selección y secuenciación de la información existente, donde quedará demostrado su nivel de comprensión del tema, y - promover la *investigación en acción* del alumnado en Estadística Descriptiva.
Contextualización de un Conjunto de Datos Esta actividad se constituyó en dos pasos: el *primer paso* radicó en escribir el enunciado de un problema que represente una situación concreta, real o ficticia, de los datos generados previamente por el cuerpo de docentes. El *segundo paso* estuvo relacionado con la organización, presentación e interpretación de este conjunto de datos, resignificando los fundamentos teóricos de Estadística Descriptiva desarrollados previamente, a fin de elaborar las conclusiones contextualizadas. En el desarrollo de esta la actividad los alumnos y las alumnas pudieron: - vivenciar el trabajo con *una base de datos* en primera persona reconociendo sus fortalezas y limitaciones, - *experimentar con la herramienta digital* propuesta valorando su versatilidad para realizar un trabajo empírico con diferentes distribuciones de una variable aleatoria, como por ejemplo la Distribución Normal, - reconocer la importancia de la *interpretación y contextualización* de un problema a fin de establecer conclusiones, y - *resignificar* los conocimientos previos relacionados con Estadística Descriptiva.

Para finalizar, se plantea un **tercer momento** como cierre de esta unidad didáctica que nos abre la puerta a futuro para avanzar en el estudio de la Estadística Inferencial; a tal fin se propone la siguiente **actividad de socialización**

Avance de investigación y socialización través de "El Muro ¿Qué nos dicen los datos?" Para el desarrollo de la actividad propuesta se incorporó un espacio colaborativo a través de la creación de un muro con la herramienta digital *Padlet*. Las entradas en este sitio permitieron tanto socializar los avances relacionados con el trabajo de investigación y las primeras conclusiones obtenidas a partir del análisis de los datos, como emitir una opinión fundamentada de los avances y retrocesos del resto de los compañeros de la clase. Estos aportes fueron realizados en alguna de estas modalidades: un video-corto (2-5 min.), un podcast, un documento o simplemente texto en línea. Finalmente, con esta actividad los estudiantes pudieron: - resignificar los conceptos desarrollados previamente en clase, - utilizar adecuadamente el lenguaje estadístico para comunicar los resultados, - desarrollar la argumentación matemática en la exposición de sus intervenciones y/o conclusiones, y - adquirir compromiso en la construcción colectiva del conocimiento.

Reflexiones sobre la experiencia

Teniendo como premisa que el contenido no es independiente de la forma en que es presentado, pudimos observar que en los problemas y ejercicios rutinarios se refuerza un solo concepto, propiedad o capacidad. Sin embargo, en este contexto, el empleo de los medios didácticos e informáticos propuestos generó un espacio de debate donde, tanto el alumnado como el cuerpo docente, enriquecieron sus conocimientos al indagar más en el manejo y las facilidades de las TIC´s para resumir y analizar datos.
Algunas de las dificultades que surgieron en el desarrollo de esta secuencia didáctica de actividades estuvieron relacionadas con:

- la elaboración, coordinación y escritura de un documento, ya que en la práctica habitual el cuerpo docente presenta sus apuntes de cátedra. En este caso se plantea un escenario invertido donde cada estudiante es responsable de generar sus bosquejos o borradores teórico/prácticos.
- el desarrollo de la creatividad para ver más allá de los datos y trasladarlos a un contexto tangible.
- la falta de confianza y el temor a equivocarse en las opiniones y/o conclusiones elaboradas. Esto derivó, en algunos casos, en la autocensura y falta de participación del alumnado.

En la puesta en marcha de este desafío surgieron nuevas líneas de trabajo para perfeccionar y fortalecer la metodología empleada; las más destacadas fueron:

- ✓ la creación de dispositivos de contención para afrontar la incertidumbre y resistencia que se presenta, mayoritariamente por parte del alumnado, al proponer una metodología de enseñanza no tradicional.
- ✓ la optimización del tiempo curricular y extracurricular para el desarrollo de las actividades considerando la carga horaria obligatoria de otras materias.
- ✓ el diseño de criterios y técnicas de evaluación coherentes al desarrollo de un proyecto de aprendizaje con estas características.

Conclusiones

El recorrido por esta secuencia de actividades permitió amalgamar la teoría y la práctica, potenciándose las habilidades intelectuales y superando la capacidad de memorización. Se trabajó con material manipulativo y simulaciones permitiendo que el tratamiento de los contenidos no sea una simple secuencia lineal sino que dé lugar a conceptualizaciones provisorias y a conocimientos no acabados. Incorporar las TIC en este proceso brindó a cada estudiante la posibilidad real de "experimentar" principios y fundamentos de la Estadística matemática, enriqueciendo el campo perceptual y las operaciones mentales involucradas en los procesos de construcción, estructuración y análisis de información.

Se trabajó desde una cátedra universitaria con vistas a la incorporación de actividades que enriquezcan el ámbito académico en el que se desarrollen a futuro profesorandos en Matemática y que puedan contemplar la incorporación de acciones didácticas con enfoque STEAM, interdisciplinar e inclusivo.

El alumnado señaló, a partir de las encuestas de cátedra, que la experiencia favoreció el impulso de su propio proceso de aprendizaje pues se sintieron motivados para aprender y desarrollar su capacidad creativa y emprendedora. Esto se evidenció en la participación activa y compromiso durante la realización de las distintas actividades, haciendo referencia a la relación y aplicación de los nuevos conceptos con la vida cotidiana. Esta instancia de trabajo y reflexión conjunta resultó muy importante pues, en función de las respuestas emitidas por cada estudiante, se obtuvieron elementos inestimables para valorar la incorporación de las nuevas tecnologias con sentido pedagógico en las actividades académicas y resignificar así las prácticas docentes.

Como propuesta a futuro, el desafío es claro: avanzar en esta realidad compleja atravesada por las nuevas tecnologías favoreciendo el aprendizaje colaborativo, empleando soportes telemáticos tendientes a vincularnos y enriquecer el aprendizaje. Por ello resulta fundamental continuar diseñando metodologías de trabajo para que el estudio de la Estadística Descriptiva se constituya en el andamiaje matemático que nos lleve al estudio de la Estadística Inferencial a través de verdaderos "laboratorios virtuales de investigación".

Agradecimiento

Las autoras agradecen el financiamiento del proyecto de grupo de investigación: 24/Q113 (Universidad Nacional del Sur, Argentina) en el marco del cual se realizó este trabajo.

Referencias Bibliográficas

Batanero, C. (2001). Didáctica de la Estadística. Granada. Grupo de Investigación en Educación. http://www.ugr.es/local/batanero

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M, Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números. Revista de didáctica de las Matemáticas. Volumen 83, páginas 7-18 ISSN: 1887-1984. [Online: http://www.sinewton.org/numeros1

Cabero Almenara, J., Marín Díaz, V., y Castaño Garrido, C. (2015). Validación de la aplicación del modelo TPACK para la formación del profesorado en TIC. @tic. revista d'innovació educativa, (14), 13-22. https://ojs.uv.es/index.php/attic/article/view/4001/6235.

Edelstein, G. (2002). Problematizar las prácticas de la enseñanza. PERSPECTIVA, 20(02), 467 - 482. http://aprender.entrerios.edu.ar/wp-content/uploads/2020/04/Problematizar-las-pr%C3%A1cticas.-Edelstein.pdf

Furió Más, C., Solbes, J., Carrascosa, J. (2006). Las ideas alternativas sobre conceptos científicos: tres décadas de investigación. Revista Alambique (48), 64-77. https://www.uv.es/jsolbes/documentos/Alambique2006%20Furio,Solbes,Carrascosa.pdf

Fullan, M., & Langworthy, M. (2014). *Una rica veta: cómo las nuevas pedagogías logran el aprendizaje en profundidad.* Pearson. Recuperado de https://www.pearson.com/content/dam/one-dot-com/one-dot-com/global/Files/about-pearson/innovation/open-ideas/ARichSeamSpanish.pdf

Gal, I (2002). Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. International Statistical Review, 70(1), 1-25.

Maggio, M. (2012). Enriquecer la enseñanza. Los ambientes con alta disposición tecnológica como oportunidad. PAIDOS. https://drive.google.com/file/d/16KpqmS0lkltGqNBzyRKEwwwB9JZZCvcT/view

Ministerio de Educación, Consejo Federal de Educación. (2011). Núcleos de Aprendizaje Prioritarios. Matemática. Buenos Aires. Argentina

Latapie Venegas, I. (2007). Acercamiento al aprendizaje multimedia. Investigación Universitaria Multidisciplinaria, 6, pp. 7-14. http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx:8080/jspui/bitstream/123456789/1243/1/Acercamiento%20al%20aprendizaje%20multimedia.pdf

López Simó, V., Couso Lagarón, D., y Simarro Rodríguez, C. (2020). Educación STEM en y para el mundo digital: el papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. *Revista De Educación a Distancia (RED)*, 20(62). https://doi.org/10.6018/red.410011

Schwartzman, G. & Odetti, V. (2011). Los materiales didácticos en la educación en línea: sentidos, perspectivas y experiencias. En Conferencia Internacional ICDE 2011. III Foro Internacional de Educación Superior en Entornos Virtuales. http://www.pent.org.ar/institucional/publicaciones/materiales-didacticos-educacion-linea-sentidos perspectivas-experiencias

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN EL NIVEL SECUNDARIO Y SUPERIOR

María Florencia MOSTTO[1], Verónica PARRA[2]
[1]Universidad Nacional de Entre Ríos (UNER)
[2]Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires,
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT),
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
florenciamostto@gmail.com, vparra@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo sintetiza el análisis de 70 artículos de investigación referidos a la Educación Estadística en el nivel secundario y superior. Se realizó un muestreo intencional y se seleccionaron 70 artículos científicos que refieren a la enseñanza de la estadística descriptiva, pudiendo tratar o no nociones básicas de probabilidad y muestreo, o que presentan temáticas relacionadas a la alfabetización estadística, publicados durante el período 2010/2020 en revistas indexadas y en actas de congresos. Se utilizaron técnicas de análisis inductivas que permitieron realizar una categorización de los artículos, generando las categorías: Lugar y año de la investigación, Nivel escolar, Marco Teórico, Foco, Problema, Objetivos, Pregunta de Investigación, Metodología y Resultados. Se concluye del análisis, que uno de los problemas de investigación explicitados con mayor frecuencia es la enseñanza de la estadística sin sentido, caracterizada por privilegiar un conocimiento técnico; que el foco de la investigación preponderante es el análisis del conocimiento de los estudiantes; que el marco teórico considerado más frecuente es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática; que los objetivos que aparecen con mayor preponderancia buscan evaluar la interpretación o promover el desarrollo del pensamiento y/o razonamiento estadístico (crítico) y/o la alfabetización estadística; y que la metodología que aparece con mayor frecuencia es la aplicación de cuestionarios.

Palabras clave: Estadística Descriptiva - Revisión Bibliográfica - Categorización Inductiva - Nivel Secundario y Superior.

Introducción

Desde de la educación primaria, secundaria y superior se busca formar personas que sean ciudadanos estadísticamente cultos, que puedan participar en la sociedad de la información, es decir, que puedan leer, interpretar, organizar, evaluar críticamente y apreciar información estadística relacionada con los contextos sociales en los cuales están inmersos (Batanero, 2002; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Gal, 2002, 2003, citados en Zapata, 2010, p.99). Pero la realidad de varios países muestra que actualmente esta formación estadística es deficiente. Por dar dos ejemplos de esta problemática, podemos mencionar a Zapata (2010) en Colombia, y a Pérez, Cueto, Fernández, Filloy, Diez, Kelmansky y Pomilio (2015), en Argentina , quienes afirman que *"la formación en estadística de los egresados del nivel medio adolece de serias deficiencias que se manifiestan en el uso posterior de la estadística en su vida cotidiana, así como en los ámbitos universitario y profesional"* (ibid., p.1), e indican que uno de los factores que puede ser la causa que explique este fenómeno es la formación y desempeño de los profesores de matemática. En concordancia con esto último, Zapata (2017) también menciona que los profesores de matemática que enseñan estadística se encuentran débilmente preparados para afrontar con éxito los desafíos de su enseñanza.

Ahora bien, se pretende un ciudadano alfabetizado estadísticamente, pero, para que esto suceda no es suficiente si solo recibe educación estadística. El desafío está en que los responsables de su enseñanza conciban a la estadística como una disciplina que busca el desarrollo del razonamiento estadístico a través de problemas reales con datos reales. Por el contrario, si los profesores conciben su enseñanza desde un enfoque que privilegia el conocimiento técnico, sin sentido, procedimental y abstracto, difícilmente los estudiantes puedan formarse como ciudadanos capaces de interpretar información estadística de manera fundamentada, crítica e independiente. Por ende, es fundamental que los futuros profesores de matemática reciban una formación idónea en didáctica de la estadística, como también es de suma importancia que los profesores en ejercicio, que no recibieron la formación correspondiente, sean instruidos, por ejemplo, a través de talleres. Pino y Estrella (2012, p.54) indican que *"es difícil encontrar expertos en didáctica de la estadística, muy distinta de la didáctica de la matemática y menos desarrollada que esta"*. Además, estos autores mencionan que, por lo general, muchos profesores no han sido formados adecuadamente en estadística, por lo que en algunos estudios se evidencia que tienen nociones muy limitadas al respecto, y a menudo erróneas.

En línea con esta problemática, este trabajo, que es parte de una tesis de grado, tiene como objetivo sintetizar el análisis de 70 artículos que abordan la Educación Estadística en el nivel secundario y superior focalizados en nociones de la estadística descriptiva, pudiendo tratar o no nociones básicas de probabilidad y muestreo o que presentan temáticas relacionadas a la alfabetización estadística.

Metodología de la Investigación

Se realiza un muestreo intencional y se seleccionaron 70 artículos científicos publicados en revistas y/o congresos nacionales e internacionales publicados en los últimos 10 años, es decir, durante el período 2010/2020. Se seleccionan exclusivamente los artículos que refieren a la Estadística descriptiva, pudiendo tratar o no nociones básicas de probabilidad y muestreo, como también se seleccionan aquellos textos que presentan temáticas relacionadas a la alfabetización estadística. No se consideran aquellos artículos que tratan exclusivamente sobre Estadística inferencial por cuestiones de delimitación de la investigación. Se analizan los 70 artículos utilizando técnicas de análisis inductivas que permiten identificar en cada uno de los artículos las siguientes categorías: Número de artículo, Título del artículo, Autor o autores, Año de publicación, Lugar en el que se encuentra disponible el artículo, Lugar y año de la Investigación, Nivel Escolar, Marco Teórico, Foco, Problema, Objetivos, Pregunta de Investigación, Metodología y Resultados y Conclusiones. Esta última categoría no se presenta, por cuestiones de espacio, en este artículo.

CATEGORÍA LUGAR Y AÑO DE LA INVESTIGACIÓN: Las subcategorías identificadas aquí son dos:

1) ***Lugar de la investigación:*** Se clasifica cada uno de los 70 artículos según el país en cual se realizó la investigación.
2) ***Año de la investigación:*** Se clasifica cada uno de los 70 artículos según el año en cual se realizó la investigación.

CATEGORÍA NIVEL ESCOLAR: Las subcategorías identificadas aquí son cinco:

1) ***Nivel Secundario:*** Se consideran los artículos en los cuales el nivel escolar al que están dirigidos o con el que trabajan es el nivel secundario.

2) ***Nivel Superior:*** Se consideran los artículos en los cuales el nivel escolar al que están dirigidos o con el que trabajan es el nivel superior.

3) ***Nivel Secundario y Nivel Superior:*** Se consideran los artículos en los cuales el nivel escolar al que están dirigidos o con el que trabajan es el nivel secundario junto con el nivel superior.
4) Profesores en ejercicio: Se consideran los artículos que tienen como población de estudio los profesores en ejercicio.
5) ***No especifica:*** Se consideran los artículos que no especifican el nivel para el cual está dirigido el texto o no especifican el nivel de la población de estudio con la que trabajan o no les corresponde indicarlo.

CATEGORÍA MARCO TEÓRICO: aquí no sólo se consideraron los marcos teóricos reconocidos con nombre propio, por ejemplo, Teoría de Situaciones Didácticas, Enfoque Ontosemiótico, etc., sino también, a nociones definidas previamente por los autores que no llegan a materializarse en una teoría como tal. Las subcategorías identificadas son tres:
1) ***Teoría, modelo o enfoque/aproximación***: se consideran los artículos que utilizan toda una teoría, o todo un modelo, enfoque, o aproximación para hacer referencia a su marco teórico.
2) ***Nociones***: se consideran aquí los artículos que utilizan solo algunas nociones vinculadas a un referente o a una teoría para hacer referencia a su marco teórico.
3) ***No especifica***: se consideran aquí los artículos que no especifican/no explicitan un marco teórico o que no les corresponde indicarlo.

CATEGORÍA OBJETIVOS: se focalizó en el o los objetivos explicitados por los autores, aquellos propuestos a cumplir a lo largo del trabajo. Las distintas subcategorías se generaron a partir del verbo que utilizaron los autores para redactar el objetivo.

CATEGORÍA PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN: se examinó al problema aludido por los autores que los llevó a realizar el trabajo y a hacer el foco en la temática indicada. Las subcategorías identificadas son ocho:

1) ***Formación estadística débil de profesores*****:** se incluyen los artículos que mencionan que los profesores se encuentran débilmente preparados para afrontar con éxito los desafíos de la enseñanza estadística.
2) ***Ausencia de la enseñanza estadística en el aula de secundaria*****:** se incluyen los artículos que mencionan que la estadística no se imparte en el aula del nivel secundario.
3) ***Enseñanza sin razones de ser de la estadística:*** se incluyen los artículos que hacen referencia a una enseñanza de la estadística sin sentido, caracterizada por privilegiar un conocimiento técnico.
4) ***Formación estadística deficiente de los estudiantes:*** se incluyen los artículos que mencionan que los estudiantes reciben una formación estadística deficiente.
5) ***Alfabetización estadística insuficiente***: se incluyen los artículos que mencionan que los ciudadanos cuentan con una alfabetización estadística insuficiente para poder enfrentar con éxito los retos que la cultura le demanda.
6) ***Ausencia de nociones estadísticas en el currículum:*** se incluyen los artículos que mencionan que se hace escasa alusión, no se priorizan o no aparecen nociones estadísticas en las recomendaciones curriculares.
7) ***La investigación educativa como problemática*****:** se incluyen los artículos que mencionan que hay pocas investigaciones sobre determinadas temáticas o mencionan como problemática la división social del trabajo en educación donde los profesores son los investigados y los profesores universitarios los investigadores.
8) ***No especifica:*** se incluyen los artículos que no especifican una problemática o que no les corresponde indicarlo.

CATEGORÍA FOCO: se consideró aquí el aspecto clave, el núcleo del artículo. Las subcategorías identificadas son ocho:

1) ***Profesores en servicio*****:** se incluyen los artículos que analizan las imágenes, creencias, actitudes, concepciones o el conocimiento que tienen sobre estadística los profesores en servicio. Además, se incluyen los artículos que describen alguna intervención que se realiza en la formación de los profesores en servicio.
2) ***Formación de profesores*****:** se incluyen los artículos que analizan las imágenes, creencias, actitudes, concepciones o el conocimiento que tienen sobre estadística los futuros profesores. Además, se incluyen los artículos que describen alguna intervención que se realiza en la formación de los futuros profesores.
3) ***Formación del estudiante*****:** se incluyen los artículos que analizan las imágenes, creencias, actitudes, concepciones o el conocimiento que tienen sobre estadística los estudiantes del nivel secundario o universitario.
4) ***Experiencia de aula***: se incluyen los artículos que describen el proceso de diseño, gestión y evaluación de una experiencia de aula de nivel secundario o universitario.

5) ***Propuesta de enseñanza sin implementar*****:** se incluyen los artículos que analizan tareas, problemas o secuencia de actividades que no han sido implementados en el aula.
6) ***Teorizaciones y/o Reflexiones*****:** se incluyen los artículos que abordan la educación estadística, a través de reflexiones o descripciones de ciertas nociones o constructos.
7) ***Recursos*****:** se incluyen los artículos que presentan un análisis o descripción de recursos para el estudio de la estadística.
8) ***Análisis del currículo***: se incluyen los artículos que analizan el diseño curricular de nivel secundario o el diseño curricular para el profesorado de educación secundaria.

CATEGORÍA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN: se hizo referencia a las preguntas formuladas como tales en correspondencia con los objetivos propuestos. Las subcategorías identificadas son cuatro:
1) ***Enseñanza y aprendizaje de la Estadística:*** se incluyen los artículos que indagan sobre cómo contribuir en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, o sobre cómo se da ese proceso en estudiantes o en profesores.
2) ***Nivel de comprensión/razonamiento:*** se incluyen los artículos que indagan sobre el nivel de comprensión o razonamiento alcanzado por los estudiantes.
3) ***Ideas/Actitudes previas****:* se incluyen los artículos que indagan sobre las ideas previas o actitudes que poseen los estudiantes sobre estadística.
4) ***No especifica:*** se incluyen los artículos en los cuáles no se especifica una pregunta de investigación o que no les corresponde indicarlo.

CATEGORÍA METODOLOGÍA: se consideraron los aspectos exclusivamente metodológicos, es decir, las maneras de hacer para lograr responder a las preguntas planteadas y/o a los objetivos formulados. Las subcategorías identificadas son cinco:
1) ***Aplicación de un cuestionario:*** se clasifican los artículos de acuerdo al tipo de cuestionario que implementan, cómo lo implementan y al tipo de análisis que realizan de los resultados obtenidos.
2) ***Aplicación de un taller formativo o de un programa de desarrollo profesional*****:** se clasifican los artículos de acuerdo a cómo se implementa el taller (o el programa) y al tipo de análisis que realizan de dicha experiencia.
3) ***Implementación de una propuesta para la enseñanza de la estadística*****:** se clasifican los artículos de acuerdo a cómo implementan y evalúan una propuesta en un espacio escolar.
4) ***Presentación de una propuesta para la enseñanza de la estadística*****:** se clasifican los artículos de acuerdo a cómo presentan las actividades y contenidos o el marco de referencia de una propuesta de enseñanza estadística.
5) ***Presentación, discusión y/o desarrollo de nociones o ideas:*** se clasifican los artículos de acuerdo a cómo los autores presentan, debaten y/o desarrollan nociones, ideas o propuestas.

Resultados de la Categorización

El gráfico 1 representa los resultados de la categoría “Problema de investigación”:

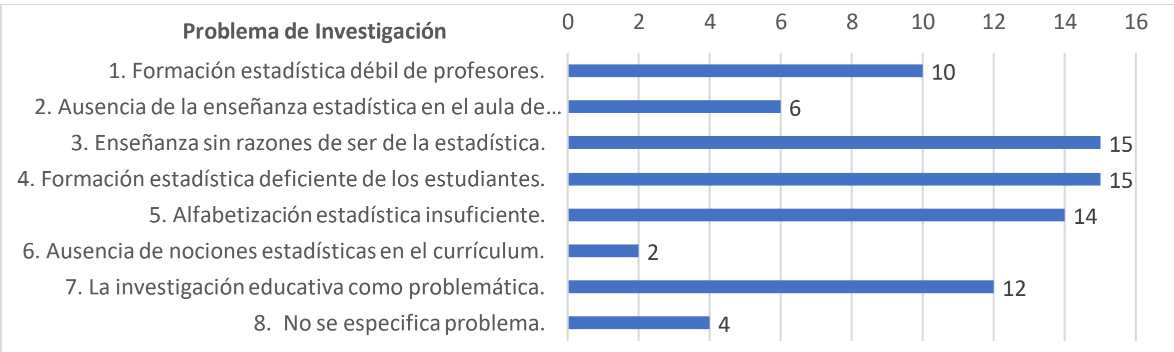


Gráfico 1: Distribución según la categoría "Problema de Investigación"

Se puede observar que los problemas explicitados con mayor frecuencia son los siguientes:
1) ***“Enseñanza sin razones de ser de la Estadística”,*** en la cual los artículos mencionan como problema de investigación una enseñanza de la estadística sin sentido, caracterizada por privilegiar un conocimiento técnico.
2) ***“Formación estadística deficiente de los estudiantes”,*** en la cual los artículos mencionan como problema de investigación que los estudiantes reciben una formación estadística deficiente, ya sea por

recibir escasa formación en estadística o una formación pobre en cuanto al desarrollo del pensamiento estadístico.

3) ***"Alfabetización estadística insuficiente",*** en la cual los artículos aluden a la problemática de que los ciudadanos cuentan con una alfabetización estadística insuficiente para poder enfrentar con éxito los retos que la cultura le demanda.

El gráfico 2 representa la categoría "Foco de la investigación" así:

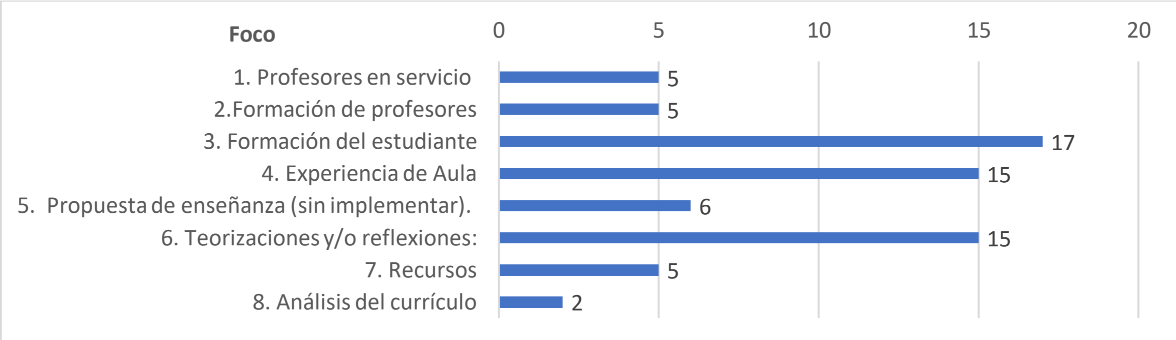


Gráfico 2: Distribución según la categoría "Foco"

Se puede observar la preponderancia del foco en la "Formación del estudiante". Por cuestiones de espacio, no es posible detallar cada uno de los descriptores de las subcategorías, pero es importante mencionar aquí que en la "Formación del estudiante", el descriptor "Análisis del conocimiento" es el que aparece con mayor preponderancia, con una frecuencia de 14 artículos. En dicho descriptor se incluyen aquellos artículos que evalúan a través de un cuestionario o de un experimento de enseñanza el razonamiento estadístico o la interpretación que realizan los estudiantes de nivel secundario o universitario. Por otro lado, se puede observar en el gráfico que la subcategoría "Análisis del currículo" registró la menor cantidad de artículos, con una frecuencia igual a 2. En esta subcategoría se incluyen los textos que analizan el diseño curricular de nivel secundario sobre alguna noción de estadística, o analizan el diseño curricular para el profesorado de educación secundaria.

Respecto a los enfoques o modelos que consideran más frecuentemente como marco teórico son: el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática con una frecuencia 9 (Godino y Batanero, 1994; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2009; entre otros), y el Modelo del Pensamiento Estadístico PPDAC, con 7 como frecuencia (Problema, Plan, Datos, Análisis, Conclusiones) (Wild y Pfannkuch, 1999). En el gráfico 3 se sintetiza esta categoría.

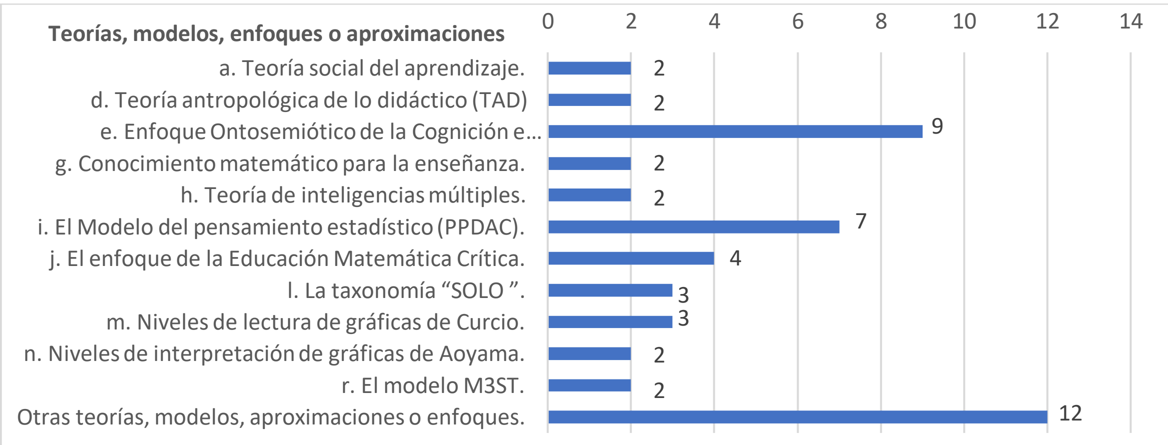


Gráfico 3: Distribución de los artículos según "Teorías, modelos, enfoques o aproximaciones

Respecto a los "Objetivos", los de mayor preponderancia son: "Evaluar la interpretación que realizan los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio" y "Promover el desarrollo del pensamiento y/o razonamiento estadístico (crítico) y/o la alfabetización estadística". En relación a la "Metodología", se observó que la modalidad con mayor frecuencia es "Aplicación de un cuestionario o descripción del diseño", incluyendo aquí los artículos que implementan un cuestionario de tipo cerrado, abierto o mixto y presentan los resultados, incluyendo o no la descripción del diseño y el análisis de las respuestas. En el Gráfico 4 se sintetizan estos resultados:

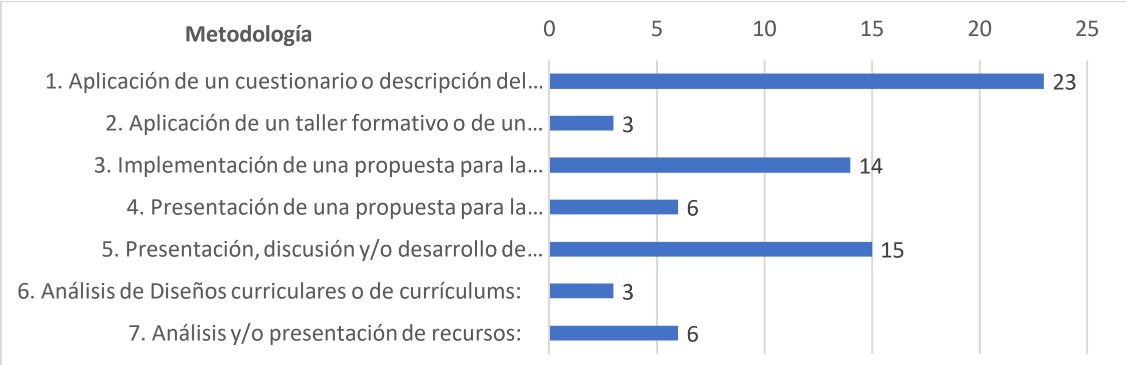


Gráfico 4: Distribución de los artículos según "Metodología"

Por otro lado, se puede interpretar a partir del gráfico 4 que las subcategorías “Aplicación de un taller formativo o de un programa de desarrollo profesional ” y “Análisis de diseños curriculares” registraron la menor cantidad de artículos, con 3 artículos cada una. En dichas subcategorías se incluyen respectivamente los artículos que implementan un taller formativo o un programa de desarrollo profesional para futuros profesores o profesores en servicio y los que realizan un análisis, ya sea de diseños curriculares o de programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística.

Respecto al nivel escolar, el de mayor preponderancia en el cuál realizaron las investigaciones, es el secundario. El gráfico 5 contempla esta distribución. Además, se destaca que dentro de esta categoría solo hay 3 artículos que investigaron en el nivel “Profesores en ejercicio”.

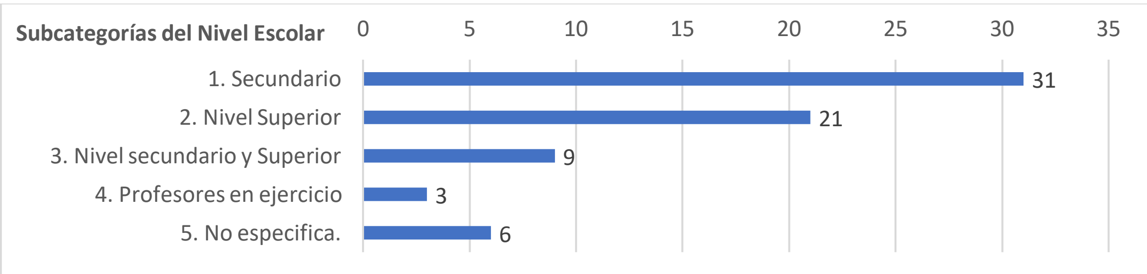


Gráfico 5: Distribución de los artículos según la categoría "Nivel Escolar".

Considerando el lugar y año donde se realizaron las investigaciones, los de mayor preponderancia son Colombia y el período (2010-2015] respectivamente.

Gráfico 6: Distribución de los artículos según la subcategoría "Lugar de Investigación".

Consideraciones Finales

A modo de síntesis, diremos que los problemas aludidos en este conjunto de 70 artículos son diversos pero que la mayor cantidad manifiestan a una enseñanza sin razones de ser, una enseñanza sin sentido, caracterizada por privilegiar un conocimiento técnico y aluden también a una formación estadística deficiente de los estudiantes, considerando que reciben una formación estadística deficiente, ya sea por recibir escasa formación en el área o una formación pobre en cuanto al desarrollo del pensamiento estadístico. A su vez, el foco de la mayoría de los trabajos recae en la formación de los estudiantes y los objetivos de esos trabajos se centran en evaluar la interpretación que realizan los estudiantes, futuros profesores o profesores en servicio y en promover el desarrollo del pensamiento y/o razonamiento estadístico (crítico) y/o la alfabetización estadística. En relación a los aspectos metodológicos, se concluyó que la modalidad con mayor frecuencia es la aplicación de un cuestionario o descripción del diseño. Finalmente, respecto al nivel escolar, el de mayor preponderancia en el cuál realizaron las investigaciones, es el secundario y el lugar y año donde se realizaron las investigaciones, son Colombia y el período (2010-2015] respectivamente.

La síntesis anterior nos conduce a concluir en la preponderancia otorgada al "estudiante" como centro de esta problemática. Consideramos que es importante considerar el problema desde todos los componentes del sistema didáctico, y no tanto solamente, desde el lugar del estudiante. Es decir, abordarlo también desde el polo del profesor y del saber en sí mismo. Finalmente, como ya lo mencionamos, este trabajo es parte de una tesis de grado aún en realización y sólo pretende, al menos parcialmente, mostrar aspectos de este problema e impulsar a la reflexión en la comunidad.

Referencias Bibliográficas

Pérez, A., Cueto, G., Fernández, M.S., Filloy, J., Diez, S.M., Kelmansky, D. y Pomilio, C. (2015). Mejorando las competencias para la enseñanza de la estadística de profesores de secundaria en formación a través de talleres participativos. En M.A. Sorto (Ed.), *Advances in statistics education: developments, experiences and assessments. Proceedings of the Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE)*, (pp. 1-6) Rio de Janeiro.

Pino, G. y Estrella, S. (2012). Educación estadística: relaciones con la matemática. *Pensamiento Educativo,* 49(1), pp. 53-64.

Zapata Cardona, L. (2010). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Memoria del 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* (pp. 98-106). Bogotá.

Zapata Cardona, L. y González Gómez, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática,* 29(1), pp. 61-89.

ANÁLISIS DEL INGRESO TOTAL FAMILIAR RELEVADO POR EPH-INDEC. MODELIZACIÓN Y CATEGORIZACIÓN MEDIANTE DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD TEÓRICAS

Ariel H. REAL, Adriana R. IBERO
División Estadística, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján
ariel.h.real@gmail.com, raquelibero@gmail.com

Resumen

La estimación del ingreso de las personas es un tema de interés en muchos campos de las ciencias sociales. La Universidad Nacional de Luján desea conocer sobre los ingresos totales familiares de sus alumnos en las carreras Licenciatura en Enfermería, Licenciatura en Trabajo Social y Contador público, siendo necesario para ello elaborar un cuestionario que incluya un sistema de categorías apropiado para el relevamiento del ingreso. Se plantea la necesidad de caracterizar a la población estudiantil de estas carreras para poder detectar vulnerabilidades que puedan derivar de situaciones de pobreza de sus hogares. Se considera que estas situaciones impiden que nuestros estudiantes tengan una integración social plena, y condiciona sus posibilidades de transitar una carrera universitaria exitosamente. Con los datos del cuarto trimestre del año 2020 obtenidos por la Encuesta Permanente de Hogares de Argentina (EPH-INDEC), y bajo el supuesto de que los estudiantes de la UNLu se insertan en los aglomerados urbanos de la Provincia de Buenos Aires alcanzado por dicho operativo, se analizó el ajuste de la variable Ingreso Total Familiar a cuatro posibles distribuciones de probabilidad teóricas (Exponencial, Log-Normal, Gamma y Pareto). De conseguir el ajuste, la distribución seleccionada servirá de base para proponer un sistema de categorías a utilizar en la pregunta de ingresos en el cuestionario dirigido a los estudiantes, y posteriormente permitirá monitorear la calidad de los datos obtenidos.

Palabras clave: Ingresos - Log-Normal – Gamma – Ajuste - Chi-Cuadrado - Komogorov-Smirnov.

Introducción

Este trabajo se desprende del Proyecto de Investigación Interdepartamental (Departamentos de Ciencias Básicas y Ciencias Sociales de la Universidad Nacional de Luján) denominado "Espacio de Bienestar y Vulnerabilidad social en estudiantes de las carreras de Trabajo Social, Enfermería y Contador de la UNLu"
El proyecto busca conocer el estado de vulnerabilidad de los estudiantes, desde un enfoque multidimensional de abordaje de la pobreza, para lo cual será necesario indagar sobre aspectos como acceso a la salud, tipo de alimentación adecuada, nivel de educación alcanzado, clima educacional del hogar donde viven los estudiantes y sus ingresos.
El estado de vulnerabilidad del estudiante, según el enfoque de pobreza multidimensional elegido para el proyecto, se basa en la propuesta de Beccaria y Minujín (1985), la cual refiere al uso conjunto de los enfoques de Necesidades Básicas Insatisfechas (NBI) y Línea de Pobreza (LP).
Para ello, se propuso el uso de un cuestionario auto-administrado que indagaba acerca de la situación de la población de estudiantes de las tres carreras.
En el turno de exámenes finales de diciembre 2019 se realizó una prueba piloto del cuestionario, dónde se confirmó la dificultad del relevamiento del ingreso del hogar, producto de la complejidad en las secuencias de preguntas utilizadas. Por este motivo, a inicios del año 2020 se comenzó a trabajar en la simplificación del cuestionario, apuntando a obtener información aproximada del ingreso del hogar, con la calidad suficiente como para arriesgar una clasificación de pobreza desde el enfoque de la línea[1]. La mejora apunta a encontrar un sistema de categorías que capte la distribución del ingreso total del hogar de manera simple.
Para la construcción de este sistema de categorías se plantean los siguientes supuestos como punto de partida:
En primer lugar, supondremos que la zona de influencia de la UNLu se ubica en la zona norte - noroeste de la provincia de Buenos Aires. Estamos hablando de las localidades cercanas a su Sede Central (en Luján) y Centros Regionales (Campana, San Miguel, Chivilcoy).
Un segundo supuesto que vamos a asumir es que la amplia mayoría de los estudiantes viven en zonas urbanas.
Por último, consideraremos que una gran parte de esta región es cubierta por el INDEC mediante el relevamiento trimestral que realiza la Encuesta Permanente de Hogares (EPH). Esta encuesta provee información sobre los ingresos urbanos de los hogares en áreas urbanas de la Provincia de Buenos Aires. Si bien sabemos que estas áreas no tienen una superposición exacta con el área de influencia de la universidad, vamos a considerar que los ingresos declarados en los mismos pueden representar de manera aproximada la situación de ingresos de los estudiantes.
Nuestro objeto de estudio serán los hogares que contienen a los estudiantes de las carreras foco de la investigación, y para poder definir un sistema de categorías de sus ingresos, planteamos la necesidad de analizar la variable Ingreso Total Familiar (ITF) relevada en la EPH.
Según las proyecciones del INDEC para el año 2021 la Provincia de Buenos Aires cuenta con aproximadamente 20.788.434 habitantes. La EPH estima un alcance de a lo sumo el 70% de esa población, compuesto por la población urbana de la provincia de Buenos Aires en los aglomerados urbanos Gran La Plata, Bahía Blanca - Cerri, Partidos del Gran Buenos Aires, Mar del Plata, San Nicolás - Villa Constitución y Viedma - Carmen de Patagones[2].
En el último trimestre de 2020, la población urbana de la provincia de Buenos Aires contaba con 5.558.432 personas ocupadas, entre los cuales el 70% correspondía a Obreros o Empleados bajo relación de dependencia, y un 28 % a personas que trabajaban por cuenta propia. Esto nos muestra claramente la importancia de ambas categorías ocupacionales a la hora de estimar el ITF con datos de EPH. A esto se le suma, como es bien sabido, las dificultades en la captación del dato, sobre todo en los estratos sociales más altos, que ven con resquemor informar sus ingresos al encuestador.
El problema de declaración del ingreso se presenta fundamentalmente en las categorías Patrones o Cuentapropistas. Los obreros o empleados tienen la tasa de no respuesta más baja, y como mencionamos anteriormente representan el 70% de la población ocupada (no consideramos los trabajadores familiares sin remuneración, ya que no influyen en el ITF).
Durante 2020 y 2021 todas las categorías ocupacionales tuvieron un incremento en la tasa de no respuesta de ingreso. Este factor, sumado al salto registrado en la categoría de Patrones (de 23% a más de un 25% durante 2021) nos llevó a considerar el último trimestre del año 2020 como el más apropiado para nuestro trabajo por su menor volatilidad entre las categorías ocupacionales.

[1] El enfoque de la línea hace referencia al método de medición de la pobreza mediante la definición de un valor monetario mínimo que un hogar debería alcanzar o superar para no ser clasificado como pobre.

[2] Es importante mencionar que dentro de los aglomerados mencionados se incluyen localidades que no pertenecen a la Provincia de Buenos Aires, pero que constituyen aglomerados urbanos con ciudades de la Provincia. Debido a cómo se presentan los datos de EPH no es posible separar estas localidades en el análisis. Nos referimos a Viedma y Villa Constitución.

El ITF se estima en promedio en $62.252,38, con una gran dispersión relativa, alcanzando un Coeficiente de Variación de 83%. Con un mínimo de $0 y un máximo de $845.000,00 la distribución es asimétrica con sesgo positivo, lo que se puede confirmar por su coeficiente de asimetría superior a 3.
Esta distribución tiene la particularidad de que el 80% de los hogares se ubica por debajo de un ingreso de $100.000,00 lo que nos muestra una gran concentración de información en los valores más bajos, y además presenta algunos hogares aislados con valores muy altos (quizás outliers), por encima de $234.000,00.
Por otro lado, si bien a la izquierda de la distribución no se identifican valores outliers, el valor 0 aparece en 41.305 hogares (0,7% del total). Esto implica que el 0,7% de los hogares en los aglomerados urbanos de Buenos Aires, en el cuarto trimestre de 2020 no contaron con ningún tipo de ingreso, y por ende con ningún recurso monetario para subsistir.

Hipótesis

En base a lo conocido sobre la variable Ingreso Total Familiar (ITF) relevada por el INDEC en el operativo de la Encuesta Permanente de Hogares (EPH) en los aglomerados urbanos de la Provincia de Buenos Aires, se afirma que su distribución empírica ajustará a al menos una de las siguientes distribuciones de probabilidad teóricas: Log-normal, Exponencial, Gamma o Pareto.

Objetivo General

Plantear un sistema de categorías para variable ITF, basados en una distribución de probabilidad teórica que la ajuste, para ser utilizado en el cuestionario destinado a la investigación de las condiciones de vulnerabilidad en los estudiantes de las carreras Licenciatura en Administración, Contador Público y Trabajo Social de la UNLu.

Objetivos Específicos

Para el logro del Objetivo General planteado se propone trabajar sobre los siguientes objetivos específicos:

1. Analizar el ajuste de la distribución del ITF con las cuatro Distribuciones de Probabilidad teóricas de interés en nuestra hipótesis, la Log-normal, la Exponencial, la Gamma y la de Pareto, a través de métodos gráficos (QQ Plots).
2. En las distribuciones de probabilidad teóricas que mejor se ajustaron a la variable ITF mediante el gráfico, avanzar en la aplicación de las siguientes pruebas:
    a. Prueba de Bondad de Ajuste.
    b. Prueba de Kolmogorov
3. Estimar los parámetros de definición de la distribución de probabilidad teórica con la cual se logre el mejor ajuste.
4. Construir un sistema de 10 categorías para la variable ITF que pueda ser utilizado en el contexto de la encuesta dirigida a estudiantes de la UNLu.

Marco Teórico

Concepto de Pobreza y su medición

Argentina se caracteriza por sus grandes desigualdades económicas y sociales. Las mismas se observan en distintos aspectos de la vida humana: acceso a salud, educación, vivienda y calidad de vida son sólo algunos aspectos. La distribución de la riqueza de un país y cómo afecta a sus ciudadanos la desigualdad económica y su evolución es un tema de constante interés para la opinión pública y de los investigadores y científicos. En la universidad, este tema tiene impacto directo en el éxito académico de sus estudiantes. Conocer sobre el tema es importante para implementar políticas que apoyen a los estudiantes más desfavorecidos mientras transitan por sus aulas en busca de un futuro mejor.
Para las Naciones Unidas la desigualdad económica es la "diferencia que existe en la distribución de bienes, ingresos y rentas dentro de un grupo, sociedad, país o entre países". Esta distribución no se reparte en forma equitativa, concentrándose muchas veces en un bajo porcentaje de la población. Cuanta más riqueza y recursos se concentran en un sector pequeño de la sociedad, menos es la porción que queda para el resto.
Para medir la pobreza en Argentina oficialmente se utilizan dos metodologías básicamente:

a) Necesidades básicas insatisfechas (NBI), también conocido como método directo de medición.
b) Línea de pobreza (LP), también conocido como método indirecto de medición.

La medición del NBI se realiza con datos censales actualizados cada 10 años, sobre hogares. Definiendo hogares pobres a aquellos que cuenten con al menos uno de los siguientes marcadores de privación: hacinamiento, vivienda inconveniente, condiciones sanitarias, asistencia escolar, capacidad de subsistencia.
El método de Línea de Pobreza (LP) se estima a partir de la información provista por la EPH-INDEC, que es un relevamiento periódico, representativo de las grandes áreas urbanas del país, del cual es posible extraer información sobre la composición de los hogares y sus ingresos laborales y no laborales.
El método de línea identifica a los hogares con privación (indigentes o pobres) a partir de la insuficiencia de ingresos. Este concepto se construye partiendo de la definición de una canasta alimentaria básica (CBA) en cuya conformación se tienen en cuenta los requerimientos nutricionales (calóricos y proteicos) de distintos grupos de población (según edad, sexo y actividad). La valorización monetaria del conjunto de bienes alimentarios requeridos por un adulto equivalente[3], realizada a partir de los precios mensuales obtenidos por el Índice de Precios al Consumidor (IPC), conforma el nivel de ingresos requerido por este adulto para superar la clasificación de indigente. En tanto que, para superar la clasificación de pobreza, se construye una segunda línea a partir de valorizar la CBA, ampliada con una serie de bienes y servicios adicionales.
Estar por debajo de la línea de pobreza supone no conseguir los ingresos suficientes para la adquisición de bienes materiales, de la salud, la educación y la calidad de vida de una población, y por ende del futuro de un país.

Modelado de la distribución del Ingreso Total Familiar

La estadística tiene entre sus objetivos la cuantificación de los fenómenos, como también establecer rangos, categorizando los valores a partir de los datos recabados.
Se pretende a partir de las observaciones modelar la realidad empírica utilizando entre todas las técnicas y conocimientos la teoría de las probabilidades, especialmente las distribuciones paramétricas de probabilidad. Con estas últimas se quiere cubrir la necesidad básica de modelar fenómenos aleatorios que no pueden controlarse en la experimentación, representado a través de modelos teóricos el comportamiento de estos. A través de esas construcciones teóricas, se puede experimentar sobre aquello que la realidad no le permitía.
En el plano económico y social, la modelización paramétrica de la distribución de los ingresos posibilita su caracterización mediante un número reducido de parámetros, pudiendo simplificar cualquier análisis que tenga como objetivo estudiar aspectos distributivos.
El modelo más habitualmente utilizado para representar a la distribución del ingreso ha sido el de la distribución log-normal, aunque no es el único (Gasarini, Cicowiez y Sosa Escudero, 2014). La distribución Gamma, al tener una función de densidad asimétrica ha sido utilizada también por varios autores (Lafuente Lechuga, 1998), incluso la distribución exponencial como un caso especial de la distribución Gamma. Finalmente, la distribución de Pareto también fue propuesta como un modelo para explicar la distribución de las rentas de los individuos de una población (Lorenzo Landa, 2011).

Pruebas de bondad de ajuste a distribuciones teóricas

Son pruebas que contrastan una distribución empírica obtenida de una muestra con una distribución teórica. Se pretende comprobar si la distribución teórica supuesta es consistente con la muestra. Evidentemente, al trabajar con una muestra de una población, siempre existirán diferencias entre la distribución teórica y la observada. Sin embargo, habrá que comprobar si dichas desviaciones pueden ser debidas al azar o, por el contrario, proporcionan evidencias de que la distribución supuesta es incorrecta.

Desarrollo del trabajo

La variable Ingreso total familiar y su ajuste a una distribución de probabilidad teórica

Nuestro objetivo general es buscar una distribución de probabilidad teórica que nos permita trabajar con el ITF en la construcción de un sistema de categorías que haga sencillo y rápido el relevamiento de este dato.
Este sistema nos debería permitir avanzar en la clasificación de los hogares en pobres o no pobres, de acuerdo con el método de la Línea.

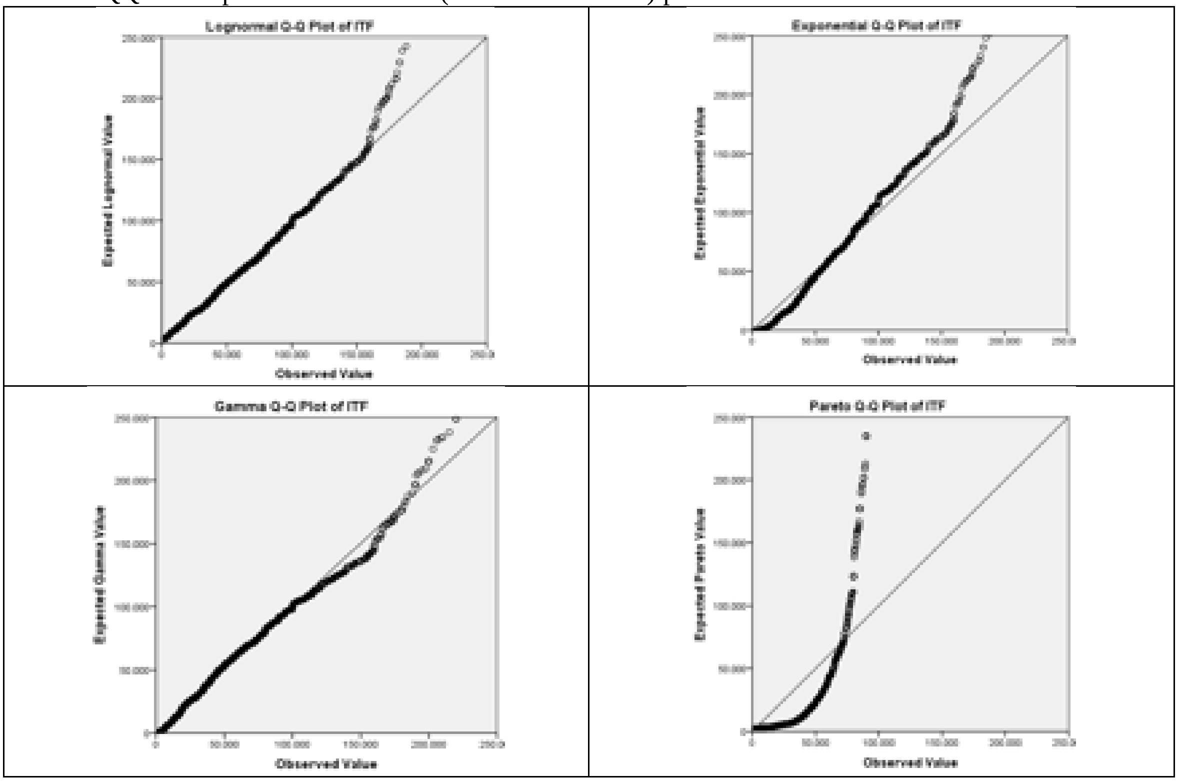
[3] Dado que los requerimientos nutricionales son diferentes según la edad, el sexo y la actividad de las personas, es necesario hacer una adecuación que refleje las características de cada miembro de un hogar en relación con sus necesidades nutricionales. Para ello, se toma como unidad de referencia el requerimiento energético de un varón adulto de entre 30 y 60 años con actividad física moderada (2.750 kcal), el cual se llama “adulto equivalente”. Un adulto equivalente requiere una canasta básica alimentaria (CBA).

En la sección Descripción del Objeto de Estudio hemos realizado una primera aproximación al comportamiento de la declaración del ITF en el aglomerado urbano Partidos del Gran Buenos Aires. Se observó allí que se trata de una distribución claramente asimétrica, con sesgo positivo y con la identificación de varios valores atípicos e incluso extremos.
Basados en el comportamiento observado, es que se ha planteado la hipótesis de ajuste a al menos una de las siguientes distribuciones de probabilidad: Log-normal, Exponencial, Gamma o Pareto. Se prevé para ello avanzar en el uso de tres métodos: el método gráfico, la prueba de bondad de ajuste, y la prueba de Kolmogorov-Smirnov.
Con el primer método, de relativa rapidez en su implementación, esperamos identificar a las distribuciones de probabilidad teóricas propuestas con mejor ajuste visual, para luego continuar en la implementación de los siguientes métodos.

Método Gráfico

Se analiza el ajuste visual de la variable ITF a las distribuciones de probabilidad teóricas planteadas como hipótesis, mediante el gráfico QQ-Plot.
Inicialmente se realizó un primer ajuste con todos los datos, excepto el 0 (que es un valor que no está incluido en el dominio de las distribuciones teóricas Exponencial, Log-Normal, Gamma o Pareto). Esta primera aproximación no resulta positiva, y ninguna distribución de las analizadas sugiere un ajuste interesante como para seguir explorando.
En un segundo ajuste hemos eliminado los valores extremos, quedándonos con los ingresos mayores a $0, pero menores a $234.000.

Gráficos QQ-PLOT para la variable ITF (sin datos extremos) para las distribuciones seleccionadas.



Fuente: Elaboración propia en base a datos del INDEC - Microdatos de la EPH Trimestre 4-2020.

Se puede observar que el gráfico superior de la izquierda correspondiente a la comparación de nuestra distribución de ingresos con la distribución de probabilidad Log-normal parece ser el de mejor ajuste visual. Luego, podríamos decir que la distribución de probabilidad Gamma (gráfico inferior izquierdo) es la que sigue como mejor aproximación. Los restantes casos muestran serios problemas de ajuste y por lo tanto decidimos descartar las distribuciones de probabilidad Exponencial y Pareto para describir al ITF.

Pruebas de Bondad de Ajuste

Se propone realizar dos pruebas de bondad de ajuste, una con la distribución de probabilidad Log-Normal y otra con la distribución de probabilidad Gamma. Para la prueba de bondad de ajuste es necesario categorizar la variable, por lo que se resolvió agrupar la información en 10 intervalos de igual amplitud.

Hipótesis a contrastar:
H_0: *No hay diferencias entre las proporciones muestrales y las proporciones esperadas para la distribución seleccionada.*
H_1: *Hay diferencias entre las proporciones muestrales y las proporciones esperadas para la distribución seleccionada.*

Prueba de Bondad de Ajuste - distribución de probabilidad Log-Normal

Estimamos los parámetros de la distribución de probabilidad Log-Normal en base a la distribución empírica. De acuerdo con las propiedades de la distribución Log-normal resulta que el logaritmo natural de la variable ITF sigue una distribución Normal con $\mu_{ln(x)} = 10{,}7469408$ y $\sigma^2_{ln(x)} = 0{,}5953054$
Estadístico de Prueba: $\chi^2_{k-p-1} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(O_i - E_i)^2}{E_i} = 214.675{,}90$
Finalmente, con 7 grados de libertad, el valor-p obtenido es igual a 0, lo que es significativo al 5% y nos indica que las evidencias son suficientes para Rechazar la Hipótesis Nula, concluyendo que no hay ajuste con una distribución Log-Normal.

Prueba de Bondad de Ajuste - distribución de probabilidad Gamma

Estimamos los parámetros de la distribución de probabilidad Gamma, que es la que utilizaremos para estimar las frecuencias esperadas de cada intervalo, resultando $\lambda = 0{,}0000310018 \quad \alpha = 1{,}886568967$
Estadístico de Prueba: $\chi^2_{k-p-1} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(O_i - E_i)^2}{E_i} = 146.537{,}74$
Para esta prueba decidimos nuevamente con 7 grados de libertad. El valor-p obtenido es igual a 0, que comparado con un nivel de significación del 5% nos indica que hay evidencias suficientes para Rechazar la Hipótesis Nula, concluyendo que no hay ajuste con una distribución Gamma.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Para el caso de la prueba de Kolmogorov-Smirnov no necesitaremos contar con los datos de ITF agrupados. Compara los valores de las funciones de distribución, tanto en la muestra, como la que teóricamente se derivaría de la población que se ha explicitado en la hipótesis nula. El estadístico de Kolmogorov-Smirnov consiste en la máxima distancia observada entre ambas funciones de distribución, y su valor se compara con una tabla específica de este estadístico, ya que el mismo no sigue ninguna distribución de probabilidad teórica conocida.

Hipótesis a contrastar:
H_0: *No hay diferencias entre las proporciones muestrales y las proporciones esperadas según la distribución de probabilidad seleccionada.*
H_1: *Hay diferencias entre las proporciones muestrales y las proporciones esperadas según la distribución de probabilidad seleccionada.*

Prueba de Kolmogorov-Smirnov –distribución Log-Normal

Estadístico de prueba: $D_n = máxima\ |F_n(y) - F(y)| = 0{,}059339$. Se puede verificar que esta diferencia surge del valor observado del ingreso total familiar igual a $140.000.
Valor crítico del test considerando un $\alpha = 0{,}05$ y el tamaño de nuestra muestra $n = 5662375$ hogares

$$D_c = \frac{1{,}36}{\sqrt{5662375}} = 0{,}000572$$

Dado que $D_n = 0{,}059339 > D_c = 0{,}000572$ la decisión es Rechazar la H_o, y por lo tanto podemos concluir que existen evidencias para rechazar la Hipótesis Nula y concluir que no hay ajuste con una distribución de probabilidad Log-Normal. En este caso, la diferencia máxima detectada entre la función de distribución empírica y la teórica no es lo suficientemente chica como para no rechazar la hipótesis nula.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov –distribución Gamma

Estadístico de prueba:$D_n = máxima\ |F_n(x) - F(x)| = 0{,}040121$
Valor crítico del test considerando un $\alpha = 0{,}05$ y el tamaño de nuestra muestra $n = 5662375$ hogares

$$D_c = \frac{1{,}36}{\sqrt{5662375}} = 0{,}000572$$

Dado $D_n = 0{,}040121 > D_c = 0{,}000572\ _n$ la decisión es Rechazar la H_o y se concluye que no hay ajuste con una distribución de probabilidad Gamma. En este caso, la diferencia máxima detectada entre la función de distribución empírica y la teórica no es lo suficientemente chica como para no rechazar la hipótesis nula.

Conclusiones

La declaración del Ingreso es compleja en cualquier encuesta. Somos conscientes de los problemas que la rodean, tales como la no declaración, la declaración incompleta, imprecisiones o distorsiones, entre otros.
No obstante, la EPH es una herramienta valiosa, y la única fuente de información que podría darnos acceso a la distribución del ingreso por hogar en los aglomerados urbanos de la provincia de Buenos Aires.
Nuestro trabajo nos permitió concluir que la distribución del ITF no ajustó a ninguna de las distribuciones de probabilidad teóricas propuestas. Es posible que esto se deba en parte a que nuestro trabajo tomó como objeto de estudio el ingreso agregado del hogar, y las teorías analizadas se enfocaban en modelizar el ingreso individual. Sin embargo, hemos visto que la mayor aproximación la logramos con la distribución de probabilidad Gamma (observarlos valores obtenidos de los estadísticos de prueba).
Frente a esta conclusión, y ante la necesidad de definir el sistema de categoría para incluir en el cuestionario que se administrará a los estudiantes de las carreras Contador Público, Trabajo Social y Enfermería de la UNLu, para el relevamiento del ingreso en sus hogares, hemos decidido hacer la siguiente propuesta:

1. Definir una estructura de 10 intervalos (categorías), en base a la distribución de la variable ITF recortada (sin valores extremos), que es el rango dónde conseguimos la mayor aproximación a la distribución Gamma.
2. Una vez obtenida la estructura, se especificó el último intervalo como abierto, de manera que los hogares con ingresos mayores a $234.000 puedan ser relevados.

La estructura de intervalos propuesta resulta:
(0; 23.399,9) – [23.400; 46.799,9) – [46.800; 70.199,9) – [70.200; 93.599,9) – [93.600; 116.999,9) – [117.000; 140.399,9) – [140.400; 163.799,9) – [163.800; 187.199,9) – [187.200; 210.599,9) y [210.600; más de 210.600).
Es importante recordar que este sistema de categorías está construido con datos de ingreso del trimestre 4 de 2020, momento en el cual la Canasta Básica Alimentaria (CBA) tenía un valor de $ 7.340,12.
El contexto económico argentino, con altas tasas de inflación, y paritarias anuales que ajustan los salarios seguramente demandará la necesidad de realizar ajustes en los valores límites de cada categoría definida al momento de aplicar el cuestionario.
En este sentido, una propuesta válida sería expresar los límites en términos de cantidad de CBA que podrían adquirirse con dicho monto. Esto tiene la ventaja de aprovechar las actualizaciones mensuales que realiza el INDEC de la CBA.

Sugerencias para trabajo futuro

Hemos planteado que la variable ingreso total familiar no ajustó a ninguna distribución de probabilidad teórica, pero también planteamos que se aproxima más a la distribución de probabilidad Gamma. Por este motivo, una vez realizado el relevamiento con los estudiantes se sugiere hacer un estudio de las frecuencias obtenidas de respuestas en cada intervalo, para ver si la respuesta se ajusta o aproxima a la distribución de probabilidad Gamma. Esto se plantea como una herramienta inicial de verificación de la calidad de la información.
Por otra parte, sería interesante avanzar en la comparación con otros períodos distintos al de referencia, sobre todo en trimestres no afectados por la pandemia, para verificar si las distribuciones de probabilidad analizadas logran ajuste a la realidad del ITF.
Oras estrategias de ajuste que podrían probarse: la combinación de distribuciones para diferentes rangos de definición de la variable ITF; o probar ajustes condicionados a valores de alguna variable correlacionada, como el tipo de ocupación del miembro del hogar.

Referencias Bibliográficas

BIANCO Ana M y MARTÍNEZ Elena J. Año 2004. Probabilidades y Estadística (Computación). Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

CASTILLO CABAY Luis Cornelio. Año 2017. Distribución Generalizada de Pareto: estimación de parámetros con/sin datos censurados y aplicaciones. Carrera de Ingeniería Matemática. Facultad de Ingeniería, Ciencias Físicas y Matemática. Universidad Central del Ecuador.

GASPARINI Leonardo, CICOWIEZ Martín y SOSA ESCUDERO Walter. Año 2014. Pobreza y desigualdad en América Latina. Conceptos, herramientas y aplicaciones. CEDLAS Centro de Estudios Distributivos, Laborales y Sociales de la Universidad Nacional de La Plata.

GORGAS GARCIA Javier, CARDIEL LÓPEZ Nicolás y ZAMORANO CALVO Jaime. Año 2009. Estadística básica para estudiantes de ciencias. Departamento de Astrofísica y Ciencias de la Atmósfera, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Complutense de Madrid.

INDEC. Año 2021. Condiciones de Vida Vol. 6 Nro. 1. Valorización mensual de la canasta básica alimentaria y de la canasta básica total. Gran Buenos Aires.

LAFUENTE LECHUGA Matilde. Año 1998. La distribución Gamma como modelo para analizar la distribución de la Renta: una aplicación a la E.P.F. 1990-91. Estudios Regionales N° 50. Universidad de Murcia.

LORENZO LANDA Genoveva. Año 2011. Tesis de Grado “Modelación de los Retornos del Índice de Precios y Cotizaciones de México con la Distribución Pareto y Censura de Tipo II”. Facultad de Estadística e Informática. Universidad Veracruzana.

MANTILLA BLANCO Paula Liliana. Año 2015. Tesis de Grado “Pruebas de Bondad de Ajuste y el problema de dos muestras en el contexto de procesos de Poisson no homogéneos”. Universidad de Los Andes.

MENDENHALL William, WACKERLY Dennis D., SCHEAFFER Richard L. Año 1994. Estadística Matemática con Aplicaciones. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.

MORA VALENCIA Andrés. Año 2010. Artículo “Estimadores del índice de cola y el valor en riesgo”. Colegio de Estudios Superiores de Administración, Colombia.

SAGULA Jorge Enrique. Año 2004. Fundamentos de Estadística y Probabilidad para Administración. Universidad Americana.

ZAPATA Fanny. Año 2021. Distribución exponencial. Lifeder. Recuperado de https://www.lifeder.com/distribucion-exponencial/.

IMÁGENES DE LOS PROFESORES RESPECTO A LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Carolina CABRERA, Liliana TAUBER
Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral
caro.cabreera@hotmail.com, estadisticamatematicafhuc@gmail.com

Resumen

La Educación Estocástica ha sufrido con el tiempo diversas transformaciones, que se ponen de manifiesto en los planes de estudio de carreras de nivel superior. Asimismo, en la Educación Secundaria se sugieren contenidos estocásticos que, en algunos casos, se proponen desde un enfoque interdisciplinar. Este panorama, que parece favorable para la Educación Estadística, tiene su contracara en la formación de profesores y en el currículo real, dado que, según diversos estudios, la realidad es que la Estadística a nivel Secundario no se enseña, y a nivel Superior se desarrolla de una manera descontextualizada.

Así, desde esta investigación se buscó indagar sobre diversas características que conforman la realidad laboral y formativa de profesores de Matemática en relación con la Estadística y su didáctica. Asimismo, se exploraron algunas imágenes de los profesores sobre la disciplina. Para ello se realizó un estudio exploratorio a través de la aplicación de un cuestionario virtual a una muestra no probabilística de profesores de Matemática. El mismo permitió aportar cierta evidencia sobre las imágenes que tienen los profesores de Matemática acerca de su propia formación estadística y de lo que implica la enseñanza de la Estadística. De este análisis pudieron detectarse ciertas imágenes que podrían asociarse a una visión de la Estadística como una ciencia utilitarista e instrumental, lo cual expresa una imagen sesgada e inacabada de lo que es la disciplina.

Palabras Clave: Imágenes de los Profesores - Educación Estadística - Formación de Profesores.

Introducción

La Educación Estocástica ha sufrido con el tiempo diversas transformaciones, que se ponen de manifiesto en los planes de estudio de carreras de nivel superior. Asimismo, en la Educación Secundaria se sugieren contenidos estocásticos que, en algunos casos, se proponen desde un enfoque interdisciplinar (p.e: Núcleos Interdisciplinarios de Contenidos, 2016). Este panorama, que parece favorable para la Educación Estadística, tiene su contracara en la formación de profesores y en el currículo real, dado que, según diversos estudios, la realidad es que la Estadística a nivel secundario no se enseña, y a nivel superior, se desarrolla de una manera descontextualizada.

Partiendo de la premisa de que es necesario conocer el problema para poder buscar soluciones es que nos hemos propuesto indagar sobre las tendencias didácticas e imágenes que manifiestan profesores de Matemática que ejercen en los niveles secundario y superior respecto de la Estadística y de su enseñanza.

Antecedentes y Marco Referencial

En investigaciones previas (Tauber, Cravero y Redondo, 2013; Tauber, 2014; Tauber, Albrecht y Bertorello, 2011; Tauber y Bertero, 2019) se detectaron diversas concepciones, creencias y dificultades en la comprensión de los profesores de matemática en torno a las ideas estocásticas fundamentales.

Asimismo, en foros de discusión en los que han participado profesores de matemática en ejercicio en Argentina, se ha detectado que, el 88% de 2800 docentes consultados (Tauber, 2017), declara no enseñar estadística en el nivel secundario aún, cuando en los documentos oficiales aparecen orientaciones y contenidos sobre Estadística y Probabilidad, desde primer año de la Educación Secundaria. Ante la consulta de por qué no enseñan los conceptos estocásticos, los profesores demuestran diversas concepciones sesgadas respecto de la disciplina. Por un lado, plantean que el carácter multidimensional de un estudio estadístico les da ansiedad y, por lo tanto, deciden no enseñarla. Por otro lado, indican que no la enseñan porque estos contenidos están como último tema en el listado que se detalla en los diseños curriculares. Por último, otros justifican su elección expresando que la computadora puede solucionar los problemas estadísticos y que, en ese sentido, los estudiantes pueden estudiar solos porque son sencillos (Tauber, 2017).

Estos antecedentes permitieron explorar una complejidad que generó el interés que guió el presente trabajo. Así, se realizó una indagación bibliográfica para buscar otros antecedentes que mostraran las complejidades de la Educación Estadística en otros países y que proporcionaran fundamentos teóricos desde la Didáctica de la Estadística. Dicha revisión permitió analizar trabajos como el estudio de Leguizamón, Patiño y Suárez (2015) quienes identificaron tendencias didácticas que mostraban que la mayoría de los profesores no han tenido una continuidad en la formación de Estadística; y de Zapata-Cardona y González Gómez (2017), donde indagaron sobre las imágenes o representaciones que los profesores de matemática tienen respecto de la enseñanza de la Estadística.

Estas autoras expresan que la imagen, es la manera en la que los docentes se ven en relación a la disciplina y está relacionada a la experiencia que tuvieron en su formación, la cual no había sido de las mejores puesto que les había resultado difícil, poco comprensiva, sin sentido, muy metódica, con muchas fórmulas por aprender y aplicar. Consideraban a la Estadística como la ciencia de los gráficos, las fórmulas y sólo como una aplicación de pruebas estandarizadas, con lo cual resulta una visión sesgada de la Educación Estadística.

Como contrapartida, autores como Engel (2019) o Gal (2019) se centran en la noción de Estadística Cívica la cual se focaliza en comprender la información estadística sobre la sociedad, tal como lo proporcionan los medios de comunicación. Es así que las consideran necesarias para la participación informada en las sociedades democráticas. Además, estos autores indican que, en las sociedades actuales, el debate público debería estar basado en hechos fundamentados más que en emociones y que para promover la formulación de políticas basadas en evidencia, la Educación Estadística debería abarcar dos áreas descuidadas en la educación actual: los fenómenos multivariados y la comprensión y el aprendizaje a partir de datos complejos. Dichos procesos implican que los docentes encargados de enseñar Estadística, estén preparados y formados para afrontar estos cambios vertiginosos.

Estudiar las imágenes sobre la estadística y su enseñanza se basa en la teoría social del aprendizaje, la cual concibe el aprendizaje y la constitución de la identidad como resultados de la participación de los individuos en comunidades sociales (Wenger, 2001). El individuo y la sociedad se constituyen mutuamente, así como también lo subjetivo se constituye en relación con lo objetivo, lo real con lo virtual, lo concreto con lo abstracto. Para comprender los procesos de formación de identidad y de aprendizaje, Wenger considera tres modos de afiliación: compromiso, imaginación y alineación. En este trabajo nos centramos en la imaginación como un modo de afiliación que consiste en crear imágenes del mundo y ver conexiones en el tiempo y en el espacio, haciendo extrapolaciones a partir de nuestra propia experiencia (Wenger, 2001). Las imágenes que los profesores tienen de la Estadística y su enseñanza revelan su relación con el mundo, cómo se ven en ese mundo y dan cuenta de su experiencia, pero a la vez son puntos de partida para la construcción de nuevas imágenes (Zapata-Cardona y Gónzalez Gómez, 2017).

El presente trabajo describe algunos avances desarrollados en el marco de una adscripción de iniciación a la investigación, la cual estuvo centrada en el estudio de las imágenes de profesores que se desempeñan en la educación secundaria y/o superior.

Metodología

Objetivos y Tipo de Estudio

Aunque el trabajo desarrollado ha sido más amplio, en esta ponencia, nos proponemos describir algunos indicadores que permiten dar cuenta de ciertas tendencias didácticas e imágenes acerca de la Estadística y de su enseñanza, expresadas por profesores que se desempeñan en la educación secundaria y/o superior.

Inicialmente nos propusimos estudiar las imágenes que los profesores de Matemática tienen de la Estadística como disciplina científica y más particularmente de la Educación Estadística, como un área que permite formar ciudadanos críticos (Gal, 2019). Con esta meta, se pretendía realizar un estudio exploratorio-interpretativo basado en un análisis de contenido (Cohen y Manion, 1990). Para la elaboración del mismo, se pretendía utilizar una categorización de imágenes establecidas por Wenger (2011) y por Zapata-Cardona y González Gómez (2017). En este sentido, se realizó una modificación en relación con lo previsto inicialmente ya que se preveía que para poder efectuar dicho análisis de contenido se realizarían entrevistas a distintos profesores en ejercicio en distintos niveles educativos. Dicho proceso no se pudo implementar porque, en el período que estaba previsto, se establecieron las restricciones debidas a la pandemia por CoVid-19 y esto provocó que se debiera modificar la metodología planificada. Aunque las entrevistas podrían haberse realizado de manera virtual, la realidad permitió comprobar que los docentes que se había contactado no disponían del tiempo adecuado para llevarlas a cabo.

En consecuencia, se elaboró un cuestionario que fue aplicado a través de un formulario de Google. La aplicación de este instrumento favoreció que los encuestados pudieran completarlo en el tiempo disponible, sin tener que concretar un horario específico. La limitación principal es que se acotó la posibilidad de poder realizar un análisis de contenido porque se tomó la decisión de realizar preguntas con respuestas cerradas o breves, de tal modo que los encuestados pudieran completar el formulario en un tiempo menor. Por supuesto, esto acotó el análisis de contenido previsto a sólo un análisis descriptivo de algunas características que se detallan más adelante. Otra limitación fue la cantidad de respuestas que se obtuvieron, debido a que se contactó a 500 docentes (cuyos correos habían sido obtenidos a partir de una base de datos basada en información de asistentes a jornadas de Educación Matemática y de Educación Estadística) y sólo respondieron 80 de esos profesores.

Somos conscientes de estas limitaciones, pero igualmente las respuestas obtenidas han permitido detectar ciertas tendencias del grupo bajo estudio, aunque sabemos que tales características no son generalizables a todo el colectivo docente.

Sujetos de Estudio

Como se mencionó, los sujetos de estudio fueron 80 profesores de Matemática que respondieron el cuestionario de los cuales la mayoría asistieron a las II Jornadas Argentinas de Educación Estadística. En este sentido, se supone que los resultados obtenidos podrían estar sesgados debido a que pensamos que estos docentes tienen un cierto interés en el área. Esta conjetura surge del hecho de que la mayoría de los profesores que asistieron a la IV Jornada de Educación Matemática, no respondieron al cuestionario.

Instrumento de Recolección de Datos

Es preciso indicar que los objetivos que se tuvieron en cuenta al momento de elaborar el cuestionario fueron:

- Caracterizar la experiencia previa de cada docente en relación con su aprendizaje de Estadística.
- Indagar sobre la modalidad que utiliza cada docente al desarrollar los contenidos de Estadística.
- Indagar sobre el material didáctico que utilizan los profesores para enseñar Estadística.

- Caracterizar las tendencias didácticas e imágenes de los sujetos de estudio en relación con la Educación Estadística.

En este sentido, la estructura del cuestionario se centró en diversas secciones: en la primera, se indaga sobre la experiencia de los profesores en su formación estadística en todos los niveles educativos por los que habían transitado, una segunda sección permite identificar quienes enseñan actualmente Estadística y quienes no y, una tercera sección, indaga en ciertas imágenes relacionadas con la enseñanza de la Estadística (tanto para aquellos que enseñan como para los que no enseñan). Algunas de esas preguntas tienen diversas opciones de las cuales el encuestado debe elegir con la que se siente más cercano. Esas opciones se elaboraron en base a la información obtenida de otros estudios sobre imágenes de los profesores, particularmente, las imágenes definidas por Zapata-Cardona y González Gómez (2017) porque se considera que al haber realizado un estudio en profundidad con un colectivo de profesores de Matemática podrían brindan información de referencia que se adecuaba a los encuestados.

Análisis y Discusión de Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos a partir de las respuestas dadas por los 80 encuestados. En el presente trabajo sólo se detallan los resultados que aportan información asociada a las características de los sujetos bajo estudio y a sus imágenes respecto a la Estadística y su enseñanza.

Características sociodemográficas de los sujetos de estudio

Los 80 profesores que respondieron al cuestionario son oriundos de diversas localidades de varias provincias argentinas, a saber: 39 de Santa Fe, 19 de Entre Ríos, 10 de Corrientes, 5 de Córdoba, 4 de Buenos Aires, 1 de San Luis, 1 de Santa Cruz y 1 de Chaco.

En el Gráfico 1, se presenta la distribución del nivel educativo en el que se desempeña cada docente. Debido a que cada docente puede desempeñar su labor en más de un nivel, la suma de las frecuencias porcentuales es superior al 100%. Vemos que, la mayoría de estos docentes desempeña su labor en la Educación Secundaria (81,3%) y/o Superior (74,8%), incluyendo educación universitaria y no universitaria.

Gráfico 1. **Nivel o niveles educativos donde se desempeña cada docente**

En relación con la formación estadística recibida en la vida estudiantil de los profesores

Por un lado, aunque el 91,3% de los profesores encuestados declaró haber recibido formación Estadística en algún nivel educativo, sorprende encontrar 7 de los 80 docentes que declaran no haber recibido formación alguna en Estadística en ninguno de los niveles educativos por los que transitó en su vida estudiantil. Por otro lado, de los 73 profesores que alguna vez tuvieron Estadística en su vida como estudiante, sólo 2 tuvieron en

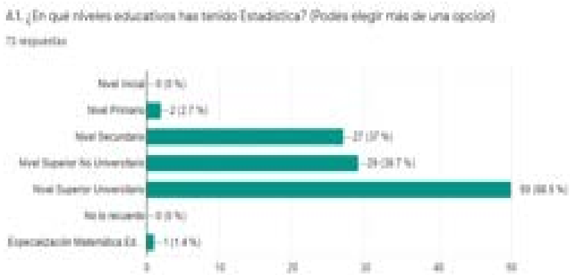


Gráfico 2. **Nivel o niveles educativos en el que cada docente recibió formación en Estadística**

Gráfico 3. **Imágenes sobre la formación estadística recibida**

el nivel primario y 27 en el secundario, el resto (44 de 73) sólo tuvo formación en el nivel superior (Gráfico 2). A este grupo se le preguntó sobre cómo considera que fue su formación y así el 74% (54 de 73 profesores), indicó que la formación recibida se centró en una mezcla de teoría con aplicaciones prácticas dirigidas y específicas a cada concepto desarrollado, el 19,2 % indica haber recibido una formación eminentemente teórica y el 6,8% restante (5 de los encuestados), indica haber recibido una formación eminentemente práctica con poco sustento teórico (Gráfico 3).

De aquí podemos indicar que, para estos encuestados, la formación estadística ha estado centrada más bien en la aplicación de fórmulas con o sin sustento teórico, pero con poca relación con los procesos de razonamiento y de pensamiento estadístico definidos por Gal (2019), los cuales se desarrollan a partir de la evolución de ideas estocásticas fundamentales que permiten integrar distintos conceptos que se amplían a través del proceso educativo.

El resultado anterior queda más respaldado aún a partir de lo que indicaron en relación con las características que tenían las clases que recibieron ya que el 50,6% de los 73 docentes, indicaron que las clases estaban centradas en la aplicación de fórmulas (30,1%) o en el fundamento teórico de los análisis estadísticos, pero sin aplicaciones (20,5%) (Gráfico 4). Estos resultados apoyan la imagen de la *Estadística como una ciencia formalizante*, tal como lo plantean Zapata-Cardona y González Gómez (2017), puesto que puede observarse que la formación estadística ha estado basada en el formalismo matemático y en la deducción más que en la variación propia de los fenómenos aleatorios para explicar y encontrar respuestas a contextos particulares. Siguiendo a dichas autoras, se puede indicar que este tipo de imagen está asociada al *dominio de conceptos y representaciones estáticos,* pues sólo debían ser aprendidos; *alienantes*, porque se considera el saber para un sujeto desposeído de conciencia; *objetivo*, separado del sujeto que aprende; *intransformable*, ya que la tarea de sus profesores era transmitirlo; *sumisos*, porque se acepta el saber tal cual se presen

ta y *técnico*, basados en un lenguaje calculatorio formalizante e inexpresivo.

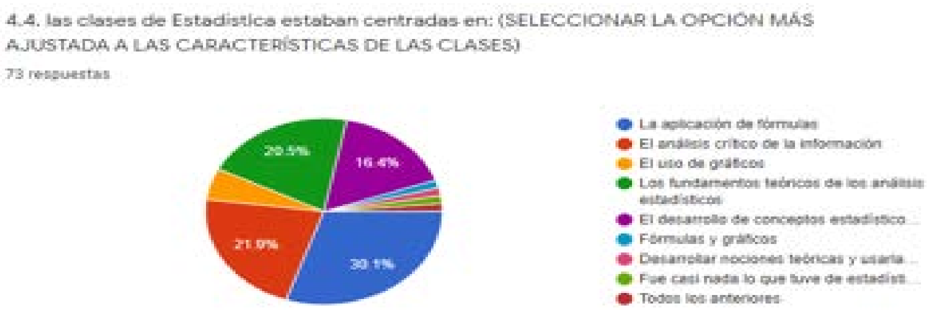


***Gráfico 4.* ¿En qué se centraban las clases de Estadística en su formación estudiantil?**

<u>En relación con su propio desempeño en la enseñanza de Estadística</u>

De los 80 docentes encuestados, 24 (de los cuales 16 desempeñan su labor en el nivel medio y 8 en el nivel superior) indicaron que actualmente no enseñan Estadística. Cuando se les preguntó el motivo por el que no lo hacen (Gráfico 5), el 93,75% de los profesores de matemática que desempeñan su labor en el nivel secundario y deciden no trabajar con la Educación Estadística responde: *"porque aparece como último tema en los NAP y en el Diseño Curricular y nunca alcanza el tiempo"* o *"porque no está en el programa que doy"*. El resto de los profesores que desarrollan sus clases en el nivel superior no enseñan Estadística por desempeñarse en asignaturas que no contemplan estos contenidos.

Gráfico 5. ¿Por qué no enseñás Estadística? (profesores que trabajan en el nivel medio)

Aunque en esta muestra, sólo el 30% de los docentes no enseñan Estadística, las justificaciones que realizan sobre los motivos por los que no la enseñan, no denotan imágenes que se pueda relacionar con lo que plantean Zapata-Cardona y González Gómez (2017), pero observamos coincidencias con los resultados obtenidos en Tauber (2017), con lo que se podría indicar que aún hay profesores que por distintas razones deciden no enseñar contenidos estadísticos, aún, cuando los mismos están presentes en los diseños curriculares provinciales. Una de estas razones es que no les alcanza el tiempo, lo cual es un motivo discutible, dado que en ningún caso los documentos oficiales indican el orden en el que se deben desarrollar los contenidos. Por otra parte, los conceptos estadísticos podrían desarrollarse de una manera integrada, tanto desde lo intra-matemático como desde lo extra-matemático. Lo anterior queda de alguna manera evidenciado en el comentario que realiza el Profesor 1 en la tercera sección del cuestionario:

> "*Dentro de la provincia de Santa Fe como los contenidos son ejes orientativos no se vuelven prescriptivos. Tal situación hace que quede a criterio de cada docente. Como el colectivo docente no funciona como colegio, no hay acuerdos mínimos en la incorporación o desarrollo de temas. Así, la incorporación de la estadística queda a la buena voluntad del docente. Es necesaria una formación tanto en lo conceptual como en lo didáctico, ya que la metodología de trabajo difiere a otros marcos conceptuales de la matemática y hasta términos como razón y proporción tienen significados diferentes que merecen una discusión*".
>
> Otros docentes brindan distintos argumentos para fundamentar por qué no enseñan Estadística, a saber:
>
> *(Profesora 2) Me parece muy importante que se enseñe Estadística, pero como no alcanza el tiempo para tantos contenidos y el nivel en el secundario es cada vez más bajo, no llego a dar estadística. La carga horaria de matemática debería ser mayor.*
>
> *(Profesora 3) La única vez que tuve estadística fue en una sola materia de la Facultad. ... mientras que, de cálculo, álgebra geometría había todos los años. Me parece que eso también hace a que en la enseñanza secundaria sólo se dé estadística en un año (y no en todos, gradualmente) o a veces ni se dé.*
>
> *(Profesora 4) Como docente es visible el desinterés por la Estadística entre los colegas, podría decirse hasta desvalorizada, si damos a elegir qué contenido no dar en el año para priorizar otros, Estadística junto con Probabilidad son las primeras que se dejan afuera de la enseñanza. Creo que es producto de la mala o escasa formación en el área.*
>
> *(Profesora 5) En 2015 se realizó un cambio de plan en la escuela donde doy clases y sacaron una materia en donde daban solo estadística y probabilidad, la profesora fue reubicada en otras horas y en su lugar colocaron 3 horas de matemática, con lo cual la carga horaria no me es suficiente para trabajar estadística. En 1° año se dan algunas nociones básicas de construcción de tablas y gráficos.*
>
> *(Profesora 6) Me cuesta muchísimo enseñar estadística, tengo muchos baches con la Estadística, hasta me ha costado rendirla en mi formación terciaria.*

En cuanto a los 56 profesores que enseñan Estadística, 43 lo hacen en nivel secundario y 13 en nivel superior. De los que trabajan en secundaria, el 86 % tuvo formación previa en el área, e indican que ello había influido algo en su decisión de enseñar Estadística. En relación a la metodología que utilizan en sus clases, 32 % responde que sus clases se basan en que sus alumnos *"analicen información a partir de datos publicados en los medios", 54%* indica que trabajan "*con proyectos estadísticos partiendo de preguntas de interés*" o "*proyectos interdisciplinarios en los que deban relacionar con otras materias*". Mientras que 14% indica que desarrollan fórmulas y realizan actividades de aplicación y ninguno trabaja con material interactivo para introducir conceptos complejos.

Aunque en las respuestas que hemos presentado hay evidencias de imágenes muy diversas acerca de la enseñanza y del aprendizaje de Estadística, observamos algunas coincidencias con Zapata-Cardona y González Gómez (2017), tanto en los docentes que no enseñan Estadística como en los que sí lo hacen, aunque en estos casos en una proporción menor. En este sentido, es posible identificar una imagen común que aparece ligada a una *visión utilitarista y acrítica de la Estadística*, considerándola como una herramienta de aplicación de formalismos matemáticos, sin tener en cuenta la potencialidad de la Estadística para modelar la realidad y por, sobre todo, para tomar decisiones fundamentadas en la evidencia.

Además, teniendo en cuenta que la mayoría de los profesores habían caracterizado su formación Estadística previa como una *ciencia utilitarista-instumental y formalizante* (Zapata-Cardona y González Gómez, 2017) y que los mismos fueron partícipes de una Jornada de Educación Estadística, lo cual podría mostrar el interés por el área, todavía se sigue observando una cierta tendencia a la aplicación de fórmulas y a la construcción de gráficos sólo desde un enfoque procedimental. Esto coincide con lo expresado por Zapata-Cardona y González Gómez (2017), quienes indican que las imágenes de los profesores sobre la Estadística son resultado de una construcción a lo largo de la vida. Ellos también fueron estudiantes y esas experiencias han sido fundamentales en la forma como entienden y llevan a cabo la enseñanza de la misma.

Asimismo, si bien no se pudo acceder a un profundo conocimiento sobre la metodología utilizada generalmente en las clases, se conjetura de la existencia de alguna intención de cambiar la forma de enseñar estadística. Por ejemplo, el hecho de trabajar el análisis de información a partir de datos publicados en los medios o con proyectos, da una pauta de cierto compromiso, lo cual es de suma importancia para propiciar el pensamiento y la ciudadanía crítica.

Reflexiones Finales

Como ya se ha expresado, los sujetos participantes constituyen una muestra sesgada dado que han sido voluntarios autoseleccionados, quienes en su mayoría han sido asistentes a una Jornada de Educación Estadística o a algún curso de posgrado de Didáctica de la Estadística. Asimismo, es preciso indicar que no se ha presentado el análisis de todas las respuestas dadas por los profesores, por lo que resta culminar la caracterización de las imágenes de este grupo. Asimismo, consideramos que, para poder ahondar en las imágenes de los profesores, tanto en los que enseñan como en los que no enseñan Estadística, se deberían profundizar a partir de entrevistas a algunos casos típicos, de tal modo de indagar sobre cuestiones más profundas asociadas a los procesos de razonamiento y de pensamiento estadístico y a las propias prácticas. Estas son líneas que quedan abiertas y sobre las que seguiremos desarrollando en futuros trabajos.

Igualmente, a partir del análisis presentado en este trabajo, es posible identificar algunas tendencias en las imágenes expresadas, más específicamente, en aquellos docentes que deciden no enseñar Estadística.

Si se considera que, actualmente la investigación indica que la Educación Estadística es un elemento esencial en la formación de ciudadanos críticos que puedan tomar decisiones bien fundamentadas, los resultados obtenidos parecen dejar algunas evidencias sobre ciertos problemas en la formación de los profesores. Esto sugiere la necesidad de seguir profundizando en el estudio de las imágenes en relación con la Estadística y buscar maneras de utilizar estos resultados para repensar los procesos formativos en el área.

Referencias Bibliográficas

Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.) *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*. Disponible en: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Gal, I. (2019). Comprensión de la cultura estadística (alfabetización estadística): Sobre el conocimiento de contextos y modelos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.) *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística*.

Leguizamón, J., Patiño, O. & Suárez, P. (2015). Tendencias didácticas de los docentes de matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los medios educativos en el aula. *Revista Educación Matemática*, 27, (3). pp. 151-174.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2016). *Núcleos Interdisciplinarios de Contenidos*. Recuperado de: http://campuseducativo.santafe.gob.ar/category/blog/nic/.

Tauber, L., Albrecht, G. & Bertorello, N. (2011). Análisis previo de un cuestionario sobre conceptos fundamentales de alfabetización Estadística. En Comité Interamericano de Educación Matemática (Eds.) *Actas de XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Recife, Brasil. Disponible en: https://docplayer.es/13270641-Analisis-previode-un-cestionario-sobre-conceptos-fundamentales-de-alfabetizacion-estadistica.html

Tauber, L., Cravero, M. & Redondo, Y. (2013). Ideas estocásticas fundamentales que ponen en relación los profesores de matemática al analizar información estadística. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya (Eds.). *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. pp.2063-2072. Montevideo, Uruguay: SEMUR.

Tauber, L. (2014). Argumentos utilizados por profesores de Matemática para explicar conceptos asociados a la idea de aleatoriedad. En Instituto Tecnológico de Costa Rica (Eds.) *Actas del IV Encuentro sobre Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y el Análisis de Datos*. Costa Rica.

Tauber, L. (2017). Alfabetización y Cultura Estadística de los profesores: ¿Un logro o una necesidad? En C. Cuesta (Ed) *Actas de 3° Jornadas Nacionales de Educación Estadística Marta Bilotti*. Rosario: Sociedad Argentina de Estadística.

Wenger, E. (2001) *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad*. Barcelona: Paidós.

Zapata-Cardona, L. & González Gómez, D. (2017). Imágenes de los profesores sobre la estadística y su enseñanza. *Educación Matemática*, 29, (1), pp.61-89.

ISBN 978-987-3941-85-6