

V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

# Post-Memorias

Tendencias en investigación  
En Educación Matemática

Panel de apertura,  
Panel de clausura  
Y  
Grupos de trabajo-discusión

MAYO'2024



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Post-Memorias del V SEM-V Agosto'2024

Editor Científico: Jorge E. SAGULA

Compilador: Jorge E. SAGULA

Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

Sagula, Jorge Enrique

Tendencias en investigación en educación matemática / Jorge Enrique Sagula. - 1a ed. - Luján: Universidad Nacional de Luján, 2025.  
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online  
ISBN 978-987-9285-54-1

1. Matemática. I. Título.  
CDD 510.72



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Prólogo

Durante los días 16 y 17 de mayo de 2024, y en su mes histórico, en modalidad virtual sincrónica, y con su ritmo académico característico, tanto por su rigor como por el respeto a los profesores e investigadores de todos los niveles, tuvo lugar desde la Universidad Nacional de Luján, tanto desde el Centro Regional Chivilcoy como desde Sede Central, el V SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo XX, en mayo'1999 (en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján), y que, a pesar de algunos años de discontinuidad, celebró sus Bodas de Plata, sus 25 años, pues el modelo fue creado como natural enlace entre la Educación Matemática y la comunidad, reflejada en sus niveles educativos.

La disruptiva pandemia CoViD-19, en el posicionamiento de la virtualidad como medio de reducción del aislamiento, se produjo el Renacimiento del SEM, pasando a SEM-V, permitiendo la sociabilización entre docentes e investigadores, pero en la mediación de la Modernidad Líquida, pero potenciando los sentidos del habla, de la audición y en muchos casos, del tacto en la escritura, y así poder trabajar en Aprendizaje por Refuerzo, de modo de propender a la mejora continua sin singularidades de la Educación en general.

Particularmente, el SEM siempre fue pionero de nuevos escenarios y conceptos tanto en sus contenidos como en las respectivas estructuras, por caso en Paneles Interactivos, produciendo intercambios “en vivo” entre los disertantes invitados, o bien en el Programa PADEM, en el cual se impartían Cursos de Post-Grado, ya en el año 2003, pre-acreditados en la Universidad Nacional de Luján, y concebidos para ser desarrollados en tres momentos (el segundo en el SEM mismo, y los restantes en forma virtual, a través de Skype), y desde hace tiempo, en la visión de enriquecimiento cognitivo producida en el seno del SEM-V, pero que excepcionalmente se registra en términos de publicación.

Consecuentemente, aquí presento las Post-Memorias del V SEM-V, ya previstas en la presentación de la Propuesta Inicial de la realización del V SEM-V, que comprenden el momento de las disertaciones y de los espacios interactivos de intercambio entre los profesores-investigadores que se desempeñaron como disertantes invitados, razón por la cual forman “el enriquecimiento cognitivo” que jamás se considera en registros escritos para disponer el acceso a quienes trabajan en las temáticas o se forman en tales temas o, simplemente se interesan en tales temas, y sus integraciones.



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Prólogo

Específicamente, esta obra, denominada Post-Memorias del V SEM-V, constituye la propia evolución del conocimiento y el conocimiento cooperativo, tanto del Panel de Apertura como del Panel de Clausura y los cuatro Grupos de Trabajo-Discusión, cada uno de ellos editados científica y literariamente por mí, en carácter de Editor Científico y Compilador, luego de los aportes de cada uno de los disertantes en cada caso, por tanto, la UNLu, recibirá la contribución de Seis (6) textos, en formato de artículo, aportando un nuevo modelo, producido a posteriori, evitando desperdiciar el conocimiento emergente, a la postre, lo más rico, en la concreción de cada encuentro de profesores-investigadores, en cualquiera de sus denominaciones.

Por tal razón, y comprometido con el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje en el campo de la Educación Matemática y la convergencia y mejora cognitiva con disciplinas afines, ratifico el compromiso inicial, y las Bodas de Plata del SEM dan el puntapié inicial para esta primera publicación de este nuevo modelo, y así se podrá sembrar, logrando un mayor acercamiento a la Comunidad de la Educación Matemática, cuyo objetivo es la trascendencia, y por ende, la aplicación del conocimiento en todos los niveles educativos, a fin de enriquecer a la disciplina y servir al resto de las disciplinas.

**Jorge E. SAGULA**  
**Director Académico V SEM-V**  
**Chivilcoy, 20 de agosto de 2024.**



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Índice Referencial

### PANELES

PA: Panel de Apertura

PC: Panel de Clausura

### CONFERENCIAS

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-1-MRP: Modelización y Resolución de Problemas

GTD-2-DM: Didáctica Matemática

GTD-3-CEM: Creatividad en Educación Matemática

GTD-4-EE: Educación Estocástica



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

### V Simposio de Educación Matemática-Virtual (V SEM-V) “TENDENCIAS EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

**Universidad Nacional de Luján**  
**Modalidad Virtual**  
**16 y 17 de mayo de 2024**

**Director Académico**  
**Jorge E. SAGULA**

#### **PROGRAMA GENERAL**

Jueves 16 de mayo de 2024  
09:00-09:30 horas

#### **CEREMONIA INAUGURAL**

09:30-11:00 horas

#### **PANEL DE APERTURA** **“TENDENCIAS ACTUALES EN INVESTIGACIÓN** **EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”**

Diferencias y similitudes entre teorías de Educación Matemática  
Dr. Bruno D'AMORE  
NRD-Universidad de Bologna, Italia  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Límites y posibles complementariedades entre teorías  
de la Educación Matemática  
Dr. Rodolfo VERGEL CAUSADO  
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría  
Histórico-Cultural de la Actividad  
Dr. Juan DÍAZ GODINO  
Universidad de Granada, España

**Moderador**  
**Lic. Jorge E. SAGULA**  
**Universidad Nacional de Luján, Argentina**



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

11:00-13:00 horas

### **GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-1 MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**

#### CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.1

El diseño de tareas de modelización Inteligencia Artificial

Dr. Marcel POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

#### CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.2

Modelización Matemática y Aplicaciones

Dr. Juan E. NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste y UTN-FRRes, Argentina

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.1

Transformación de problemas en tareas de modelización matemática

Mg. Jaime CAMAÑO

Universidad del Sucre, Colombia

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.2

¿Estamos todos de acuerdo en que las matemáticas son formales?

Dr. Rubén Gustavo PACCOSI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

14:00-14:45 horas

#### CONFERENCIA CA.1

Didáctica de la Matemática como disciplina científica:

teorías y relaciones entre teorías

Dr. Bruno D'AMORE

NRD-Universidad de Bologna, Italia

Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

14:45-15:30 horas

#### CONFERENCIA CA.2

Didáctica de la Geometría en la Enseñanza:

Conexión entre Lenguajes, Comunicación y Argumentación

Dr. Marcos BARRA

Universidad Alberto Hurtado, Chile



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

15:30-17:30 horas

### **GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-2 DIDÁCTICA MATEMÁTICA**

#### CONFERENCIA CENTRAL GTD-2.1

Momentos del trabajo del profesor de matemática,  
en función del rol asumido

Dra. Mabel RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.1

La comprensión de objetos geométricos con nuevos recursos

Dra. Estefanía CALVO

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.2

Consideraciones/aportes para el diseño de una propuesta didáctica para un curso  
inicial de Álgebra para la formación docente

Dr. Gustavo CARNELLI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.3

Algunas reflexiones sobre un curso de educación matemática  
destinado a docentes del nivel superior

Dr. Fabián ESPINOZA

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

17:30-18:15 horas

#### CONFERENCIA CA.3

¿Es posible transformar el aula en un escenario  
en base a los estilos de aprendizaje de los alumnos?

Desafío que nos interpela en nuestro rol docente

Dra. Adriana María del Huerto ENGLER

Universidad Nacional del Litoral, Argentina

18:15-19:00 horas

#### CONFERENCIA CA.4

CognoTecnoEmoción: mediaciones tecnológicas de la emocionalidad  
en el desarrollo del pensamiento matemático

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Universidade de Ouro Preto, Brasil



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

Viernes 17 de mayo de 2024

09:00-09:45 horas  
CONFERENCIA CA.5

Experiencias sobre Análisis de Recursos Educativos  
en la Formación del Profesorado  
Dr. Roberto VIDAL CORTES  
Universidad Alberto Hurtado, Chile

09:45-10:30 horas  
CONFERENCIA CA.6

Transformación del Trayecto Profesional Docente en Educación Matemática  
desde la perspectiva de la Investigación Metodológica  
Dr. Rafael LORENZO MARTÍN  
Universidad de Holguín, Cuba

10:30-11:15 horas  
CONFERENCIA CA.7

Optimización Didáctica en Matemática:  
Directrices ante los errores de los alumnos  
Dr. Miguel DELGADO PINEDA  
UNED, España

11:15-13:15 horas

### **GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-3 CREATIVIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.1

Conhecimento Pedagógico do professor de Matemática  
e sua influência no desenvolvimento do Pensamento Matemática  
Dra. Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD  
Universidade Luterana de Brasil, Brasil

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.2

Ensino de Matemática por meio de jogos e atividades lúdicas:  
experiências de professores brasileiros da escola primária  
Mg. Helcio SOARES PADILHA Jr.  
Universidade Luterana de Brasil, Brasil

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.1

O papel dos jogos online na formação do pensamento matemático  
Dr. Agostinho Iaquan RYOKITI HOMA  
Universidade Luterana de Brasil, Brasil



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

### DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.2

Ebooks animados para o ensino de matemática  
nos anos iniciais do Ensino Fundamental  
Dra. Edvonete SOUZA de ALENCAR  
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

14:30-16:30 horas

### GRUPO DE TRABAJO-DISCUSSION GTD-4 EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

#### CONFERENCIA CENTRAL GTD-4.1

La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG  
Lic. Jorge E. SAGULA  
DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina  
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina  
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.1

Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico,  
desde la visión de la Fenomenología  
Dr. Héctor HEVIA  
Universidad Alberto Hurtado, Chile

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.2

El desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio  
en el contexto de la Estadística Cívica  
Dr. Cassio GIORDANO  
Universidade Federal do Rio Grande, Brasil

#### DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.3

Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica y Bayesiana  
en cursos de grado de Estadística  
Dr. Enrique ÁLVAREZ  
Universidad Nacional de Luján, Argentina

16:30-17:45 horas

#### CONFERENCIA CA.8

(Des)haciendo Matemática:

Aportes para el estudio del conocimiento matemático para enseñar  
Dr. Gabriel SOTO  
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Pograma General

18:00-19:30 horas

### PANEL DE CLAUSURA

#### “INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿UNIDIRECCIONALIDAD O BIDIRECCIONALIDAD?”

Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: Explorando fronteras

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Programa de Posgrado en Educación Matemática

Universidade de Ouro Preto, Brasil

La Nueva Educación, los retos para el maestro actual

en la era de la Inteligencia Artificial

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ

Universidad Nacional de Trujillo, Perú

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

La Inteligencia Artificial y la Investigación en Matemática

Dr. Juan NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA

Dr. Marcel POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Inteligencia Artificial y Educación Matemática:

¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?

Lic. Jorge E. SAGULA

DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina

**Moderadora**

**Lic. Emma L. FERRERO**

**Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas**

**Universidad Nacional de Luján, Argentina**



V SIMPOSIO  
DE EDUCACIÓN  
MATEMÁTICA  
VIRTUAL

## Paneles y Grupos de Trabajo-Discusión - Índice

### Página 1

**PA:** Bruno D'AMORE, Rodolfo VERGEL CAUSADO, Juan D. GODINO, Jorge E. SAGULA  
Post-Memorias V SEM-V del Panel de Apertura  
"Tendencias actuales en investigación en Educación Matemática"

### Página 14

**PC:** Jorge E. SAGULA, Fredy E. GONZÁLEZ, Juan E. NÁPOLES VALDES, Marcel D. POCHULU, Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ  
Post-Memorias V SEM-V del Panel de Clausura  
"Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad o bidireccionalidad?"

### Página 26

**GTD-1-Texto Unificado:** Marcel D. POCHULU, Juan E. NÁPOLES VALDES  
Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
"Modelización y Resolución de Problemas"

### Página 36

**GTD-2-Texto Unificado:** Mabel RODRÍGUEZ, Estefanía CALVO, Gustavo CARNELLI, Fabián ESPINOZA  
Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
"Didáctica Matemática"

### Página 45

**GTD-3-Texto Unificado:** Helcio SOARES PADILHA Junior, Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD  
Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
"Creatividad en Educación Matemática"

### Página 51

**GTD-4-Texto Unificado:** Jorge E. SAGULA, Héctor HEVIA, Cassio GIORDANO, Enrique ÁLVAREZ  
Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
"Educación Estocástica"

## **Post-Memorias V SEM-V del Panel de Apertura**

### **“Tendencias actuales en investigación en Educación Matemática”**

**Bruno D'AMORE<sup>(1)</sup>, Rodolfo VERGEL CAUSADO<sup>(1)</sup>, Juan D. GODINO<sup>(2)</sup>.**

**Jorge E. SAGULA<sup>(3)</sup>**

**<sup>(1)</sup>Doctorado en Educación Matemática,**

**Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia**

**<sup>(2)</sup>Universidad de Granada, España**

**<sup>(3)</sup>División Matemática y División Estadística, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

#### **Resumen**

Este texto, en carácter de artículo expandido, comprende tres visiones, propias de investigadores en el campo de la Educación Matemática, no sólo en carácter previo a las disertaciones específicas de los tres primeros autores, sino también a las reflexiones integradas como expansión de sus respectivas exposiciones, por el Presentador y Moderador del Panel en cuestión, Jorge E. SAGULA, Director Académico del V SEM-V (V Simposio de Educación Matemática-Virtual).

El primer aporte responde centralmente a la disertación del Dr. Bruno D'AMORE, titulada “Diferencias y similitudes entre teorías de Educación Matemática”, sobre el análisis global de veintidos teorías relevantes de la Educación Matemática tanto en el curso del siglo XX como en el siglo XXI, a partir de un trabajo conjunto con otros destacados autores, realizado en el año 2023.

El segundo aporte, y en línea con la primera disertación, responde a la disertación del Dr. Rodolfo VERGEL CAUSADO, titulada “Límites y posibles complementariedades entre teorías de la Educación Matemática”, enriquecida con su contribución a partir de la reflexión generada al finalizar las tres exposiciones.

El tercer aporte, de carácter ampliatorio, responde a la disertación del Dr. Juan D. GODINO, titulada “Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad”, incorporando la visión específica de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad.

Las tres visiones dejan, inicialmente, puntos específicos para mostrar los avances actuales de la investigación en Educación Matemática, y las reflexiones han permitido abrir nuevos puntos de interés para el tratamiento futuro, como por caso la ética y los sesgos, parte de los cuales se muestran en la disertación de Bruno D'AMORE.

Por más que haya visiones sesgadas, el estudio continuo, permitirá expandir a la Educación Matemática, más en tiempos acuciantes, donde ciertos investigadores en otros campos azuzan con el devenir de la Inteligencia Artificial Generativa y sus secuelas futuras.

**Palabras clave:** Didáctica general y Didácticas disciplinares. Teorías en Educación Matemática. Teorías de Educación Matemática. Diálogo entre Teorías de Educación Matemática. Sistemas de Actividad. Teoría Histórico Cultural de la Actividad.

# Diferencias y similitudes entre Teorías de Educación Matemática

## Didáctica General y Didácticas Disciplinarias

Para empezar, trataré los términos de un amplio debate entre las solicitudes específicas de la Didáctica General y las de las Didácticas Disciplinarias, proponiendo una reflexión sobre algunos puntos.

La problemática de la relación entre la Didáctica General y las Didácticas Disciplinarias tiene ya muchos estudios en su haber; sin embargo, aún queda mucho por hacer, en mi opinión, para intentar superar una desconfianza recíproca, debida principalmente al siguiente hecho: los estudiosos de Didáctica General usualmente provienen de estudios de carácter pedagógico; los estudiosos de cada Didáctica Disciplinar suelen provenir de estudios de carácter disciplinar.

Los expertos de Didáctica General tienen dificultad para entender la increíble articulación de las disciplinas y a veces confunden en una única visión la disciplina, la Didáctica de dicha disciplina, la Epistemología de la disciplina y la Epistemología de la Didáctica de la disciplina.

A los expertos de Didáctica Disciplinar, en cambio, les cuesta entender el sentido mismo de los estudios de los primeros, al estar acostumbrados a producir pruebas lógicas, demostraciones irrefutables, razonamientos basados en axiomas, reglas, deducciones o pruebas empíricas.

Los primeros consideran reunidas en un único grupo a todas las numerosas y variadas multiplicidades de estudio de los segundos, mientras los segundos no consiguen apreciar la labor analítica y sintética de los primeros, pues abordan temas demasiado alejados de la práctica específica de los estudiosos de las Didácticas Disciplinarias.

Sin embargo, la propia historia de las disciplinas empuja ahora a trabajar juntos, a ex didactas disciplinarias y ex pedagogos, cada uno en su especificidad: en Didáctica de la disciplina o en Didáctica General.

Por esto, se cree que una reflexión de este calibre, destinada a intentar comprender las razones profundas de esta oposición, en un intento de ofrecer una salida a la misma, puede ser una contribución al trabajo común.

De hecho, entre los disciplinarios, se mira con recelo a quienes se ocupan de la Didáctica de la Disciplina ... ¿Deben seguir considerándose disciplinarios o han dejado de serlo? ¿No se han convertido, acaso, en pedagogos? Uno de los objetivos de esta breve reflexión yace, precisamente, en mostrar que la Didáctica de una disciplina debe ser realizada por disciplinarios, pero expertos de Didáctica; la Didáctica de una disciplina no es ciertamente una de las canónicas de la disciplina, pero entra necesariamente dentro de las posibles tareas de investigación de los disciplinarios; se ve a la Didáctica de la Matemática como un ejemplo de Matemática Aplicada, aplicada a los problemas de la educación.

Así, entre los pedagogos, quienes se ocupan de Didáctica parecen ser estudiosos desviados, demasiado cercanos a la práctica heurística, tan poco noble; quienes proceden de la Pedagogía teórica están muy cerca de la Filosofía y, desde luego, no siempre les gusta oír hablar de escuela, clase, currículo, exámenes, porcentajes, ...

En mi opinión, conviene aliarse: la guerra por sostener la Didáctica como una de las piedras angulares de la cultura sólo está en sus primeras escaramuzas y será muy larga; vale la pena buscar entonces, en caso que las haya, posibles vías de entendimiento. Tomaré como área específica de análisis, entre las Didácticas disciplinarias, la Didáctica de la Matemática, pues responde a lo que más interesa en este espacio.

En aras de la honestidad, cabe recordar que para algunos autores no existen la Didáctica General y tampoco, la Didáctica de la Matemática como disciplinas en sí mismas, y esto es por su carácter demasiado generalista.

En Cornu y Vergnioux (1992, p. 15) se reporta la opinión de Raymond Barra, director del IREM de Poitiers:

«Yo dudo de la existencia de una “didáctica general”, ni veo lo que puede ser la didáctica de la matemática, mientras que veo muy bien lo que puede ser la didáctica de los números decimales, la de la geometría, ...»;

y no se trata de una opinión aislada.

Evitaré comentar posturas de este tipo para evitar una pérdida en mil vericuetos; se cree que este tipo de tendencia está ligada a una visión puramente utilitarista de la didáctica, postura muy difundida. Sin embargo, la postura descripta volverá a asomar en los párrafos siguientes. En ellos, contrapondré la Didáctica General a la Didáctica Disciplinar debido a creer que lo que se argumenta para la Didáctica de la Matemática también puede aplicarse, en gran medida, a otras Didácticas específicas o disciplinarias. Naturalmente, cuando se necesiten ejemplos, se puede ejemplificar en Didáctica de la Matemática.<sup>1</sup>

## Problema de existencia o de legitimidad

El lenguaje escolar está alejado de la experiencia cotidiana, privilegia los términos y conceptos abstractos, e implica intercambios entre profesor y estudiante que se asemejan a la reproducción de fórmulas preestablecidas. Los significados se definen a menudo de manera técnica y el metalenguaje –el discurso sobre el discurso– ocupa un lugar destacado.

---

<sup>1</sup> En la redacción de este capítulo hemos recurrido principalmente a Stanic (1988), McDermott (1990), Godino (1991) y D'Amore (1994).

Howard Gardner (1993), *The Unschooled Mind: How Children Think And How Schools*. Basic Books.

La contraposición entre la Didáctica General y la Didáctica Disciplinar podría expresarse así:

No existe una Didáctica General. Existen sólo las Didácticas *de alguna cosa*. De lo contrario, se corre el riesgo de hablar en el vacío, de nada.

[Un posible subproducto muy difundido es un sentido limitador en el cual se considera la Didáctica disciplinar: la Didáctica coincide con la ingeniería didáctica o con la didáctica “práctica” (colección de trucos empíricos) de alguna cosa específica].

Vs.

No existe una Didáctica específica de una disciplina; existe en su lugar una Didáctica General: las Didácticas específicas de una disciplina son segmentos de la Didáctica General. Los problemas de la Didáctica son siempre los mismos: dependiendo de la disciplina específica habrá peculiaridades, pero de segundo orden, casi irrelevantes.

¿Es posible una conciliación entre estas dos posturas antitéticas?

En primer lugar, parece existir problemas con el lenguaje, al menos con la terminología:

la “Didáctica” puede entenderse como “Teoría de la Didáctica” derivada de la pragmática observada y de los resultados obtenidos;

la “Didáctica” también puede entenderse en un sentido filosófico y teórico;

la “Didáctica” puede entenderse entonces como algo mucho más específico.

De hecho, sin embargo, es obvio que hay que aceptar la evidencia: hay problemáticas, por así decirlo, “aguas arriba”, de la Didáctica disciplinar, que no dependen de las disciplinas individuales (por ejemplo: cuestiones relativas con las relaciones, la afectividad, la identidad, ...; más técnicamente: si la práctica didáctica se desarrolla por grupos, por ejemplo, se necesita el conocimiento de la conducción del trabajo en grupo; si es didáctica por problemas, el conocimiento de técnicas de estimulación; si es por discusión, el conocimiento de técnicas para la conducción de discusiones; ...).

Teorizando (o generalizando) estas problemáticas, se crea una *teoría (general) de la Didáctica* que ya no depende explícita o directamente de las disciplinas. Ciertamente la teoría resultante no es la Didáctica General tal y como los estudiosos de este campo la ven y quieren que sea, pero ciertamente es una generalización de la Didáctica disciplinar y, así, los estudios en este campo conciernen a todas las didácticas, generales o no.

Es evidente que existen peculiaridades de la Didáctica de la disciplina X que son intrínsecas, precisamente ligadas a la Didáctica de X (son de diversa índole: metodológicas, o motivacionales, o de reconocimiento social, ...).<sup>2</sup>

Es muy probable que, en la base de estas peculiaridades, no haya motivaciones objetivas sino motivaciones dependientes de la imagen que la materia X da de sí misma [a veces esta afirmación debería interpretarse así: las motivaciones/deseos dependen de la imagen de la idea de X que tienen los profesores de X y que de alguna forma intentan, más o menos conscientemente, transferir a los estudiantes: es este “modelo” el que el profesor (repitiendo: a menudo inconscientemente) propone a la clase].

Pues bien, se cree que, a pesar de la especificidad, se trata de un problema de carácter general, que afecta a la Didáctica General, al menos, en la misma medida que a la Didáctica específica.

Entonces, se entiende la Didáctica General como un amplio campo de estudio e investigación, *alimentado* por las Didácticas específicas: los problemas de estas últimas, siempre que sean generalizables, constituyen objeto de estudio e investigación dentro de la Didáctica General, aunque no se identifiquen con esta. Cualquier resultado general obtenido en la teoría de la Didáctica son utilizables en cada ámbito específico.

La relación entre Didáctica General y Didáctica Disciplinar es y debe ser, por tanto, fructífera, y a su vez, objeto de estudio e investigación.

## El Problema de la Epistemología

No sólo la búsqueda de cómo se forman las teorías, sino también la búsqueda de cómo se organizan los conceptos se vuelve tan interesante. En este punto, en efecto, el término *epistemología* me parece poco adecuado, porque deriva de *episteme*, es decir, *conocimiento cierto*; quizá sería más apropiado hablar de *teoría del conocimiento*. Pero ahora, como en tantos otros casos, podemos aceptar un término históricamente establecido.

<sup>2</sup> La motivación/volición para estudiar puede ser diferente según la materia; el reconocimiento social es diferente para los que destacan (o flaquean) según la materia; ... ¿Y qué hay de la metodología? Es obvio y demasiado evidente que por “disciplina” hay que entender no sólo sus contenidos específicos, sino el conjunto: contenidos, método, historia, epistemología.

Francesco Speranza (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Pitagora.

Otra contraposición podría describirse así:

Sólo la Didáctica disciplinar posee un estatuto epistemológico propio y significativo. La Didáctica General carece de epistemología: “toma prestados” retazos de epistemologías de cada una de las disciplinas específicas.

Vs.

Sólo la Didáctica General tiene un estatuto epistemológico propio y significativo. Los de las Didácticas disciplinares coinciden con la epistemología de la disciplina que constituye su objeto.

La base de la controversia subyace a una ambigüedad del término “*Epistemología*”. En mi opinión, entran en juego, al menos, tres significados diferentes:

1. Existen Epistemologías de las propias disciplinas, creadas por la historia del progreso y el trabajo realizado por los seres humanos en las diferentes comunidades de práctica que han creado dichas disciplinas; frecuentemente, la Epistemología de una disciplina es el resultado de un estrecho debate que ha tenido lugar a lo largo de siglos; basta pensar, por ejemplo, en el concepto de “verdad” en Matemática y cómo ha cambiado desde Platón hasta Hilbert. Sin embargo, coexisten diferentes ideas que han dado lugar a diferentes epistemologías: piénsese en el debate, nuevamente, y en la Matemática, en torno a la posición de Enriques [véase: (Enriques, 1912; Enriques y De Santillana, 1932, 1936; Speranza, 1992, 1995, 1997; Pompeo Faracovi, 1982)]. Aquí, “Epistemología de” significa “Filosofía de”; pero incluso en esta acepción (que, no obstante, amplía los significados) su sentido no es unívoco. En la hipótesis de ampliar los límites, considerando las diferentes posiciones sobre la Filosofía de la Ciencia de Lakatos y Musgrave (1960), Kuhn (1962), Bunge (1985a, b), sólo para tener al menos cuatro posibles significados con diferentes posturas y matices. Ahora bien, es cierto que las diferencias son notables, pero son “internas” a una concepción general que, en conjunto, es bastante inequívoca.

2. Existen Epistemologías de las Didácticas Disciplinares que son *otra cosa*; en este contexto, quizás, el término que se acerca más es el piagetiano, es decir, relativo al estudio de cómo evolucionan y cómo se adquieren los conceptos. En el ámbito de la “Didáctica de alguna cosa” no se aplica directamente la Epistemología de ese algo [que puede ser (al menos en parte) el objeto de estudio], sino una Epistemología distinta porque el sujeto de investigación ya no es la disciplina ni la investigación ni el investigador, sino que son: el ser humano aprendiz o el profesor (o, mejor, ambos) y los conocimientos propios de esa disciplina. Incluso, uno está dispuesto a admitir que hay puntos epistemológicos con interpretaciones claramente distintas, a primera vista, antitéticas.

Por caso, mientras que la verdad de un enunciado es completamente irrelevante en una teoría de los enunciados, reduciéndose a un hecho puramente combinatorio, no ocurre lo mismo en Didáctica, dependiendo de los niveles de edad, aculturación y profundidad crítica alcanzados. Así, los enunciados que a toda la clase parecen verdaderos, deben ser considerados como tales luego de considerar la posibilidad de cuestionar su validez, contrariamente al carácter objetivo de la verdad. La didáctica disciplinar debe ofrecer puntos de apoyo para crear situaciones en las que, a mayor profundidad crítica, pueda revisarse el concepto. En resumen, un buen acuerdo alcanzado en el seno de la comunidad puede ser aceptado desde un punto de vista epistemológico dentro de la Didáctica Disciplinar, pero puede no ser suficiente dentro de la Epistemología de la disciplina tratada.

3. Existen Epistemologías de la Didáctica General que constituyen una tercera visión y que dependen de las opciones puestas en la base de la constitución de dicha Didáctica General. Si la base es heurística (recopilación y generalización de evidencias didácticas concretas), la Epistemología apriorística resultante es una cosa; si la base es, por así decirlo, “filosófica” (teórica), la Epistemología resultante es otra. Y siguen existiendo Epistemologías diferentes. Se señalan sólo dos, antitéticas (pero la lista podría continuar): se está pensando en las posiciones de Romberg (1988) y Shulman (1986). Romberg recurre a la metáfora sobre la construcción de una teoría recuerda a una receta para preparar alimentos; se trata de juntar ingredientes dosificados y combinados según determinadas características que se analizan minuciosamente. Una receta, probada y probada, acabará dando un resultado único y apreciable, fruto de la madurez, de la experiencia.

Mientras que muchos investigadores denuncian como negativo el hecho de que coexistan escuelas de pensamiento competitivas, al contrario, Shulman considera que esto es positivo en los casos de las humanidades y las ciencias sociales y, por tanto, también en los casos de las didácticas disciplinares: se trataría de un estado maduro y natural, pues favorece el desarrollo de diversas estrategias de investigación y el enfoque de diferentes puntos de vista sobre diferentes problemas. Con mayor razón, en esta opinión, esto parece aplicarse a una Epistemología de la Didáctica General.

[En D’Amore (2001a, b, 2003b) se pueden encontrar intentos de conciliar todos los puntos de vista, pero sólo en el ámbito de la Didáctica de la Matemática].

Así pues, una vez puestas de relieve estas premisas terminológicas, el desacuerdo se desvanece. Existen diferentes estatutos epistemológicos significativos, que no se pueden atribuir unos a otros, todos estos definitivamente importantes, con diferentes significados del adjetivo “*epistemológico*”: el *investigador de la disciplina X* hace su trabajo: investiga en X (frecuentemente, sin saber que se mueve dentro de una opción epistemológica relativa a una visión de X); el *investigador de la Didáctica de X* realiza un trabajo *diferente*: investiga los procesos de (enseñanza y) aprendizaje en los casos en que la comunicación con fines didácticos trata elementos de X; es imposible que ignore el problema epistemológico que plantea la Didáctica de X y no puede dejar de ser consciente también del problema epistemológico de X, que podría inspirarle también en sus elecciones como investigador; el *investigador en Didáctica General* hace *otro* trabajo; no puede ignorar en absoluto los problemas epistemológicos planteados por la Didáctica General porque éstos interactúan con su propia investigación. En mi opinión, ni siquiera debería ignorar las epistemologías de las Didácticas disciplinares para alimentar su investigación teórica con ejemplos específicos; debería incluso tener al menos una idea lo más correcta posible de las Epistemologías de las disciplinas, para estar seguro de captar, al menos, algunas tensiones filosóficas actuales y significativas. Se trata, pues, de tres concepciones diferentes del mismo término “Epistemología”, cada una de ellas necesaria, existente y significativa.

## Problema de formación

El sentido común es, entre las cosas del mundo, la más equitativamente distribuida, puesto que todo el mundo cree estar tan bien dotado de él, incluso aquellos que son más difíciles de complacer con respecto a cualquier otro bien no tienden a querer más de lo que tienen.  
René Descartes (1637), *Discours de la méthode*. Joannes Maire.

Una nueva contraposición podría ser la siguiente:

La didáctica general es una reserva de actitudes psicopedagógicas (banales) perfectamente sustituible por el sentido común, el entusiasmo, una sólida formación disciplinar, un poco de sensibilidad, una fuerte motivación para enseñar ...

Vs.

La Didáctica disciplinar coincide con la disciplina que tiene como objeto; por ejemplo, la Didáctica de la Química coincide con la Química. Por tanto, la preparación del profesor sólo está vinculada a su formación disciplinar. Si, por el contrario, se concibe el papel del profesor como “educador”, a cualquier nivel, entonces, dando por sentada la preparación disciplinar, sólo se necesita formación en Ciencias de la Educación.

Se podría parafrasear y reducir los dos argumentos anteriores respectivamente a los siguientes, que son *muy comunes*: para enseñar bien, es necesario y suficiente tener un conocimiento profundo de la materia que se enseña; la formación del profesorado está relacionada principalmente con los estudios de carácter profesional, es decir, la preparación en el campo de la educación.

Esto muestra, sin sorpresa, que entre las dos posiciones anteriores podría incluso disolver el “Vs.”, pues podría no haber oposición en absoluto, sino más bien: coincidencia; bastaría con adoptar el modelo de *dos* cursos de estudio en serie: por una parte, sólo estudios específicos, por la otra, sólo estudios psicopedagógicos.

Las frases lapidarias de Giovanni Gentile, ministro italiano de Educación (1922–1924), en este contexto y a este respecto (especialmente respecto a las Ciencias, en general y a la Matemática, en particular), son terribles y precisas: la «intrusión» de las Ciencias en el mundo escolástico ha «dado frutos muy perjudiciales»; la Matemática está «muerta, infructuosa, árida como una piedra». También, es suya la afirmación de que la Didáctica de la Matemática coincide con la Matemática, siendo el profesor de Matemática un mero repetidor de teoremas.

Esta posición debería parecer capaz de conciliar posiciones tan diversas, ... ya que es, en mi opinión, la enemiga de todas. Trataré de mediar del siguiente modo: la preparación específica es absolutamente necesaria, pero no suficiente en absoluto. El sentido común sirve de poco; basta con reflexionar sobre el hecho de que hay profesores preparados en forma óptima en el plano disciplinar y de sentido común, que tienen entre ellos comportamientos opuestos: cada uno de ellos motiva sus opciones didácticas precisamente en función del *sentido común* que posee (nadie se siente carente de él o dotado en menor grado que sus compañeros: esto es lo que escribió Descartes al respecto del sentido común).

Lo mismo se aplica a las características no cuantificables como: entusiasmo, motivación, sentimiento, voluntad de comprender los problemas de los jóvenes, ...

Lo mismo ocurre con el uso de la tecnología moderna: no hay relación entre el uso de una PC para proyectar PowerPoint y la metodología didáctica utilizada: no se descarta una clase frontal que huelga a moho rancio, pero realizada mediante diapositivas en PowerPoint en lugar de la tradicional pizarra. Aún, existe una gran confusión sobre este punto.

Una sabia forma de conciliación implica, por tanto, una sólida preparación cultural y una preparación igualmente sólida en el campo de la educación. Ante la existencia de una Didáctica General, a ella se debe recurrir para la preparación profesional del docente. Ante la existencia de una Didáctica Disciplinar que no sea la disciplina misma, esta debe ser una parte profesionalizante del docente.<sup>3</sup>

Aquí, hay que subrayar la enorme importancia de la preparación profunda de un profesor en Didáctica disciplinar; la evaluación de las respuestas del estudiante a las peticiones del profesor está estrictamente condicionada por la competencia que el profesor tenga en este campo: en mil ocasiones de encuentros con profesores en los que se ejemplifica, por caso, la acción del “contrato didáctico” (típico ejemplo de resultado de investigación en Didáctica de la Matemática) en las respuestas de los estudiantes, se oye a muchos profesores reconocer que durante la explicación, por primera vez, habían comprendido el sentido de ciertas respuestas que los estudiantes les daban, respuestas que, debido a la ignorancia de los profesores en Didáctica Disciplinar, habían sido interpretadas de forma simplista como erróneas y que, en cambio, revelaban vínculos mucho más interesantes entre lo que el profesor creía haber explicado y los modelos mentales que el estudiante se había hecho sobre los conceptos matemáticos que se le proponían.

Aquí, se podría abrir un lugar especial de discusión sobre lo que concierne a la preparación profesional del docente; en Fandiño Pinilla (2003), se trata ampliamente el tema, y se continúa con este estudio en Fandiño Pinilla y D’Amore (2024).

## Varias teorías de la Didáctica de la Matemática

Exactamente como sucede en los distintos campos específicos de la Matemática, durante varias décadas se han sucedido evidentemente numerosos estudios teóricos, sobre todo basados en diversos resultados de investigaciones empíricas y/o en campos de estudio y análisis específicos. Imposible enumerarlos y comentarlos todos. Aquí, se presenta a una lista (no cronológica, excepto la N° 1) sólo para dar una idea de la multiplicidad de campos de estudio. Además del tema y/o nombre de la teoría, se incluye el nombre del investigador, el exponente más significativo del estudio específico. Se ha convertido casi en una costumbre (no absoluta) dar el nombre de “teoría” a estos campos de investigación o modos de interpretar los resultados (frecuentemente, empíricos) obtenidos, como hizo Guy Brousseau al comenzar su aventura científica.

1. Teoría de las situaciones (Guy Brousseau (1933 – 2024)).
2. Teoría antropológica de la didáctica (Yves Chevallard).
3. Constructivismo (Ernst von Glasersfeld (1917 – 2010)).
4. Fenomenología didáctica (Hans Freudenthal (1905 – 1990)).
5. Dialéctica instrumento – objeto (Régine Douady (1935 – 2006)).
6. Modelo Van Hiele sobre enseñanza – aprendizaje de la geometría (Dina van Hiele Geldof (1912 – 1958) y Pierre van Hiele (1909 – 2010) (modelo 1957)).
7. APOS [Acciones, Procesos, Objetos (mentales), Esquemas (cognitivos)] (Edward Dubinsky (1935 – 2022)).
8. Interaccionismo didáctico (Heinrick Bauersfeld (1926 – 2022)).
9. La naturaleza del aprendizaje matemático (Tommy Dreyfus).
10. Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (Richard Skemp (1919 – 1995)).
11. Teoría de los conceptos figurales (Efraim Fischbein (1920 – 1998)).
12. Tres mundos de la matemática: conceptual, operacional, axiomático (David Tall).
13. Teoría de los campos conceptuales (Gérard Vergnaud (1933 – 2021)).
14. Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos (Paolo Boero).
15. Enfoque instrumental de la educación matemática (Pierre Rabardel (1945 – 2021)).
16. Commognition (comunicación – cognición) (Anna Sfard).
17. Enfoque socio–epistemológico – Matemática Educativa (Ricardo Cantoral (1958 – 2021)).
18. Teoría de los registros semióticos (dimensión semio-cognitiva) (Raymond Duval).
19. Enfoque ontosemiótico EOS (Juan Godino).
20. Haz semiótico (Ferdinando Arzarello).
21. Mediación semiótica (Mariolina Bartolini Bussi y María Alessandra Mariotti).
22. Teoría de la objetivación (Luis Radford).

En el NRD de Bolonia, se realizó recientemente un análisis detallado, pero extremadamente conciso, de cada una de estas teorías (Asenova y otros, 2023).

---

<sup>3</sup> Y por eso se aprueba, al menos en un plano ideal, la elección italiana de escuelas de especialización (bienales, de postgrado) para la formación de profesores de la escuela secundaria (cuya fundación legislativa data de septiembre de 1996) y la elección de carreras especializadas para la formación de profesores de enseñanza preescolar y primaria (ídem). Que sea una universidad o un centro de investigación, el que prepare a los futuros profesores en didáctica, entendida a su vez como disciplina científica sobre la que se investiga, es muy significativo. Que, en el caso de las escuelas de secundaria, esto tenga lugar después de la graduación, es decir, dando por sentada una sólida preparación en la disciplina y confiando, por tanto, a la escuela de especialización la única tarea de la preparación profesional en didáctica, es también un hecho muy significativo.

Naturalmente, ya existen muchos estudios teóricos y también investigaciones empíricas destinadas a resaltar las similitudes y diferencias entre estas teorías, por ejemplo, conforme a los fines para los cuales nacieron. Algunos análisis pretenden captar las diferencias entre estas teorías, otros quieren compararlas en forma positiva y constructiva, basándose en los resultados más significativos obtenidos.

Dos estudios analíticos generales considerados particularmente significativos desde este punto de vista son los de Bikner–Ahsbahs y otros (2008) y de Bikner–Ahsbahs, Dreyfus, Kidron y otros (2010).

## Referencias Bibliográficas

- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2023), *Teorie rilevanti in didattica della matematica*, Bologna: Bonomo. [En idioma español: 2024, Bogotá: Magisterio].
- Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- Brun, J., & Conne F. (1990). Analyses didactiques de protocoles d'observation du déroulement de situations. *Éducation et recherche*, 3, 261–286.
- Bunge, M. (1985a). *Epistemología*. Barcelona: Ariel.
- Bunge, M. (1985b). *Pseudociencia e ideología*. Madrid: Alianza.
- Cornu, L., & Vergnioux, A. (1992). *La didactique en questions*. Paris: Hachette.
- D'Amore, B. (1994). “Didattica” e “Didattica della...” : convergenza di interessi. Il caso specifico della Didattica della matematica. *La didattica*, 2, 28–34.
- D'Amore, B. (2001a). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2001b). *Scritti di Epistemologia matematica. 1980–2001*. Bologna: Pitagora. [Nueva edición: 2023, Bologna: Bonomo]. [Ed. española: Bogotá: Magisterio].
- D'Amore, B. (2001c). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 15(2), 150–173.
- D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47–51.
- D'Amore, B. (2003b). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica*. Prefacio de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [En idioma español (2005): México D.F., México: Reverté, prefacio a la edición española de Ricardo Cantoral. En idioma portugués (2005): São Paulo, Brasile: Escrituras, prefacio a la edición portuguesa de Ubiratan D'Ambrosio].
- D'Amore, B. (2023a). Some specific historical elements on the evolution of ‘Mathematics Education’ as a research discipline. *Annales Accademia delle Scienze di Bologna*, vol. 1 (2023), DOI: 10.30682/annalesps2301c <https://annalesaccademia.it/sito/category/class-of-physical-sciences/volume-1-2023-ps/> [Versión española: D'Amore, B. (2023). Algunos elementos históricos específicos sobre la evolución de la educación matemática como disciplina de investigación. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. 2024 Mar 19. doi: <https://doi.org/10.18257/raccefyn.2571>]
- D'Amore, B. (2023b). *Cenni di storia della Didattica della Matematica come disciplina scientifica*. Bologna: Bonomo. Prologo di Giorgio Bolondi. [Versión en idioma español: Bogotá: Magisterio. 2024].
- Enriques, F. (1912). *Scienza e razionalismo*. Bologna: Zanichelli.
- Enriques, F., & De Santillana G. (1932). *Storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Enriques, F., & De Santillana G. (1936). *Compendio di storia del pensiero scientifico*. Bologna: Zanichelli.
- Fandiño Pinilla, M.I. (Ed.) (2003). *Riflessioni sulla formazione iniziale degli insegnanti di matematica: una rassegna internazionale*. Bologna: Pitagora.
- Fandiño Pinilla, M.I., & D'Amore, B. (2024). *Por una teoría de las didácticas disciplinares*. Bogotá: Magisterio.
- Godino, J.D. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de la matemática. En: Gutiérrez A. (Ed.) (1991). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- Kuhn, T.S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: The Univ. of Chicago Press.
- Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.) (1960). *Criticism and the Growth of Knowledge*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. [Trad. it.: Milano, Feltrinelli, 1976].
- McDermott, L. (1990). A perspective on teacher preparation in physics and other sciences: The need for special science courses for teachers. *American journal of physics*, 58(8), 734–741.
- Pompeo Faracovi, O. (Ed.) (1982). *Federigo Enriques, approssimazione e verità*. Livorno: Belforte.

- Romberg, T. A. (1988). Necessary Ingredients for a Theory of Mathematics Education. En: H. G. Steiner & A. Vermandel (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> TME Conference, Bielefeld. Pp. 97–112.
- Shulman, L.S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: a contemporary perspective. En: Wittock M.C. (Ed.) (1986). *Handbook of research on teaching*. London: Macmillan.
- Speranza, F. (1992). Il progetto culturale di Federigo Enriques. En: D'Amore B., Pellegrino C. (Eds.) (1992). *Convegno per i sessanta anni di Francesco Speranza*. Actas del Congreso homónimo, Bologna 3 10 1992. Bologna. 1–16.
- Speranza, F. (1995). Dalla storia dell'epistemologia indicazioni per leggere la storia della scienza. En: D'Amore B., & Speranza F. (Eds.) (1995). *Lo sviluppo storico della matematica. Spunti didattici*. Milano: Angeli. 148–158.
- Speranza, F. (1997). *Scritti di Epistemologia della Matematica*. Bologna: Pitagora.
- Stanic, G.M.A. (1988). A response to Professor Steiner's "Theory of Mathematics Education". En: H. G. Steiner & A. Vermandel A (Eds.), *Foundations and Methodology of the discipline Mathematics Education*. Proceedings of the 2<sup>nd</sup> TME Conference, Bielefeld.

## **Límites y posibles complementariedades entre Teorías de la Educación Matemática. Elementos para la reflexión**

### **Introducción**

Sobre la base Vygotskiana, conforme a la cual *a través de los otros llegamos a ser nosotros mismos*, se sugiere que la comprensión de una teoría, necesariamente exige el diálogo con otras aproximaciones teóricas. Desde esta presuposición, pretendo, en forma breve, dar continuidad a una discusión sobre los límites y posibles complementariedades entre teorías en educación matemática. Específicamente, centro la discusión en la descripción de la teorización que se ha propuesto sobre las categorías de *actividad y sujeto* en la teoría de la objetivación (TO) e interrogo sobre las teorizaciones de estas categorías por parte de otras teorías. Así, mi interés no es hacer estratificaciones entre las teorías, sino reflexionar sobre las posibles complementariedades entre ellas y sus límites, así como las repercusiones que esto conlleva en términos de la investigación en educación matemática.

### **El diálogo entre teorías de la educación matemática. Una primera aproximación**

Sostengo que la comprensión de una teoría, necesariamente exige el diálogo con otras aproximaciones teóricas para identificar qué las diferencia, cuáles son sus fundamentos epistemológicos y ontológicos, posibles puntos de contacto, etc. Es a través del diálogo con otras teorías que estas forman una identidad.

Para delimitar mi discusión, pretendo describir diversas caracterizaciones que sobre las categorías de sujeto y actividad se han propuesto. No es un asunto menor el tema de la alienación, como un problema endémico en la educación en general y en la educación matemática en particular. La Figura 1 intenta describir que estas tres categorías (sujeto, actividad, alienación) están permanentemente en relación interdependiente. No es posible predicar sobre una de ellas sin apelar a las otras dos categorías.



**Figura 1.** *Relación interdependiente entre las categorías de sujeto, actividad y alienación.*

En relación con la categoría de actividad, es claro que no existe una única definición o caracterización. En los trabajos desarrollados históricamente en la Unión Soviética, reportados en el famoso libro de Fernando Luis González Rey “*El pensamiento de Vygotsky. Contradicciones, desdoblamientos y desarrollo*” (González, 2010), se puede apreciar que la idea de actividad no estaba unificada. Había diversas caracterizaciones sobre esta categoría, de hecho es posible afirmar que había varias teorías sobre la actividad, no una sola. Por ejemplo, Galperin proponía una idea de actividad como cualquier proceso realizado por un sujeto que, en forma sistemática o episódica, conduce a un resultado determinado; mientras que para Rubinstein la actividad es la condición y la manifestación de toda la vida psíquica del ser humano (González, 2010). La idea de Aktivität (en alemán) y Aktivnost' [активность] (en ruso) refieren a la actividad en el sentido de estar simplemente ocupado con algo (Roth & Radford, 2011).

En mi punto de vista, Leontiev es quien logra avanzar en la teorización sobre la categoría de actividad. Para este autor lo que caracteriza una actividad (Deyatel'nost' en ruso) de otra es su *objeto*. El objeto es el motor de la actividad. En la práctica, en la búsqueda del objeto de la actividad, los individuos dividen el objeto en una secuencia de objetivos a través de los cuales están asociadas unas acciones. “La actividad del individuo constituye la substancia de su conciencia” (Leontiev, 1978, p. 96).

Desde el materialismo dialéctico, actividad no significa meramente hacer, y estar ocupado con, algo. A la base hay una *idea de vida*. No se trata simplemente de actuar y producir “bajo el único aspecto de la reproducción de la existencia física de los individuos” (Marx, 1982, p. 1055). De hecho, frente a la pregunta que el mismo Marx se hizo sobre *¿Qué es la vida?*, inmediatamente responde: Es la *actividad*. Por eso, la acción de los individuos en la actividad (Tätigkeit en alemán) ya incluye un modo de producción social, cultural e histórico a través del cual, en sus acciones con otros, estos individuos se producen a sí mismos como sujetos humanos (Radford, 2021). Y esto coincide plenamente con el sentido ontológico, conforme al cual la naturaleza humana (los sujetos) se constituye social e históricamente. Nos constituimos a través de las relaciones con otros.

Para la Teoría de la Objetivación (TO) la actividad no se asume desde el punto de vista instrumental (por ejemplo, como una coordinación de acciones o, incluso, como una coordinación muy sofisticada de acciones) o como simplemente estar ocupado con algo. Tampoco sería  $n + 1$  actividades conformadas por las  $n$  actividades  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  de las mónadas  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  más la actividad de enseñanza del profesor  $a_p$  (Radford, 2021). Desde esta perspectiva teórica, toda actividad de aula reposa en dos modos: por un lado, tendríamos los *modos de producción del saber* (lo que se toma como verdadero, legítimo, ¿Quién produce las ideas? ¿Cómo?, las formas en que circulan las ideas en el aula); y por otro lado tendríamos los *modos de cooperación social* (la relación al otro que incluye, por ejemplo, la cuestión de la alteridad, la cuestión del poder y los aspectos asociados a la solidaridad, responsabilidad, etc.).

En este sentido la idea de actividad humana tiene como base tres dimensiones: *Ontológica, Epistemológica y Estética* (Figura 2). A través de la actividad humana se llega a ser lo que somos (dimensión ontológica), y también es a través de esta actividad se llega a saber lo que sabemos (dimensión epistemológica). Finalmente, es a través de la actividad humana que se llega a expresarnos como individuos (dimensión estética), lo cual intenta contrarrestar la alienación del individuo con respecto a la actividad, esto es, el extrañar la actividad al no sentir la necesidad de expresarse (Radford, 2016). A lo sumo, las teorías en educación matemática reconocen la dimensión epistemológica de la actividad, pero no reconocen explícitamente las dimensiones ontológica y estética.



**Figura 2.** Las tres dimensiones de la actividad humana.

Claro, para algunas teorías en educación matemática quizás estas dimensiones de la actividad (ontológica y estética) no sean el foco de interés, pues “el asunto de las teorías en educación matemática es una cuestión de énfasis” (D’Amore, 2019). Frente a esto, valdría la pena preguntarnos, si es que se llegará a reconocer: *¿de qué manera, orgánicamente, las teorías en educación matemática reconocen la dimensión ontológica y la dimensión estética?*

## La actividad como labor conjunta

En el marco de la TO, ¿Qué caracteriza la labor conjunta? Continuando mi argumentación sobre la idea de actividad relacionada previamente, la labor conjunta estaría caracterizada por dos subcategorías: *Modos de cooperación social* y *Modos de producción del saber* (Radford, 2023). En los modos de cooperación social o formas de cooperación humana, la relación al otro se basa en la práctica de una ética comunitaria, EC, (responsabilidad, compromiso hacia los demás, cuidado del otro). Mientras que cuando se habla de los modos de producción del saber, se está haciendo referencia a que la práctica de la EC se da en una actividad de enseñanza-aprendizaje en la cual los estudiantes y el profesor trabajan juntos, en forma crítica, en el encuentro con saberes culturales (es lo que Hegel (2001) denominaba la *Obra común*).

Insistiendo, mi tesis es que, de acuerdo a la Figura 1, no es posible predicar sobre la actividad sin apelar a las otras dos categorías (sujeto y alienación), asimismo, no podríamos caracterizar el sujeto sin apelar a las ideas de actividad y alienación. Quizás para varias teorías en educación matemática, no es preocupación teorizar la idea de sujeto, aunque, surge la pregunta: ¿por qué problematizar la idea de sujeto? Considero que Heidegger hace un llamado de atención muy fuerte, al expresar que:

Toda ontología, por rico que sea y bien remachado que esté el sistema de categorías de que disponga, resulta en el fondo ciega y una desviación de su mira más peculiar, si antes no ha aclarado suficientemente el sentido del ser, por no haber concebido el aclararlo como su problema fundamental. (Heidegger, 1986, p. 21)

La TO honra el llamado de atención del filósofo alemán, pues ofrece una conceptualización del sujeto estrechamente vinculada al aprendizaje. De hecho, en la conceptualización del aprendizaje (como toma de conciencia de las formas de acción y pensamiento culturalmente e históricamente constituidas), aun cuando el sujeto está presente de manera fundamental, este sujeto *no es el origen de los procesos cognitivos y epistemológicos que subyacen al aprendizaje* (Radford, 2023), pues el sujeto siempre está afectado por recursos culturales e históricos (signos, sistemas simbólicos, etc.), que influyen sus maneras de conocer y de pensar (Vergel, 2014). El individuo humano concreto como tal es un producto en sí mismo histórico-social. Sólo en la historia el hombre existe. El hombre se realiza, es decir, se humaniza, en la historia (Kosic, 1963).

Por ejemplo, el sujeto de la Teoría de Situaciones Didácticas no es un sujeto concreto, es un sujeto epistémico. Brousseau, al respecto, sostiene:

El sujeto de la situación didáctica es una especie de sujeto teórico [...] cuando se hace didáctica, uno no se ocupa de un sujeto concreto, uno va a tomar en cuenta las características generales de un sujeto: lo que este es susceptible de hacer y comprender. (Brousseau, 2005, p. 23)

¿Qué repercusiones tiene para la investigación en educación matemática, conceptualizar el sujeto como una entidad psicológica o como una entidad histórico-cultural o como sujeto epistémico o teórico? Es más, desde algunas aproximaciones teóricas (Teoría de Situaciones Didácticas, Enfoque Ontosemiótico): ¿cuál es la conceptualización que se propone sobre la categoría Actividad y cómo incide dicha conceptualización en la sistematización y análisis de datos de investigación?

## Consideraciones finales y proyecciones

En el marco de la TO se ha enfatizado en llamar la atención sobre la naturaleza de los problemas de investigación, y las estrategias metodológicas para abordarlos, que consideran explícitamente la idea de actividad; se ha sugerido que la unidad de análisis no puede ser la labor conjunta, sino más bien la actividad. Por supuesto, esta actividad podría eventualmente dar algunos signos de una actividad en tanto que labor conjunta, sin embargo, esto tendría que demostrarse científicamente a partir de la caracterización propuesta previamente. Algunas investigaciones han venido discutiendo cómo, a través de varias sesiones de clase de matemáticas, la actividad comienza a dar los primeros signos de una actividad que se puede tipificar como una labor conjunta (Lasprilla, Radford & León, 2021; Pantano, Vergel & Radford, 2021; Radford & Lasprilla, 2020; Radford, Miranda & Vergel, 2023; Vergel, Radford & Rojas, 2022).

Pero aún más, en la perspectiva de los trabajos que se han ido desarrollando sobre Networking entre teorías, hay algunos esfuerzos que se han realizado en términos de identificar concordancias y complementariedades entre aproximaciones teóricas, hecho que puede repercutir en la profundización de la comprensión de los fenómenos educativos. En Vergel *et al.* (2023), se analizan las concordancias y complementariedades entre TO y EOS, sobre la base de una investigación empírica que aborda la naturaleza y el aprendizaje del álgebra escolar y que constituye un intento de articulación de estos dos marcos teóricos. En esta investigación se ofrecen ejemplos de categorías teóricas que pueden complementar al EOS

y a la TO. También, puede revisarse el reciente libro de Juan Díaz Godino “*Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*” (Godino, 2024), donde consta una sección dedicada a la identificación y el análisis de las concordancias y complementariedades del EOS con otras teorías. Finalmente, sugiero la revisión de dos libros muy interesantes, publicados recientemente, cuyos títulos, ya inicialmente, sugieren una lectura atenta para profundizar sobre las cuestiones abordadas aquí, a saber: “*Por una teoría de las didácticas disciplinares*” (Fandiño & D’Amore, 2024) y *Teorías relevantes en educación matemática*” (Asenova, et al., 2024).

## Referencias Bibliográficas

- Asenova, M., D’Amore, B., Fandiño, M., Fúneme, C., Iori, M., & Santi, G. (2024). *Teorías relevantes en educación matemática*. Magisterio.
- Brousseau, G. (2005). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer.
- D’Amore, B. (2019). Entrevista sobre las teorías en Educación Matemática. En *Diálogos educativos del Doctorado Interinstitucional en Educación*. Bogotá. Diciembre 16 de 2019.
- Fandiño, M. & D’Amore, B. (2024). *Por una teoría de las didácticas disciplinares*. Magisterio.
- Godino, J. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Aula Magna.
- González, F. L. (2010). *El pensamiento de Vygotsky. Contradicciones, desdoblamientos y desarrollo*. Trillas.
- Hegel, G. (2001). *The philosophy of history*. Batoche. (Original work published 1837).
- Heidegger, M. (1986). *El ser y el tiempo*. Fondo de Cultura Económica.
- Kosik, K. (1963). *Dialéctica de lo concreto*. Grijalbo.
- Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. L. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. *REMATEC*, 16(39), 228-245.
- Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice-Hall.
- Marx, K. (1982). *Oeuvres. Tome III. Philosophie*. M. Rubel, dir. Gallimard.
- Pantano Mogollón, Óscar L., Vergel, R., & Radford, L. (2021). Estimulación, evolución y refinamiento de la actividad perceptual de un grupo de estudiantes y la profesora. *REMATEC*, 16(39), 206-227.
- Radford, L. (2016). On alienation in the mathematics classroom. *International Journal of Educational Research*, 79, 258-266.
- Radford, L. (2021). Reimaginar el aula de matemáticas: Las matemáticas escolares como praxis emancipadora. *Revista Chilena de Educación Matemática*, 13(2), 44-55.
- Radford, L. (2023). *La teoría de la objetivación. Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Uniandes.
- Radford, L. & Lasprilla, A. (2020). De por qué la ética es ineludible de considerar en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *La matemática e la sua didattica*, 28(1), 107-128.
- Radford, L., Miranda, I., & Vergel, R. (2023). Savoir mathématique et action didactique dans la théorie de l’objectivation. *Caminhos da Educação Matemática em Revista – CEMeR*, 13(4), 75-93.
- Roth, W. M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Sense Publishers.
- Vergel, R. (2014). El signo en Vygotski y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. *Folios*, 39, 65-76.
- Vergel, R., Godino, J. D., Font, V., y Pantano, O. L. (2023). Comparing the views of the theory of objectification and the onto-semiotic approach on the school algebra nature and learning. *Mathematics Education Research Journal*, 35(3), 475-496.
- Vergel, R., Radford, L., & Rojas, P. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético « sofisticado » y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema*, 36(74), 1174-1192.

## Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad

La Educación Matemática puede entenderse como un sistema de actividades que abordan los problemas de investigación básica y aplicada implicados en los procesos de difusión del conocimiento matemático, así como en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; tal sistema incluye actividades de fundamentación, planificación, implementación, evaluación y desarrollo profesional docente, que se apoyan en diversas teorías, lo que plantea el interés por su comparación, coordinación y posible integración. Mi contribución se sustenta en reflexionar sobre el rol que pueden aportar las herramientas de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad (CHAT), en su versión de la 3ª y 4ª generación (Engeström, 1987; Engeström, 2009; Engeström & Sannino, 2021), para analizar las teorías como sistemas de actividad. Este enfoque puede ayudar a ampliar la visión de las teorías y facilitar su comprensión, comparación y articulación, al fijar la atención no sólo en los sujetos, el objeto e instrumentos, sino también en el contexto comunitario y el entorno

ecológico-normativo donde tienen lugar tales actividades. La interpretación de las teorías como sistemas de actividad permitirá incluir en su análisis los componentes comunitario, histórico y cultural, y el entorno ecológico-regulativo en que se desarrollan, además de su objeto o motivo (dar respuestas a determinadas cuestiones) e instrumentos que se construyen y aplican (principios y métodos). Se puede entender la diversidad de teorías como pluralidad de sistemas de actividad realizadas en el seno de comunidades de práctica, entre las cuales existen contradicciones, dilemas, brechas o duplicidades, cuyo reconocimiento y solución puede hacer progresar la actividad global del campo correspondiente.

## **Dilemas y conflictos en educación matemática abordados por el EOS**

En Godino et al. (2024) se ha considerado a la Educación Matemática como un sistema social complejo que conlleva la realización de, al menos, las actividades de Fundamentación, Planificación, Implementación, Evaluación y Desarrollo profesional docente. Así mismo, se propone que las teorías sobre Educación Matemática se pueden concebir como sistemas de actividades que tratan de dar respuestas a las cuestiones objetos/motivos, de todas o parte de las actividades parciales mencionadas. Dicho análisis se ha aplicado al caso del EOS (Godino, 2024).

La estructura de los sistemas de actividad propuesta por la CHAT lleva a estudiar la dimensión histórica-cultural y comunitaria de las teorías, así como el contexto ecológico-regulativo donde se trata de dar respuesta mediada con instrumentos a las cuestiones que constituyen su razón de ser. La noción de contradicción en la CHAT, donde se pueden incluir los dilemas, tensiones o conflictos existentes entre los distintos elementos de la actividad (Nuñez, 2009), o entre distintas actividades relacionadas, ayuda a explicar las razones para cambiar los sistemas y a identificar contradicciones no resueltas que deben ser abordadas con nuevos desarrollos.

En la Figura 2 se presenta el EOS como un sistema teórico para la Educación Matemática que trata de abordar la complejidad de cuestiones que caracterizan los distintos sistemas de actividades que la componen, así como los conflictos que se abordan. El análisis aplicado en esta propuesta ayuda a reconocer las relaciones de interdependencia entre los distintos sistemas de actividad parciales que componen la Educación Matemática. Recordar que los supuestos sobre la naturaleza de la actividad matemática y las herramientas de análisis desarrolladas determinan aspectos esenciales de la planificación, implementación y evaluación de los procesos de instrucción matemática.

## **Conclusiones**

Como resultado del análisis realizado en esta propuesta, se hacen dos usos originales del CHAT:

- 1) Considerar la investigación en Educación Matemática como un sistema de actividad formado por cinco actividades parciales (fundamentación, planificación, implementación, evaluación y formación del profesorado) y,
- 2) Considerar una teoría como un sistema de actividad. El uso del modelo triangular para los sistemas de actividad (Figura 1) lleva a ampliar la visión sobre las teorías hacia el contexto histórico-cultural (comunidad) y el nicho ecológico (normativo) en el que se desarrollan.

Estos usos de la CHAT han permitido entender al EOS como el estudio de las cinco actividades parciales para las que se han desarrollado herramientas conceptuales y metodológicas específicas. Además, la actividad de elaboración teórica del EOS se presenta como una propuesta para abordar dilemas o controversias (Figura 2) existentes entre diversas teorías utilizadas en Educación Matemática, entendidas también como sistemas de actividades.

El desarrollo del EOS puede considerarse como una versión del aprendizaje expansivo. Engeström (1987) propone que el aprendizaje, en el marco del CHAT, no sólo implica la asimilación de conocimientos existentes, sino también la creación de nuevos conocimientos y prácticas. El sujeto colectivo formado por individuos interesados en el desarrollo del EOS se nutre de herramientas desarrolladas en otros sistemas de actividad (teorías). Sin embargo, a través de acciones colaborativas y socialmente mediadas, se busca ampliar las actividades originales, generando nuevos conceptos, herramientas y formas de abordar la investigación en Educación Matemática. En lugar de adoptar acríticamente otras teorías existentes, el sujeto colectivo del EOS busca activamente contribuir a la transformación de sus entornos de aprendizaje de la investigación mediante la elaboración de nuevas herramientas teóricas.

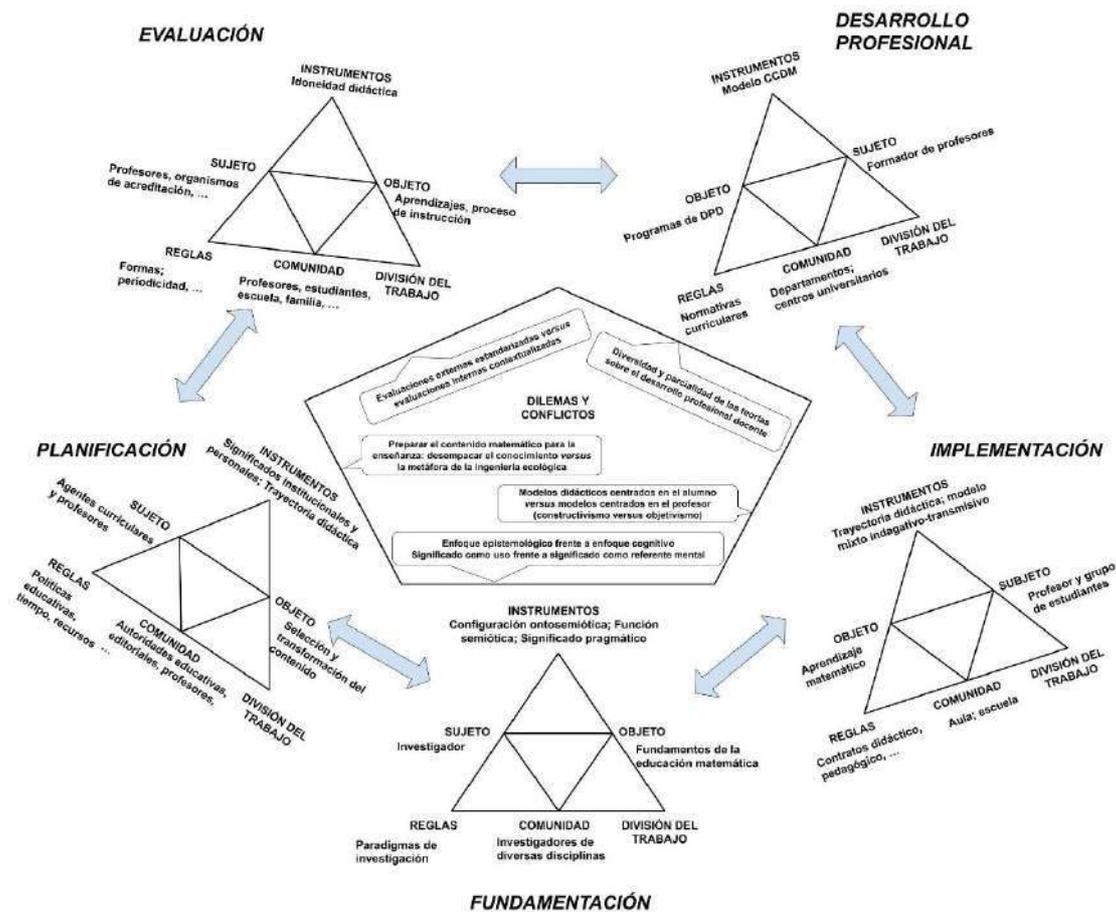


Figura 1. Dilemas, conflictos e interdependencias entre sistemas de actividad en el EOS (Godino et al., 2024)

## Referencias Bibliográficas

- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Cambridge University Press.
- Engeström, Y. (2009). The future of activity theory: a rough draft. In A. Sannino, H. Daniels, & K. D. Gutiérrez (Eds). *Learning with expanding in activity theory* (pp. 303-328). Cambridge University Press.
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2021). From mediated actions to heterogeneous coalitions: four generations of activity-theoretical studies of work and learning. *Mind, Culture, and Activity*, 28, 1, 4-23, <https://doi.org/10.1080/10749039.2020.1806328>.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque Ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. McGraw Hill-Aula Magna.
- Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M. & Wilhelmi, M. D. (2024). Understanding the Onto-semiotic Approach in mathematics education through the lens of the Cultural Historical Activity Theory. *ZDM-Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01590-y>
- Núñez, I. (2009). Activity theory and the utilization of the activity system according to the mathematics educational community. *Educate* (Special issue, December 2009), 7-20. <http://www.educatejournal.org/7>

**Post-Memorias V SEM-V del Panel de Clausura**  
**“Inteligencia Artificial y Educación Matemática:**  
**¿unidireccionalidad o bidireccionalidad?”**

**Jorge E. SAGULA<sup>(1, 2, 3)</sup>, Fredy E. GONZÁLEZ<sup>(4)</sup>,  
Juan E. NÁPOLES VALDES<sup>(5, 6, 7)</sup>, Marcel D. POCHULU<sup>(7, 8, 9)</sup>,  
Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ<sup>(7, 10)</sup>**

**<sup>(1)</sup>División Matemática y División Estadística, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(2)</sup>Director Equipo COIN, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(3)</sup>Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(4)</sup>Programa de Posgrado en Educación Matemática,  
Universidade de Ouro Preto, Brasil**

**<sup>(5)</sup>Universidad Nacional del Nordeste, Argentina**

**<sup>(6)</sup>UTN, Facultad Regional Resistencia, Argentina**

**<sup>(7)</sup>Miembro Equipo COIN, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(8)</sup>Universidad Nacional de Villa María, Argentina**

**<sup>(9)</sup>UTN, Facultad Regional Villa María, Argentina**

**<sup>(10)</sup>Escuela de Postgrado, Universidad Nacional de Trujillo, Perú**

**Resumen**

Este texto, corresponde a las Post-Memorias del Panel de Clausura del V SEM-V (V Simposio de Educación Matemática Virtual), titulado “Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad o bidireccionalidad?”, fruto no exclusivo de los resúmenes expandidos iniciales (a publicarse en las Memorias del V SEM-V), y tampoco, exclusivamente, provenientes de las micro-disertaciones (por la rigurosidad en la acotación del tiempo), sino por las interacciones, al finalizar el Panel, y las reflexiones generadas, amén de las preguntas formuladas.

Pero, por qué, Post-Memorias? Porque las Memorias, increíblemente, son antes de las disertaciones, en general, de manera que se pierde lo más rico de los conceptos vertidos al finalizar un panel, lo que denomino, en mi carácter de Director Académico de cada edición del SEM y del SEM-V, el conocimiento emergente; por tanto, esta es una muestra de lo que ha quedado, de lo reflejado en los intercambios, en las reflexiones,...., en fin, las nuevas ideas a develar en el curso del tiempo.

La primera micro-disertación, a cargo de Fredy E. GONZÁLEZ fue titulada “Inteligencia Artificial vs. Inteligencia Emocional: Explorando fronteras”, título que permitirá concluir si se trata de “vs.” o de “co”.

La segunda micro-disertación, a cargo de Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ, se tituló “La Nueva Educación: Retos para el Maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial”, permitiendo saber los avatares y retos para que cada docente se desempeñe adecuadamente y crezca haciendo crecer a sus estudiantes, aprovechando lo pertinente en cuanto a la Inteligencia Artificial

La tercera micro-disertación, a cargo de Juan E. NÁPOLES VALDES, “La Inteligencia Artificial y la Investigación en Matemática”, ya abriendo el campo específico.

La cuarta micro-disertación, “Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA”, responsabilidad de Marcel D. POCHULU, da un paso al más allá, generando la disrupción.

La quinta micro-disertación, “Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿bidireccionalidad o multidireccionalidad?, busca la trascendencia al campo transdisciplinar, aumentando la disrupción.

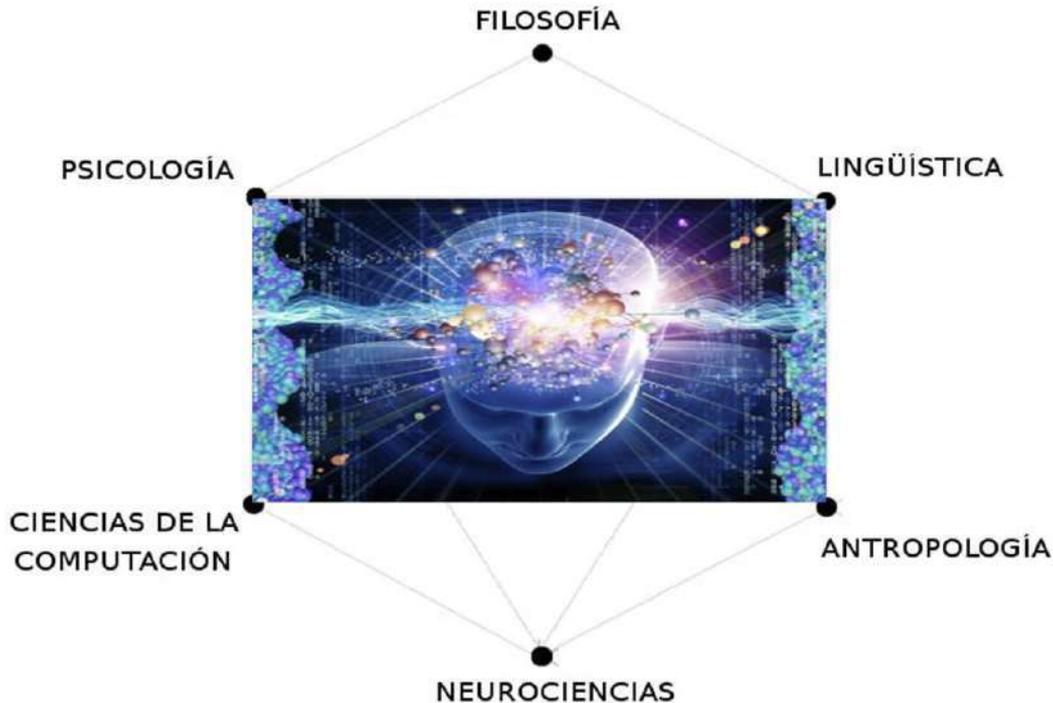
Las cinco visiones dejan, inicialmente, puntos específicos para mostrar los avances actuales de la investigación en la convergencia entre Educación Matemática e Inteligencia Artificial, y así, poder generar reflexiones que permitan abrir nuevos puntos de interés para seguir avanzando.

**Palabras clave:** Inteligencia Emocional. Inteligencia Artificial. Inteligencia Natural. Retos Docentes. Transformación de problemas. Transdisciplinariedad. Convergencia

## Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: Explorando fronteras

Hace más de dos décadas, George Miller (2003) indicó que la humanidad estaba asistiendo a lo que él denominó “La Revolución Cognitiva” (*The cognitive Revolution*), refiriéndose a los estudios sobre el funcionamiento del cerebro humano indicando que éstos constituyen un campo de investigación transdisciplinaria donde se articulan la Psicología, la Filosofía, la Lingüística, las Ciencias de la Computación, la Antropología y, por supuesto, las Neurociencias en sus amplias variantes. (Figura 1)

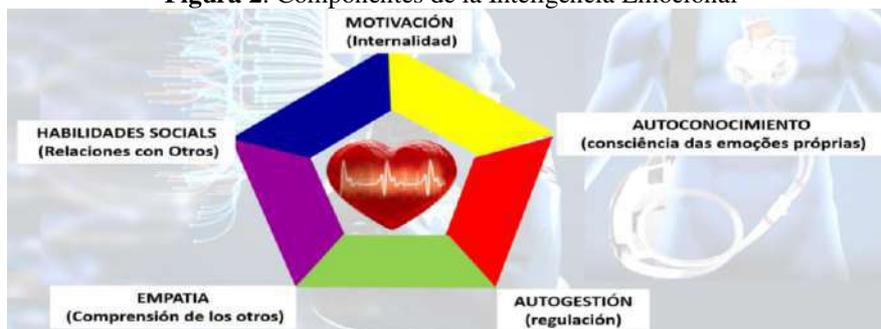
**Figura 1.** Los Estudios sobre el Funcionamiento del Cerebro Humano son Transdisciplinarios



Fuente: Elaboración Propia

En esos estudios, las Neurociencias desempeñan el papel de núcleo articulador; ellas se proponen examinar los procesos mentales superiores, es decir, el funcionamiento de la mente y cómo ésta nos permite relacionarnos con el mundo mediante determinados procesos, con cuya activación se está en condiciones de memorizar, solucionar problemas, comunicarnos y diferenciar situaciones. Por otra parte, es posible que las personas puedan conocer y regular su propio funcionamiento intelectual; esto es, hacerse conscientes de su propia dinámica cognitiva. Durante mucho tiempo, al estudiar los procesos de pensamiento, no se consideró a la emoción; pero, en la actualidad, la emoción es uno de los aspectos afectivos que se estudia frecuentemente por su estrecha relación con los procesos cognitivos; esto ha contribuido a la incorporación de un nuevo constructo teórico: la Inteligencia Emocional (IE), referida a la capacidad de comprender, gestionar y expresar emociones de forma efectiva, tanto en relación a sí mismo como a los demás (Figura 2).

**Figura 2.** Componentes de la Inteligencia Emocional



Fuente: Elaboración Propia.

Para estudiar la emocionalidad, es menester considerar sus cinco dimensiones constitutivas; a saber: (a) Subjetiva (conciencia del placer o displacer); (b) Cognitiva (valoración); (c) Expresiva (comunicación y exteriorización); (d) Fisiológica (cambios en el Sistema Nervioso Central), y e) Motivacional (adaptación al entorno); la interrelación entre todas estas dimensiones se muestra en la Figura 3.

**Figura 3.** Interrelación entre las 5 Dimensiones de la Emocionalidad.



**Fuente:** Elaboración *Propia*

Por otro lado, la Inteligencia Artificial representa la capacidad de los sistemas para realizar tareas que regularmente requieren inteligencia humana. Las máquinas, alimentadas por algoritmos complejos y aprendizaje automático, pueden analizar datos, reconocer patrones y tomar decisiones basadas en esa información; por tanto, mediante la IA es posible: automatizar procesos, sistematizar, optimizar la eficiencia y crear soluciones innovadoras para desafíos complejos. De acuerdo con Jorge E. Sagula, investigador de la Universidad de Luján (Argentina), “Los primeros esbozos específicos de la Inteligencia Artificial datan del año 1956 cuando, en el Instituto Darsmouth (EE. UU.), un grupo de investigadores provenientes de universidades y empresas privadas empezaron a conceptualizar la idea (Sagula, 2023). Desde entonces, la IA ha tenido un inusitado desarrollo y, al mismo tiempo que abre innumerables posibilidades a la educación, también le plantea importantes desafíos, tal como lo expresan Rivero Panaqué & Beltrán Castañón (2024). Para conocer más sobre la historia y la evolución de la IA, se recomienda el estudio de Abeliux & Gutiérrez (2021).

Sin embargo, se debe admitir que Inteligencia Emocional e Inteligencia Artificial son complementarias, pues mientras la IE destaca la profundidad de la experiencia humana, la IA se centra en la automatización y la resolución de problemas prácticos, aunque la IA puede liberar a los seres humanos de tareas rutinarias, permitiéndoles enfocarse en actividades que requieren IE, como la toma de decisiones éticas, la empatía y la creatividad.

No obstante, se debe prestar atención a los impactos éticos, sociales y emocionales de la IA, los cuales tienen incidencia sobre la privacidad de las personas, y eso es susceptible de ser usado inadecuadamente dando paso a situaciones de desigualdad y discriminación y generando problemas de seguridad tanto en los servicios públicos como en los privados. Por tales motivos, es muy importante equilibrar los beneficios de la IA con las preocupaciones sociales. Su implementación ética debe considerar no sólo la eficacia técnica, sino también los impactos en las comunidades afectadas.

Siendo así, y considerando que la Inteligencia Artificial y la Inteligencia Emocional son diferentes pero no antagónicas, es necesario crear un equilibrio armonioso, donde las habilidades emocionales humanas sean mejoradas mediante la automatización eficiente de la IA.

Finalmente, dadas sus inmensas potencialidades, los educadores debemos aproximarnos inteligentemente a la IA y aprovecharla para mejorar nuestras prácticas y, principalmente, para que nuestras acciones didácticas se orienten a incrementar la probabilidad de aprendizaje de nuestros estudiantes. Algunas de esas posibilidades se exhiben en la Figura 4.

**Figura 4.** Desafíos que la IA plantea a la Educación



Fuente: Elaboración Propia

## Referencias Bibliográficas

Abeliux, A. & Gutiérrez, Claudio. (2021). Historia y Evolución de la Inteligencia Artificial. Revista **Bits de Ciencia**, 21, Pp. 14-21. Disponible en: <https://revistasdex.uchile.cl/index.php/bits/issue/view/217>

Miller, G.A. (2003). The cognitive revolution: a historical perspective. **TRENDS in Cognitive Sciences**, 7(3), p. 141. Disponible em: <http://www.cogsci.princeton.edu/~geo/Miller.pdf>.

Rivero Panaqué, C., & Beltrán Castañón, C. (2024). La inteligencia artificial en la educación del siglo XXI: avances, desafíos y oportunidades. Presentación. **Educación**, 33(64), Pp. 5-7. <https://doi.org/10.18800/educacion.202401.P001>

Sagula, Jorge E. La Inteligencia Artificial (IA) no está viva y no viene a eclipsar a la Humanidad. **La Razón de Chivilcoy**. Chivilcoy, Buenos Aires.n. 6069, 7 mayo 2023. Locales. S.f Disponible en: <https://www.larazondechivilcoy.com.ar/locales/2023/5/7/la-inteligencia-artificial-ia-no-esta-viva-no-viene-eclipsar-la-humanidad-163805.html>

## La Nueva Educación: Retos para el Maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial

La Educación, es verdaderamente apasionante, por la esencia que encuentro en ella, por la profundidad y el impacto emocional que tiene en mí, pues en base a la teoría de grafos, por relacionamiento, siempre me lleva a pensar que fui hijo de una maestra que desde que tengo uso de razón, siempre me hizo transitar por ese camino; importante también, por la combinación de factores emocionales en las personas que me acompañaban en mi ponencia, y que, asumo prestaban atención, por la importancia que tiene, porque es común a todos, y nos beneficiamos de ella, por los conocimientos que logramos, y que nos servirán para nuestras vidas, permitiendo nuestro desarrollo personal, profesional, en mejora social, y crecimiento económico. Así también, para otros es emotivo porque en el tiempo nos convertimos, en las personas que, a partir de la Educación, hacemos posibles cambios estructurales en niños y jóvenes en los distintos niveles educativos, pues decidimos convertirnos en Maestros, solo que esos de Verdad, instrumentos de inspiración para nuestros estudiantes y que, por decisión propia, decidan convertirse en elementos de cambio, a partir de trabajar ese cambio como efecto causal en ellos.

Este aporte está basado en mi esencia, en la semántica y el criterio lógico desarrollado en el tiempo, por mi formación en Ingeniería de Sistemas, y en Administración, de organizaciones, de recursos escasos y con la necesidad de ser creativo para ser exitoso, a partir de la aplicación de la Teoría General de Sistemas y la Teoría de la Complejidad, para comprender y explicar, el aprendizaje como proceso y como sistema dinámico y adaptativo: Proceso porque no es un hecho aislado, sino que se planifica y se va ejecutando en diversas etapas, en las que se van desarrollando competencias que nos hacen crecer, y Sistema porque está compuesto por elementos relacionados e interconectados con interacción y se responde a las necesidades del entorno. Y si de educación se trata, el Constructivismo nos ofrece enfoques que promueven el aprendizaje.

“La Nueva Educación: Retos para el Maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial”, invita a partir de los antecedentes antes expuestos, pero, induce a diagnosticar el presente para mirar el futuro con expectativas en la potencia de los elementos que se vienen desarrollando, construyendo e inventando, mismos que deberían ser verdaderos inductores de cambios reales, pues, aunque no lo parezca, la Educación no ha cambiado radicalmente en los últimos 200 años, como fue demostrado en la ponencia, porque el enfoque estructural no lo ha hecho, y el currículo y los planes de estudio, tampoco fueron suficientes.

Disfruto compartir un poco de vida real, relacionándola con los cambios que se dieron en mi caso, en los últimos 50 años, donde pude corroborar, ya como parte de alguna investigación, la necesidad de verdaderos cambios, sobre todo porque la vida cambió, la ciencia y la tecnología hicieron su parte, sólo que parece que más dirigidas a las industrias, a la diversión, a las formas de vida, de comportarse, de actuar y de proceder, sin considerar que cada vez más se requiere trabajar el concepto de la Educación para el Cambio, algo que me acompaña desde hace 25 años, pues un CADE Universitario de IPAE, en junio’1999, marcó en mí la necesidad de trabajarlo desde mi perspectiva.

Considerando mi disertación: “Retos para el Maestro actual, en la era de la Inteligencia Artificial”, es importante remarcar que hace 2 siglos se aplica, en general, el modelo repetitivo, en el cual el profesor o docente, parado al frente de los estudiantes, explica conceptos, teorías conceptuales, y los alumnos, toman nota en sus cuadernos y lo estudian para el momento de la evaluación, donde la memoria asumirá un rol protagónico para hacerse merecedor de una calificación, causando bienestar si es aprobatoria, y si no es así, se correrá el riesgo de repetir el curso, ciclo, año, etc., dejando de lado los dones individuales, destruyendo las capacidades creativas. Y esto no ha cambiado a pesar de la pandemia CoVid19 durante el año 2020 y los siguientes 3 años, donde obligatoriamente hubo que recurrir al uso de la tecnología de la virtualidad, en resumen, hubo cierto entorpecimiento de algunos elementos del proceso integral de enseñanza – aprendizaje, a partir del análisis de diversos enfoques.

Los antecedentes mostrados, expresamente responden a un entorno personal, sin embargo, en la presentación se analizaron algunos otros más globales, pues el avance y el desarrollo tecnológico, está muy acelerado, en TI e IA, el uso de la I+D+i en los modelos educativos, pero la docencia parece estar estática, con un enfoque limitado, generando una brecha cada vez más notoria, con la presencia de la IA, y así, existe temor que los docentes, en su rol, tiendan a desaparecer, y parecería que no existe la brújula que muestre la estrategia para mitigar los problemas advertidos, esto permite vislumbrar que la I+D no está haciendo su labor, pues no generan un feedback real y efectivo, y otros.

Aun considerando que no soy un experto en Inteligencia Artificial (IA), conozco sobre la potencia de esta disciplina que tiene 80 años de vida, sólo que se construye a partir de criterio y razonamiento lógico-matemático, el mismo que se hace a nivel de la inteligencia humana, con un alto grado de sensatez y criterio, buscando incorporar ingenio al proceso, tratando de replicar al cerebro humano, con perseverancia y ayuda simbiótica de las Tecnologías de la Información y las computadoras, que le brindan soporte, en el proceso de aprendizaje de la inteligencia humana.

Siendo distinta, lo que pretende es simular el razonamiento humano, en procura de generar aprendizaje, solo más veloz, y un mayor grado de asertividad, soportado por un gran volumen de datos, reflejados por la Ciencia de Datos, que le facilita mayores elementos para tomar las mejores decisiones. Sin embargo, a diferencia de la inteligencia humana, carece del instinto, ese elemento sorpresa, “se me ocurre...”, a partir de mirar sus ojos, y sentir su piel”, y la conciencia de las personas, del amor espontáneo, que se construye a nivel social; con las capacidades que nos hace únicos.

Finalmente, ¿Cuál debería ser el reto para el maestro actual en la nueva educación, en la era de la IA? Los maestros, deberían ser líderes de verdad, esos que marquen la diferencia en la vida de sus estudiantes, de esos que lo miran y que deberían admirarlos, aquellos que tengan la capacidad de generar sueños y proyectos de vida, y dejar a la IA que asuma las tareas más tediosas, el manejo y generación de información y conocimiento, dejando a los maestros lo apasionante, lo emocionante, lo humano y con mayor impacto en la vida de las personas.

Los maestros, no están diseñados para competir con máquinas, en espacios donde la IA lo hará mejor, por lo cual deben usar más tiempo en las relaciones interpersonales, enfatizando en la ética y valores, en el

trabajo en equipo, en generar empatía y creatividad en sus estudiantes: Ese debería ser el Futuro de los Maestros en la Educación.

## La Inteligencia Artificial y la Investigación en Matemática

Comienzo con la pregunta ¿La IA puede ayudar en la investigación matemática? A priori, puede pensarse que es más una pregunta retórica que real, pero que “opina” el ChatGPT al respecto.

¿El ChatGPT puede ayudar en la investigación en matemática?

Sí, el ChatGPT puede ser útil en la investigación matemática en varios aspectos:

**Generación de ideas:** Puede ayudar a generar ideas nuevas o plantear enfoques alternativos para resolver problemas matemáticos. Al proporcionar descripciones detalladas de conceptos matemáticos y ejemplos relevantes, puede ayudar a los investigadores a pensar de forma creativa.

**Exploración de conceptos:** Puede explicar conceptos matemáticos complejos de una manera clara y comprensible, permitiendo ayudar a los investigadores a entender mejor las teorías y métodos existentes.

**Resolución de problemas:** Puede ayudar a resolver problemas matemáticos específicos proporcionando sugerencias, estrategias y pasos para avanzar en la resolución de un problema dado.

**Revisión y crítica:** Puede revisar y evaluar el trabajo de investigación existente, identificando posibles errores, inconsistencias o áreas de mejora en los resultados o métodos utilizados.

**Búsqueda de referencias:** Puede brindar referencias bibliográficas relevantes y sugerir fuentes adicionales de información para ampliar el conocimiento sobre un tema específico.

Si bien el ChatGPT puede ser una herramienta útil en la investigación matemática, es importante recordar que no puede reemplazar completamente tanto la experiencia como el juicio humano. Los investigadores deben utilizar el ChatGPT como una herramienta complementaria y seguir evaluando críticamente la información proporcionada. Además, es fundamental verificar y validar cualquier resultado o idea generada con métodos matemáticos rigurosos y con la revisión de pares.

Es importante dejar en claro el potencial que tiene la IA, específicamente el ChatGPT a la hora de ayudar a un investigador matemático.

Para terminar, quiero resaltar dos cuestiones en la respuesta brindada: *“no puede reemplazar por completo la experiencia y el juicio humano”* y *“es fundamental verificar y validar cualquier resultado o idea generada con métodos matemáticos rigurosos y con la revisión de pares”*. Es importante, ser más específico al respecto, para ello “le pregunto” al ChatGPT si el Cálculo Fraccionario es una generalización del Cálculo Clásico.

El ChatGPT responde: Sí, el cálculo fraccionario puede considerarse una generalización del cálculo clásico. Mientras que el cálculo clásico se enfoca en derivadas e integrales de órdenes enteros, el cálculo fraccionario extiende estos conceptos a órdenes fraccionarios, permitiendo derivadas e integrales de "orden no entero".

Aquí están algunos puntos clave que resaltan cómo el cálculo fraccionario generaliza el cálculo clásico:

**Derivadas e Integrales Fraccionarias:** En el cálculo clásico, la derivada de una función representa la tasa de cambio y la integral representa el área bajo una curva. El cálculo fraccionario extiende estas definiciones a órdenes que no son enteros. Por ejemplo, en lugar de la primera o segunda derivada, puedes tener una derivada de orden  $\alpha$  donde  $\alpha$  puede ser  $\frac{1}{2}$ , 1.5, ..., etc.

**Operadores Fraccionarios:** El cálculo fraccionario utiliza operadores especiales, como el operador de Riemann-Liouville y el operador de Caputo, que generalizan los conceptos de derivada e integral. Estos operadores tienen propiedades que se reducen a las del cálculo clásico cuando el orden fraccionario es un número entero.

**Funciones Especiales:** El cálculo fraccionario involucra funciones especiales como la función Gamma y la función de Mittag-Leffler, que no aparecen en el cálculo clásico. Estas funciones ayudan a definir y manejar las derivadas e integrales fraccionarias.

**Aplicaciones Avanzadas:** El cálculo fraccionario es útil para modelar fenómenos que tienen propiedades de memoria o efectos de largo plazo, lo que puede ser difícil de capturar con el cálculo clásico. Esto incluye sistemas físicos, procesos estocásticos y problemas en ingeniería y control.

En resumen, mientras que el cálculo clásico se centra en conceptos básicos y aplicaciones directas de derivadas e integrales, el cálculo fraccionario expande estos conceptos para tratar con una gama más amplia de fenómenos y sistemas, proporcionando herramientas adicionales para el análisis y modelización matemática.

La respuesta podría considerarse adecuada, sin embargo, deteniéndome en la afirmación inicial: “*Sí, el cálculo fraccionario puede considerarse una generalización del cálculo clásico*”, es evidente que se trata de una afirmación errónea por múltiples motivos, aunque señalaré dos: para ningún valor de  $\alpha$ , la Derivada de Riemann-Liouville o la Derivada de Caputo, “devuelve” la derivada ordinaria y, segundo, en el caso particular de la función:

$$f(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t \leq 1 \\ t - 1, & 1 < t \leq 1 + \varepsilon, \varepsilon > 0 \end{cases}$$

Se tiene:

$$D_{0+}^{\alpha} f(t), \alpha \in (0,1)$$

$$f'(t), [0,1) \cup$$

Los intervalos de existencia, de estas dos derivadas, para la misma función no son los mismos, tampoco hay relación de inclusión.

Entonces, el cálculo fraccionario, que está estrechamente relacionado con el cálculo clásico, no es la generalización directa de dicho Cálculo, en el sentido estricto de la palabra. Esto es una prevención que se debe tener presente, al interactuar con la IA, en particular con el ChatGPT.

## **Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA**

Mi intervención aborda un tema crucial y contemporáneo en la Educación Matemática: la necesidad de diseñar problemas que trasciendan el ámbito puramente teórico para conectar con contextos reales y profesionales, aprovechando las capacidades emergentes de la Inteligencia Artificial Generativa (IAG). Si bien la propuesta presentada es innovadora y plantea un enfoque optimista hacia la integración de la IAG en el currículo, también expone una serie de desafíos complejos que requieren una problematización más detallada y profunda, especialmente en cuanto a su implementación práctica en el sistema educativo.

*Reestructuración curricular y resistencia al cambio:* Pochulu (2024) destaca el potencial de la IAG para identificar y desarrollar aplicaciones matemáticas en áreas que, tradicionalmente, han recibido poca atención en los programas de formación docente. Esta capacidad de la IAG ofrece la posibilidad de ampliar el alcance del currículo, integrando disciplinas que no han sido suficientemente exploradas en la educación matemática convencional. Al hacerlo, se abre la puerta a un enfoque más inclusivo y diversificado, que no sólo enriquece la formación de los futuros docentes, sino que también les proporciona herramientas para enseñar matemáticas de forma más contextualizada y relevante, respondiendo a las necesidades de una gama más amplia de estudiantes y campos profesionales.

Este enfoque ofrecería una oportunidad única para revitalizar los currículos y hacerlos más relevantes, particularmente en carreras donde las matemáticas son esenciales. Sin embargo, la propuesta implica un desafío significativo: la resistencia al cambio dentro de las instituciones educativas. Los programas actuales están estructurados en torno a un enfoque tradicional, donde las matemáticas se enseñan de forma abstracta,

frecuentemente desvinculada de su aplicación práctica. Implementar un currículo que integre problemas auténticos y contextuales generados por IAG requeriría no sólo una reestructuración sustancial, sino también un cambio profundo en la mentalidad de los educadores, quienes pueden no estar preparados o dispuestos a adoptar nuevas metodologías. Este cambio no sólo involucraría la incorporación de nuevas herramientas, sino también la reconceptualización de lo que significa enseñar matemáticas de manera contextualizada y relevante.

*Formación docente y competencia tecnológica:* La formación docente se presenta como un elemento central en la transformación educativa impulsada por la integración de la IAG. Pochulu (2024) resalta cómo la IAG puede facilitar la creación de problemas matemáticos relevantes y realistas, lo que representa un avance significativo hacia un currículo más contextualizado y aplicable. Sin embargo, la propuesta no explora en profundidad un aspecto crucial: la necesidad de una formación docente que prepare a los educadores para enfrentar este nuevo paradigma.

La integración de problemas generados por IAG en el proceso de enseñanza no sólo requiere que los docentes posean un sólido dominio de las matemáticas y su aplicación en contextos prácticos, sino que también demanda una competencia avanzada en el uso de tecnologías emergentes. Este desafío dual —que abarca tanto aspectos pedagógicos como tecnológicos— es esencial para asegurar que las innovaciones en la enseñanza matemática sean implementadas de forma eficaz y equitativa. Por tanto, el reto pedagógico radica en que los docentes deben adaptarse a un enfoque de enseñanza más dinámico y orientado hacia la resolución de problemas reales. Esto implica no sólo un cambio en las metodologías de enseñanza, sino también una revalorización de la forma en que se conciben los contenidos matemáticos. Los educadores deben estar capacitados para guiar a los estudiantes en la exploración de problemas que trascienden el aula, conectándolos con situaciones del mundo real y desarrollando habilidades críticas que serán fundamentales en su vida profesional.

Por otro lado, el desafío tecnológico no es menor. Los docentes deberán familiarizarse con herramientas de IAG que no sólo son sofisticadas, sino que también están en constante evolución. La brecha tecnológica podría convertirse en un obstáculo significativo si no se aborda adecuadamente. Aquí, surge la necesidad imperiosa de diseñar programas de formación continua que no solo introduzcan a los docentes en el uso de estas tecnologías, sino que también los mantengan actualizados frente a los rápidos avances en el campo de la IA. Además, es fundamental cuestionar cómo se estructurarán estos programas de formación: ¿Deberán ser integrados dentro de los actuales programas de formación inicial docente, o es preferible desarrollar módulos específicos y avanzados para educadores en ejercicio? También es crucial considerar cómo se medirán las competencias tecnológicas adquiridas y su impacto en la práctica pedagógica. La efectividad de la IAG en la educación matemática no dependerá únicamente de la tecnología en sí, sino de cómo los docentes sean capaces de integrarla de manera significativa en sus métodos de enseñanza. Por tanto, la implementación exitosa de la IAG en la enseñanza de las matemáticas exige una reconfiguración profunda de la formación docente. Esta transformación debe asegurar que los educadores no sólo se sientan cómodos utilizando nuevas herramientas tecnológicas, sino que también desarrollen una comprensión crítica y reflexiva sobre cómo estas tecnologías pueden enriquecer su práctica pedagógica. La capacitación adecuada no sólo debe centrarse en el manejo técnico de la IAG, sino también en cómo utilizarla para fomentar un aprendizaje más profundo y significativo, adaptado a las diversas realidades de los estudiantes. Sólo mediante un enfoque integral y continuo en la formación docente se podrá aprovechar plenamente el potencial de la IAG para transformar la educación matemática, asegurando que los beneficios de estas innovaciones lleguen a todos los estudiantes.

*Autenticidad y relevancia de los problemas generados por IAG:* Otro aspecto crítico es la autenticidad de los problemas generados por IAG. Aunque Pochulu (2024) aboga por el potencial de la IAG para diseñar problemas genuinos que reflejen situaciones reales, es necesario problematizar la calidad y la fuente de los datos utilizados por estos sistemas. Los algoritmos de IAG son tan efectivos como los datos que se les proporcionan, lo que implica un riesgo de sesgos que podría resultar en problemas irrelevantes o que perpetúan desigualdades existentes. Este sesgo no es trivial, ya que podría conducir a la creación de problemas que, aunque técnicamente son correctos, no resuenan con la realidad de todos los estudiantes, limitando su efectividad educativa. En este sentido, Pochulu (2024) señala una laguna importante: la falta de garantías de que los problemas generados por inteligencia artificial sean inclusivos y pertinentes para una audiencia diversa. Esto subraya la necesidad de desarrollar marcos éticos y metodológicos que guíen

el diseño de problemas matemáticos desde una perspectiva que considere la diversidad cultural y social de los estudiantes.

*Bidireccionalidad entre IAG y Educación Matemática:* La idea de una relación bidireccional entre la IAG y la educación matemática, mencionada de forma sucinta por Pochulu (2024), merece una exploración más profunda. Si bien la propuesta se enfoca en cómo la IAG puede transformar la enseñanza de las matemáticas, es igualmente importante considerar cómo las necesidades y desarrollos en la educación matemática podrían influir en la evolución de la IAG. Esta relación simbiótica sugiere que la educación matemática no solo se beneficia de la IAG, sino que también plantea desafíos y demandas que podrían orientar futuras innovaciones en el campo de la inteligencia artificial. Por ejemplo, el desarrollo de algoritmos que aborden las particularidades de la enseñanza en diversos contextos culturales y socioeconómicos representa una prometedora área de investigación, abriendo un debate más amplio sobre la reciprocidad entre estos dos campos.

*Evaluación del impacto de la IAG en el aprendizaje:* Finalmente, un aspecto crucial que requiere atención es la evaluación del impacto de los problemas generados por IAG en el aprendizaje de los estudiantes. Aunque Pochulu (2024) propone que estos problemas pueden proporcionar una experiencia educativa más significativa, aún no está claro cómo se medirá esta efectividad en comparación con los métodos tradicionales. ¿Cómo se evaluará si los estudiantes no solo adquieren conocimientos matemáticos, sino que también desarrollan habilidades para aplicarlos en contextos reales? La ausencia de una metodología de evaluación rigurosa y comparativa dificulta la determinación de si los problemas generados por IAG realmente cumplen con su promesa de mejorar la educación matemática. Este es un terreno fértil para la investigación futura, donde se deben desarrollar y probar metodologías que puedan capturar el impacto real de estas nuevas herramientas en el aprendizaje y en la preparación de los estudiantes para el mundo profesional.

En síntesis, es posible expresar que Pochulu (2024) presenta una propuesta innovadora y necesaria para la educación matemática del futuro, pero también abre una serie de preguntas y desafíos que deben ser abordados para que esta visión se materialice en forma efectiva. La reestructuración del currículo, la formación docente, la autenticidad y relevancia de los problemas generados por IAG, la bidireccionalidad en la relación entre IAG y educación matemática, así como la evaluación de la efectividad de estas nuevas herramientas, son temas que requieren un debate continuo y una investigación rigurosa. Solo a través de un análisis crítico y una implementación cuidadosa se podrá aprovechar el potencial de la IAG para transformar la educación matemática, asegurando que este cambio beneficie a todos los estudiantes y contribuya al desarrollo de una sociedad más equitativa y preparada para los desafíos del siglo XXI.

### **Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?**

El título del Panel de Clausura en el V SEM-V se tituló “Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad o bidireccionalidad?, por eso mi micro-disertación, fue más allá, fue en la búsqueda de nuevos rumbos, hacia las fronteras, por los bordes de un hipergrafo, por las aristas de hiper cuerpos... en plena expansión.... Hacia futuros procesos convergentes multidireccionales.

En primera instancia, en un orden natural de las exposiciones me circunscribo a la micro-disertación de Fredy E. GONZÁLEZ, titulada “Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: explorando fronteras”, y precisamente desde mi enfoque no sólo es un acercamiento sino que la Inteligencia Artificial, y tal cual lo manifesté se nutre de la Inteligencia Natural, y la Inteligencia Emocional es fuertemente conexas con la Inteligencia Natural, y prueba de ello se está manifestando actualmente en la Inteligencia Artificial Generativa; sin embargo, cabe el análisis: ¿se acercan o se contraponen?, ¿qué es lo que buscan los investigadores del área? Hace más de 25 años que desde el MIT, como pionero, se trabaja en Inteligencia Emocional desde la perspectiva de la Inteligencia Artificial, y estas cuestiones siempre pueden vincularse a la ficción, pero muchas veces “la realidad supera a la ficción misma”.... A modo de referencia, si se consideran las Redes Neuronales, desde el inicio en la década del '50, en el siglo pasado, los algoritmos computacionales que las constituyen, están inspirados en la organización jerárquica de la corteza cerebral; y organizados en una pirámide de capas sucesivas, donde cada una intenta descubrir irregularidades de mayor profundidad que la capa anterior; cada capa de por sí, puede “descubrir” una parte muy simple de lo que

ocurre en forma externa a su contexto; y, si se unen varias capas, se configura un dispositivo de aprendizaje, que es necesario “entrenar” para que, a través de la estrategia de aprendizaje específicamente implementada, se obtengan corpúsculos de conocimiento (Sagula, 2024). Por eso, y sólo como uno de los tantos campos, puedo conjeturar que el ítem “vs.” En sí mismo puede ser analizado y evaluado desde la bidireccionalidad, pero segmentando los distintos niveles de la Inteligencia Emocional y la evolución de las personas, el concepto se extiende y puede analizarse en términos de multidireccionalidad, y si ciertamente, la IA refleja a la Inteligencia Humana, se busca idealmente, la convergencia, por tanto, el ítem “vs.” debería ceder para marcar su rumbo a la IA.

En línea, la segunda micro-disertación, “La Nueva Educación, los retos para el maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial”, a cargo de Grover. E. VILLANUEVA SÁNCHEZ nos lleva a los orígenes, pero mirando hacia el futuro mediato e inmediato, donde el primer paso es unidireccional, y precisamente, el nacimiento de la IA, siguió esencialmente, los mismos pasos que una criatura en su formación preliminar, en la búsqueda hacia la resolución de problemas, sopesando el razonamiento lógico-matemático, desarrollando el ingenio y la creatividad, siguiendo el camino de Newell, Shaw & Simon (1959), y más adelante por Newell & Simon (1972), amén del razonamiento lógico en la demostración de teoremas, tareas que también los docentes construían hace tiempo con sus estudiantes, por tanto, quienes están en el mundo de la inmediatez, carecen de la formación, carecen de los procesos formativos en el aprendizaje, desarrollando los distintos niveles de la Inteligencia Natural; he aquí, donde en la mirada hacia la IA es donde el docente puede ir a las fuentes del conocimiento inicial y volcar, en la instancia de los distintos mecanismos sensoriales, poder, con ayuda de especialistas en ciencias de la computación y también, ciencias del comportamiento, lograr una mediación para aportar a la IA. En niveles superiores, la creatividad se manifiesta en vínculo estrecho con la heurística, temática fundamental a la hora de resolver problema, potenciación de la inteligencia natural, para poder migrar, a través de algoritmos computacionales, en la resolución de problemas. La clave, para estar aquí en procesos multidireccionales es la formación y la empatía del docente, y su creatividad al momento de lograr adecuadas metodologías de enseñanza en procura de lograr procesos formativos, esto es, aprendizaje mismo, y no simple información.

En línea, la tercera micro-disertación, “La Inteligencia Artificial y la Investigación Matemática”, cuyo responsable fue Juan E. NÁPOLES VALDES plantea una pregunta específica que, de alguna manera, también fue pensada por (Alan TURING, 1950), en el siglo XX, pero que hoy a la luz de la irrupción masiva, en distintos ámbitos, del ChatGPT, tiene más alcance, pero no significa que la respuesta sea lineal, ¿Puede la IA ayudar en la Investigación Matemática?, y amén de poder ser preguntada a cualquier persona, pero mayor énfasis a un investigador especializado en las disciplinas, y mejor aún, en la interdisciplina, es dable preguntarle al ChatGPT.

La pregunta crucial formulada “in situ” y ad hoc, es “¿Puede ayudar el ChatGPT en la Investigación Matemática, y específicamente, en Educación Matemática?”; entonces, NÁPOLES VALDES arguye cinco aspectos, que, a su juicio, responden positivamente esta pregunta: generación de ideas, exploración de conceptos, resolución de problemas, revisión y crítica, y búsqueda de referencias.

La evidencia en esta disertación da cuenta que sí es necesaria la participación del profesor e investigador que es crucial, para lograr la contextualización, la interrelación, la intervención, la interpretación, la experticia, la experiencia, el juicio crítico, y fundamentalmente, la creatividad e inteligencia humana; sin embargo, esto brinda una viabilidad y visibilidad de procesos bidireccionales, que permiten la realimentación, en tanto y en cuanto, ese profesor e investigador es inteligente y procede a enriquecer su conocimiento, y de esta forma, está en condiciones de mejorar el nivel de sus preguntas, generando así una adecuada Ingeniería de Prompt.

Aquí, es importante resaltar que al comenzar las investigaciones en Aprendizaje Automático (Machine Learning) en el campo de la Inteligencia Artificial en la década de 1980, y desde las ideas de Alan Turing (1950), el objetivo fue desarrollar técnicas de aprendizaje para máquinas, con el propósito de “generalizar comportamientos e inferencias para un gran conjunto de datos”, y esta respuesta es “como imitación de la forma de aprendizaje del cerebro humano”, tal que sus estrategias se sustentan en Algoritmos basados en Regresión y Algoritmos basados en Árboles de Decisión, precisamente mediante la potencia de técnicas y metodologías “apropiadas” de la Heurística y la Metaheurística. El Aprendizaje Automático se relaciona intrínsecamente con el Aprendizaje Estadístico y la Estadística Inferencial y el Reconocimiento de Patrones, y puede verse como un Método de Inducción de Conocimiento. En esta temática, atinente a la Resolución de Problemas, tanto la Heurística como la Metaheurística juegan roles esenciales. Tanto el Aprendizaje

Supervisado como el Aprendizaje Semi-Supervisado y el Aprendizaje No Supervisado se sustentan, por cierto, en la Estadística y la Probabilidad, y aquí, por definición, la toma de decisión está sustentada en la plausibilidad, y la clave, para evitar contenidos sesgados, reside en definir los niveles de umbrales en forma apropiada, de la mano de expertos (Sagula, 2024).

En línea, la cuarta micro-disertación, “Transformado problemas más allá de las matemáticas con IA”, cuyo responsable fue Marcel D. POCHULU, va más allá, trasciende a la propuesta de problemas, que obviamente deben circunscribirse, prima facie, a la existencia contextual, es decir fundamental en contextos extramatemáticos, con el objetivo central de poder modelar, análogamente al trabajo de un alfarero, pues percibe adecuadamente, y encuentra soluciones que se enmarquen en situaciones reales; entonces, aquí, la Inteligencia Artificial Generativa, a través del pionero ChatGPT, en esta temática, pero nacido desde el núcleo de la Resolución de Problemas en la Inteligencia Artificial y la Ingeniería de Conocimiento en el campo de transferencia hacia los Sistemas Expertos, y más en general, desde los Sistemas Basados en Conocimiento, pasa a ser un aliado de la Educación Matemática, y de la Matemática, en general.

POCHULU argumenta que “con la IA, surge la oportunidad de acceder a problemas genuinos que reflejen contextos reales y aplicaciones prácticas de las matemáticas en diversos ámbitos profesionales”.

La argumentación precedente brinda un marco de referencia importante para la participación de los estudiantes y que, de esa forma, hasta puedan mejorar sus vocablos, pues pueden absorber la forma de escribir del “corpus de conocimiento” que operan los motores de razonamiento del ChatGPT, más allá de una mejor comprensión de la Matemática en sí misma, y consecuentemente, “la IA ofrece la capacidad de crear problemas que promueven el aprendizaje de matemáticas aplicadas y ofrecen una experiencia más significativa y relevante tanto para los estudiantes como para los educadores”, conforme a conclusiones de Marcel POCHULU.

En línea, la quinta micro-disertación, a mi cargo, “Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?”, a más de haber vertido conceptos que aquí he entrelazado con cada síntesis de las disertaciones respectivas, amén de las reflexiones ocurridas, considero oportuno indicar que, a priori, en el marco de este provocador Panel, la unidireccionalidad, que alguien daría como respuesta primaria, evidencia su descarte para los cinco disertantes, y en general, los mismos se inclinan al enriquecimiento mutuo en la comprensión, por tanto, dejan en evidencia, sus respectivos posicionamientos hacia la bidireccionalidad. Sin embargo, mi título, es más disruptivo, pues propende la búsqueda, ¿incesante?, de futuros procesos convergentes multidireccionales.

Explayándome en mis argumentaciones, y considerando que la IA, de por sí, fue nutrida, lo es, y... seguirá siéndolo,... por la Biología, en términos de la comprensión del ser humano, en su máxima expresión, desde el Cerebro, para estudiar su configuración, sus procesos, la convergencia y la optimización de procesos, modelos mentales, razonamiento y aprendizaje, desde distintas concepciones del Cerebro, en el planteo y la resolución de problemas con presencia de incertidumbre, en aras de mejorar la toma de Decisión Inteligente, desde la Inteligencia Artificial en la simulación de procesos de aprendizaje mediante modelos bio-inspirados, principalmente, tales como Redes Neuronales, Machine Learning, Deep Learning y Aprendizaje por Refuerzo, amén de la Teoría de Agentes y Multiagentes (Sagula, 2024), es menester sostener y proyectar en el mediano plazo que no tan sólo hay bidireccionalidad sino multidireccionalidad, pero mediante la convergencia de muchos procesos y disciplinas, evidenciando la necesidad de enfoque multimetodológicos, debido a la existencia de contextos de carácter interdisciplinario, en procura, en el curso de las acciones pertinentes, de contextos de carácter transdisciplinario, estas ideas permiten plasmar que en numerosas ocasiones se requieren soluciones provenientes de la transdisciplinariedad, y consecuentemente, es lógico pensar en procesos multidireccionales, en las distintas dimensiones posibles y/o plausibles.

Desde siempre, y bajo infinidad de hitos ha habido convergencia entre la Matemática y la Inteligencia Artificial, como quedó expresado previamente, no sólo en la Demostración Automática de Teoremas, en la Resolución de Problemas, en la Resolución de Juegos, en la Heurística, en la Metaheurística, en el Reconocimiento de Patrones en sus múltiples facetas, muchas de ellas en la actualidad de la IAG, en la Matemática Difusa, y en los sustentos de Machine Learning y Deep Learning, como muestras cruciales; por eso ya de por sí, la bidireccionalidad estaba implícita, mal que les pesara a algunos especialistas que se cerraban a estas evidencias. Muchos de estos conceptos se reflejan en (Sagula, 2021 (a)) y (Sagula, 2021 (b)).

Estos enfoques, permitieron producir la reflexión de “cómo se pueden nutrir la Educación Matemática y la Inteligencia Artificial”, aprendiendo uno de otro, pero la clave reside en evitar los sesgos, y potenciar la inteligencia natural en procura de mejorar la reabsorción cognitiva desde la más temprana edad posible. El sustento de estas Post-Memorias se refleja en (González, F; Villanueva Sánchez, G.; Nápoles Valdes, J.; Pochulu, M. y Sagula, J. E., 2024).

## Referencias Bibliográficas

Turing, Alan (1950). Computing Machinery Intelligence. *Mind*, Volume LIX, Issue 236, October 1950, Pp. 433-460.

Newell, A.; Shaw, J. C.; Simon, H. A. (1959). Report on a general problem-solving program. *Proceedings of the International Conference on Information Processing*. Pp. 256-264.

Newell, A. & Simon, H. A. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Sagula, Jorge E. (2021, (a)). Visión de la Educación Matemática en Convergencia con la Inteligencia Artificial en Contextos Complejos (Tiempos de Pandemia) (desde Big Data a Machine Learning). En *Memorias del I SEM-V-Tomo I (I Simposio de Educación Matemática-Virtual)*. Universidad Nacional de Luján. Luján, Provincia de Buenos Aires, Argentina; 13-14 agosto'2020. ISBN 978-987-3941-61-0. EDUNLU, Octubre'2021.

Sagula, Jorge (2021, (b)). La importancia creciente de la Heurística y la Metaheurística en la Resolución de Problemas. En *Memorias del II SEM-V-Tomo I*. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 13-14 mayo'2021. ISBN 978-987-3941-66-5. EDUNLU, Diciembre'2021.

González, F; Villanueva Sánchez, G.; Nápoles Valdes, J.; Pochulu, M. y Sagula, J. E. Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad o bidireccionalidad? [Video]. V Simposio en Educación Matemática (Virtual), Universidad Nacional de Luján, Argentina. 17 de Mayo de 2024. <https://www.youtube.com/watch?v=CzGRLOILXhs>

González, F; Villanueva Sánchez, G.; Nápoles Valdes, J.; Pochulu, M. y Sagula, J. E. Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad o bidireccionalidad? *Memorias del V Simposio en Educación Matemática (Virtual)*, Universidad Nacional de Luján, Argentina. EDUNLU, 16-17 de Mayo de 2024 (en proceso final de edición).

**Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
“Modelización y Resolución de Problemas”**

**Marcel David POCHULU<sup>(1, 2)</sup>, Juan NÁPOLES VALDES<sup>(3, 4)</sup>**

**<sup>(1)</sup>Universidad Nacional de Villa María, Argentina**

**<sup>(2)</sup>Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Villa María, Argentina**

**<sup>(3)</sup>Universidad Nacional del Noreste, Argentina**

**<sup>(4)</sup>Universidad Tecnológica Nacional-Facultad Regional Resistencia, Argentina**

**Resumen**

Aquí, exploramos la relevancia de la modelización matemática en la educación, subrayando su integración en el aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Se destaca el uso de la Inteligencia Artificial Generativa como una herramienta innovadora que facilita el diseño de tareas educativas más contextualizadas y pertinentes. Se analizan las aplicaciones de la modelización matemática tanto en contextos extramatemáticos, enfocándose en la resolución de problemas del mundo real, como en contextos intramatemáticos, centrados en la exploración de conceptos matemáticos abstractos. Se enfatiza en la necesidad de un enfoque interdisciplinario en la enseñanza de las matemáticas y en la evolución continua de la disciplina para abordar problemas complejos. El artículo, fruto de la reflexión en el Grupo de Trabajo-Discusión del V SEM-V “Modelización y Resolución de Problemas” concluye con una invitación a desarrollar modelos didácticos basados en la IAG y a considerar las implicaciones éticas y pedagógicas de su uso en el aula.

**Palabras clave:** Modelización matemática, Inteligencia Artificial Generativa, Educación matemática, Resolución de problemas.

## Introducción

El V Simposio de Educación Matemática-Virtual (V SEM-V), en su Grupo de Trabajo-Discusión GTD-1, abordó de manera integral la temática de “*Modelización y Resolución de Problemas*”, presentando un extenso espectro de enfoques y perspectivas sobre la modelización matemática. Este grupo se ha constituido como un foro privilegiado para la exposición de trabajos que ilustran dos visiones complementarias, aunque diferenciadas en la enseñanza y aplicación de las matemáticas, tomando como base los trabajos de Bassanezi (1994), Blomhøj (2004), Bosch *et al.* (2006), Cruz (2010), Molina-Mora (2017), Pochulu (2018), Romero (2011), Trigueros (2009), Villa-Ochoa (2009), entre otros

Las conferencias centrales, desarrolladas por Pochulu y Nápoles Valdés y las conferencias invitadas, a cargo de Camaño & Paccosi (2024), ofrecieron una visión dinámica y diversa sobre la integración de la modelización matemática en la educación contemporánea, destacando tanto las implicaciones teóricas como las aplicaciones prácticas. El Dr. Marcel Pochulu, en su conferencia titulada el “*Diseño de tareas de modelización con Inteligencia Artificial*”, exploró el potencial de las herramientas de Inteligencia Artificial Generativa (IAG) para crear tareas matemáticas que reflejan la complejidad y relevancia de los problemas del mundo real. Pochulu destacó la capacidad de la IAG para sugerir enfoques innovadores y superar dificultades en el diseño de tareas, subrayando, al mismo tiempo, la importancia del papel del educador en la adaptación de estas herramientas al contexto específico de cada aula. Este enfoque pone de relieve una tendencia hacia una enseñanza interdisciplinaria, donde las matemáticas se entrelazan con otras áreas del conocimiento y con herramientas tecnológicas avanzadas, ofreciendo así una experiencia de aprendizaje más contextualizada y efectiva; en tanto que, la conferencia del Dr. Juan E. Nápoles Valdés titulada “*Modelización Matemática y Aplicaciones*” profundizó en la naturaleza acumulativa y progresiva de la matemática, ilustrando cómo la modelización y las aplicaciones son inherentes al desarrollo de esta disciplina. Nápoles Valdés argumentó que la modelización matemática se integra naturalmente en la acumulación de conocimientos, donde, ocasionalmente, los investigadores deben desarrollar nuevas herramientas matemáticas para abordar problemas teóricos y prácticos. Este enfoque resalta el carácter estructural y evolutivo de la matemática, subrayando su condición de ciencia en constante expansión y adaptación.

Las disertaciones invitadas ampliaron aún más el debate sobre la modelización matemática, aportando perspectivas adicionales que enriquecieron la discusión. El Mg. Jaime Camaño, en su exposición sobre la “*Transformación de problemas en tareas de modelización matemática*”, ofreció un análisis didáctico de problemas extraídos de textos escolares y directrices educativas, transformándolos en actividades de modelización que conectan conceptos matemáticos con contenidos curriculares más amplios. Camaño enfatizó la importancia de hacer que las matemáticas sean relevantes y aplicables en la vida cotidiana de los estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda y significativa de la disciplina.

En contraste, el Dr. Rubén Gustavo Paccosi cuestionó la clasificación tradicional de las matemáticas como una ciencia formal en su disertación “*¿Estamos todos de acuerdo en que las matemáticas son formales?*”. Paccosi argumentó que, aunque las matemáticas son comúnmente vistas como una disciplina formal, existen aspectos como la estadística y ciertos métodos numéricos que tienen una base experimental significativa. Su exposición provocó una reflexión crítica sobre la naturaleza de las matemáticas y su relación con otros campos científicos, destacando la importancia de reconocer y valorar la diversidad metodológica dentro de la disciplina.

Las conferencias presentadas ofrecen claramente dos enfoques distintivos en la modelización matemática, reflejando las diferencias clásicas entre la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva aplicada y una más teórica. Los trabajos de Pochulu y Camaño están orientados hacia el uso de las matemáticas para entender y abordar problemas del mundo real, integrando herramientas contemporáneas como la Inteligencia Artificial Generativa (IAG) y promoviendo la vinculación de conceptos matemáticos con situaciones cotidianas y otros contenidos curriculares. Esto resalta una tendencia hacia una enseñanza más interdisciplinaria y contextualizada, donde las matemáticas se perciben no sólo como una disciplina autónoma, sino como una herramienta poderosa para la resolución de problemas en diversas áreas del conocimiento. En contraposición, las exposiciones de Paccosi y Nápoles Valdés se adentran en la naturaleza formal y teórica de las matemáticas, destacando su conexión inherente con otras disciplinas científicas y su desarrollo interno mediante la acumulación de conocimiento. Paccosi desafía la clasificación tradicional de las matemáticas como ciencia formal, argumentando que disciplinas como la estadística y ciertos aspectos

de la matemática aplicada, como los métodos numéricos, tienen una fuerte base experimental. Nápoles Valdés, adoptando un enfoque más tradicional, discute cómo la modelización y las aplicaciones matemáticas son parte natural del desarrollo progresivo y acumulativo de la matemática, especialmente cuando las herramientas matemáticas necesarias aún deben ser creadas o adaptadas por el propio investigador.

Estos dos enfoques, aunque distintos, convergen en la importancia de las matemáticas como disciplina esencial tanto para la resolución de problemas prácticos como para el avance teórico. Sin embargo, lo que parece no haber sido ampliamente discutido en estas conferencias, y que podría ser un punto crucial para la enseñanza de las matemáticas, es cómo integrar en forma más efectiva estos dos enfoques en la educación matemática. La dicotomía entre matemáticas puras y aplicadas, frecuentemente, conduce a una fragmentación en la formación de los estudiantes, especialmente en contextos donde las matemáticas son enseñadas a futuros profesionales de otras disciplinas. Una cuestión relevante, pero no abordada, reside en cómo lograr que los estudiantes no sólo adquieran habilidades técnicas y conceptuales profundas en matemáticas, sino que también desarrollen la capacidad de aplicar este conocimiento de manera efectiva y creativa en contextos interdisciplinarios, respondiendo así a las demandas del mundo moderno.

Este simposio no sólo ha permitido la presentación de estas distintas perspectivas, sino que también ha facilitado un rico debate sobre las implicancias y aplicaciones de la modelización matemática en diversos contextos. En las secciones siguientes, se abordarán en profundidad las discusiones surgidas en torno a la modelización matemática en contextos extramatemáticos, tal como fue explorada por Pochulu y Camaño, quienes han mostrado cómo la integración de herramientas tecnológicas y enfoques innovadores puede transformar la enseñanza de las matemáticas, haciéndola más relevante y aplicable para los estudiantes. Seguidamente se realizará un análisis exhaustivo sobre las propuestas de Nápoles Valdés y Paccosi, quienes han examinado la modelización desde una perspectiva intramatemática, centrándose en cómo esta práctica contribuye al desarrollo interno de la matemática y a la resolución de problemas teóricos complejos.

Finalmente, se presentará una sección dedicada a identificar y discutir los puntos de encuentro entre estos enfoques aparentemente dispares. Se analizará cómo las metodologías propuestas por ambos grupos de investigadores pueden ser complementarias y cómo la integración de perspectivas extramatemáticas e intramatemáticas en la enseñanza y aplicación de la modelización matemática podría abrir nuevas vías para la investigación y la educación matemática. Estas discusiones no sólo buscarán sintetizar las ideas presentadas en el simposio, sino también proponer líneas de investigación futuras que profundicen y amplíen el debate, con el fin de enriquecer la práctica educativa y el desarrollo teórico de la matemática.

## **La modelización matemática como línea de investigación**

La modelización matemática se ha consolidado como una línea de investigación clave en el ámbito de la educación matemática, no exclusivamente por su capacidad para representar fenómenos complejos mediante modelos matemáticos, sino también por su profundo impacto en el desarrollo del pensamiento crítico y creativo de los estudiantes. A diferencia de la resolución tradicional de problemas o ejercicios, la modelización matemática implica un proceso más profundo y riguroso en el que el planteamiento, la exploración y la resolución de problemas adquieren una dimensión dinámica y abierta. Este enfoque no se limita a la mera aplicación de modelos preexistentes; exige la construcción activa de modelos que capturen la esencia de situaciones reales o puramente matemáticas, y así se permite una reflexión más profunda sobre los contextos y las suposiciones involucradas.

En la enseñanza tradicional, la resolución de ejercicios generalmente se basa en problemas cerrados, con objetivos y estrategias de resolución predefinidos. Este proceso tiende a centrarse en la aplicación de técnicas o fórmulas conocidas, ofreciendo a los estudiantes una experiencia de aprendizaje estructurada, pero limitada en términos de exploración creativa. Incluso en la resolución de problemas, donde se promueve una mayor autonomía y exploración, el enfoque principal sigue siendo encontrar una solución dentro de un marco matemático ya establecido. En contraste, la modelización matemática trasciende estas prácticas al involucrar a los estudiantes en un proceso de creación y adaptación de modelos, que no aborda solamente problemas específicos, sino que también facilita una comprensión más amplia y contextualizada del fenómeno en estudio.

La importancia de la modelización matemática se manifiesta en todos los niveles educativos, desde la educación primaria hasta la universitaria, contribuyendo de manera significativa al desarrollo de

competencias fundamentales. A lo largo del proceso de modelización, los estudiantes adquieren habilidades cruciales, como la identificación de variables relevantes, la formulación de hipótesis y la realización de abstracciones, todas esenciales para construir modelos matemáticos que reflejen de manera precisa y efectiva los fenómenos observados. Este enfoque no sólo fortalece la comprensión matemática, sino que también dota a los estudiantes de herramientas indispensables para abordar problemas en otras disciplinas, como la economía, la física o la biología, en las cuales los modelos matemáticos son fundamentales para la comprensión y predicción de fenómenos.

El ciclo de modelización matemática, adaptado de Pochulu (2018) [ver Figura 1], comienza con la **contextualización del problema**, en la que se presenta una situación real o problemática que los estudiantes deben comprender e interpretar. A partir de ahí, se pasa a la **identificación de variables y supuestos**, donde los estudiantes determinan las variables clave que afectan al problema y establecen los supuestos necesarios para simplificar la situación. Luego, se realiza la **formulación del modelo matemático**, donde se crea un modelo que represente la situación utilizando ecuaciones, funciones, gráficos, o diagramas. Tras la formulación del modelo, se procede al **análisis y resolución del modelo**, en la que se resuelve matemáticamente y se analizan los resultados obtenidos, evaluando su coherencia con la situación original. Luego, en la etapa de **interpretación de resultados**, los estudiantes traducen estos resultados matemáticos al contexto del problema inicial, interpretando su significado en el mundo real. Si es necesario, se efectúa la **validación y refinamiento del modelo**, donde se evalúa la validez del mismo y se ajusta conforme a la necesidad, repitiendo el proceso en el caso que corresponda.

Finalmente, el ciclo culmina con la **comunicación y la reflexión**, donde se presentan y discuten los resultados y el proceso de modelización, reflexionando sobre lo aprendido y considerando las posibles aplicaciones del modelo en otros contextos. En este ciclo de modelización se destaca la naturaleza iterativa del proceso, que permite ajustes continuos y una comprensión cada vez más profunda del problema y de su solución.



**Figura 1:** Ciclo de Modelización Matemática

Un aspecto crucial de la modelización matemática es la distinción entre modelización en contextos extramatemáticos e intramatemáticos. La modelización extramatemática se refiere a la aplicación de herramientas matemáticas para resolver problemas en contextos no matemáticos, como aquellos que surgen en la economía, la biología, o la ingeniería. Este tipo de modelización requiere no sólo la aplicación de un modelo matemático, sino también una consideración cuidadosa de las particularidades del contexto, lo que implica hacer supuestos razonables y adaptar el modelo a la realidad que se intenta representar. En este sentido, la modelización extramatemática es un puente entre las matemáticas y el mundo real, permitiendo que los estudiantes apliquen sus conocimientos en situaciones prácticas y contextuales.

Aquí, el proceso no está necesariamente vinculado a un contexto externo, sino que busca explorar y expandir las fronteras del conocimiento matemático en sí. La modelización intramatemática, por tanto, tiene un enfoque más introspectivo, donde se desarrollan nuevos conceptos, técnicas y teorías que enriquecen el campo matemático.

Independientemente del contexto en que se aplique, la modelización matemática no se reduce a un simple ejercicio de aplicación de modelos conocidos. Al contrario, implica un proceso iterativo y creativo que demanda una forma de pensamiento divergente. Los pasos fundamentales de este proceso incluyen delimitar el problema a un nivel manejable, formular preguntas clave que orienten la investigación, seleccionar casos particulares para explorar soluciones, desarrollar y probar estrategias, y replantear el problema con nuevos datos o enfoques. Esta metodología promueve tanto el pensamiento crítico como el pensamiento creativo, al tiempo que prepara a los estudiantes para enfrentar problemas complejos y multifacéticos, tanto en el ámbito académico como en la vida cotidiana misma.

En este sentido, la modelización matemática se convierte en una herramienta indispensable en la educación matemática moderna, no sólo porque refuerza la comprensión de los conceptos matemáticos, sino porque fomenta habilidades cognitivas, fundamentales en la formación de pensadores críticos y creativos. A medida que los estudiantes se enfrentan a problemas abiertos que no convergen en una única solución, desarrollan competencias que trascienden las matemáticas y los preparan para enfrentar los desafíos del mundo real con confianza y creatividad. Esta riqueza metodológica y conceptual hace de la modelización matemática un campo de investigación dinámico y en expansión, con un impacto significativo en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En las secciones siguientes, se explorará con mayor detalle cómo la modelización matemática se manifiesta en diferentes contextos, comenzando con una discusión sobre su aplicación en contextos extramatemáticos, tal como lo han propuesto los investigadores Pochulu y Camaño. Posteriormente, se abordará la modelización en contextos intramatemáticos, siguiendo los aportes de Nápoles Valdes y Paccosi. Finalmente, se presentará una reflexión sobre los puntos de encuentro entre ambos enfoques, destacando las perspectivas y líneas de investigación que ameritan ser profundizadas para avanzar en la comprensión y enseñanza de la modelización matemática.

## **La modelización extramatemática**

De las intervenciones realizadas por Pochulu y Camaño emerge un entendimiento renovado sobre la importancia de contextualizar la enseñanza de la matemática mediante la modelización y la aplicación de IAG, a fin de fortalecer las competencias matemáticas y cognitivas de los estudiantes. Ambos investigadores subrayan que la enseñanza de la matemática debe trascender la mera memorización de algoritmos para enfocarse en el desarrollo de habilidades de resolución de problemas en contextos reales, una visión que se alinea con las tendencias actuales en educación matemática.

Pochulu enfatiza en cómo la IAG puede enriquecer el proceso de diseño de tareas educativas, permitiendo a los docentes crear problemas que no sólo son matemáticamente rigurosos, sino también relevantes para los contextos específicos de los estudiantes. Este enfoque promueve un aprendizaje más significativo, pues conecta los conceptos matemáticos con situaciones prácticas y cotidianas. Por su parte, Camaño destaca la transformación de problemas matemáticos tradicionales en actividades de modelización, que no sólo facilita la comprensión de conceptos complejos, sino que también integra las matemáticas con otras disciplinas, fortaleciendo el aprendizaje interdisciplinario.

El conocimiento emergente de ambas conferencias sugiere varias líneas de investigación y práctica que pueden profundizarse en futuros estudios:

*Desarrollo de modelos didácticos basados en IAG:* Explorar cómo la IAG puede ser utilizada en forma más efectiva en el diseño de tareas y en la evaluación formativa de las competencias matemáticas. Esto incluye la investigación sobre cómo la IAG puede personalizar el aprendizaje y adaptarse a las necesidades individuales de los estudiantes.

*Modelización matemática como herramienta interdisciplinaria:* Ampliar la aplicación de la modelización matemática a otros campos del saber, allende las matemáticas puras, para abordar problemas complejos en contextos interdisciplinarios. Esto implica desarrollar metodologías que integren la modelización en

currículos más amplios, conectando la matemática con las ciencias en general, y otras áreas del conocimiento.

*Evaluación crítica del uso de la IAG en el aula:* Investigar las implicaciones éticas y pedagógicas del uso de IAG en la educación matemática. Es crucial comprender cómo la introducción de IAG en el aula afecta el papel del docente y la autonomía de los estudiantes en el proceso de aprendizaje.

*Implementación de tareas de modelización en diversos contextos educativos:* Profundizar en cómo las tareas de modelización pueden ser adaptadas a diferentes contextos educativos y niveles académicos, desde la educación primaria hasta la superior, asegurando que estas tareas sean accesibles y significativas para todos los estudiantes.

Además, el análisis de las conferencias de Pochulu y Camaño revela un movimiento hacia una enseñanza de la matemática que no sólo es contextualizada y relevante, sino también apoyada por tecnologías emergentes como la inteligencia artificial. Este enfoque tiene el potencial de transformar la educación matemática, haciendo que el aprendizaje sea más significativo y aplicable a la vida real; sin embargo, para aprovechar plenamente estas oportunidades, es necesario continuar investigando y desarrollando prácticas pedagógicas que integren la modelización y la IAG de manera efectiva y ética.

Por ejemplo, consideremos un problema de modelización extramatemática cuyo objetivo es determinar el precio de un producto en un mercado donde no se emiten tickets de compra. Para abordar este problema, es esencial hacer suposiciones precisas y recortar a casos particulares para facilitar la comprensión. Primero, debemos decidir si compramos productos con precio unitario, como una caja de leche o un paquete de galletas, o si adquirimos productos que se venden por peso, como verduras o frutas. En este último caso, el cliente tendría que recordar con exactitud la cantidad comprada en cada ocasión (por ejemplo, 1.25 kg o 525 gramos), ya que, sin esa información, no sería posible determinar el precio unitario en compras posteriores.

Supongamos que en la primera compra se adquieren dos productos diferentes. Si queremos inferir el precio de cada uno, podríamos realizar una segunda compra donde solo adquiriésemos uno de los productos, sin importar la cantidad, esto nos permitiría calcular su precio unitario. Una vez conocido este precio, podemos retroceder a la primera compra para deducir el precio del otro producto. Esta estrategia depende de suposiciones clave: que los precios permanezcan constantes entre compras y que no haya promociones que alteren el precio por la cantidad adquirida. Otra opción posible es comprar los dos productos nuevamente, pero con una condición: no debemos adquirir la misma cantidad de ambos productos ni cantidades que sean múltiplos exactos de las cantidades de la compra anterior, pues esto impediría la resolución del sistema de ecuaciones necesario para determinar los precios unitarios.

Este desarrollo detallado, pensado inicialmente para dos productos, abre la puerta a una exploración más amplia: ¿qué sucede si adquirimos tres productos? ¿Cómo afecta el número de compras que realizamos (dos, tres o más) a la posibilidad de resolver el sistema? Aquí es donde se revela la naturaleza del problema: se trata de un caso de sistemas de  $n$  ecuaciones con  $m$  incógnitas, donde las estrategias de modelización deben adaptarse para hallar una solución viable. Este proceso no sólo ilustra la aplicación práctica de la modelización matemática, sino que también refleja la necesidad de un pensamiento flexible y adaptativo al enfrentar problemas reales con múltiples variables y restricciones.

## **La modelización intramatemática**

La modelización matemática intramatemática se enfoca en la construcción y el análisis de modelos dentro del propio ámbito de las matemáticas, sin dirigir su atención a la representación o resolución de problemas del mundo real. Este enfoque busca investigar y comprender la estructura, el comportamiento y las propiedades de los objetos matemáticos en sí mismos, ofreciendo una comprensión más profunda de conceptos abstractos y sentando una sólida base para el desarrollo de teorías matemáticas.

En este contexto, la modelización no sólo constituye una herramienta pedagógica, sino que también se convierte en un proceso que potencia la exploración rigurosa de conceptos matemáticos, como ocurre, por ejemplo, en el estudio de funciones polinómicas. Aquí, la modelización permite analizar cómo los parámetros de una función afectan su gráfica y propiedades, lo que conduce a una comprensión más

profunda de los conceptos subyacentes. Este enfoque es esencial para que los estudiantes no sólo adquieran habilidades técnicas, sino que también desarrollen una apreciación más robusta y crítica de la matemática.

Diversos investigadores han subrayado la importancia de este tipo de modelización para mejorar tanto la enseñanza como el aprendizaje de las matemáticas puras. En la conferencia de Nápoles Valdes, se aborda la modelización matemática como un proceso que está íntimamente relacionado con el desarrollo natural de las matemáticas. Nápoles introduce tres modos de desarrollo matemático: acumulación progresiva, escalonada y en cortaduras, destacando la acumulación progresiva como el entorno más propicio para la modelización y sus aplicaciones. Este modo, caracterizado por la construcción continua y estable del conocimiento matemático sobre cimientos ya establecidos, es crucial para la creación de modelos precisos y su aplicación en la resolución de problemas tanto prácticos como teóricos.

Un ejemplo relevante de este enfoque es el Cálculo Fraccionario, una rama de la matemática que, a pesar de su complejidad, ha alcanzado un nivel de madurez que permite su aplicación en diversos campos. La modelización en el Cálculo Fraccionario demuestra cómo la acumulación progresiva de conocimiento no sólo ha facilitado la comprensión de fenómenos complejos, sino que también ha permitido la solución de problemas reales.

Por su parte, Pacossi, a su turno, resalta la modelización matemática como un puente entre la teoría y la aplicación práctica. Subraya la utilidad de las simulaciones computacionales en la interpretación y expansión de teorías matemáticas formales, como por caso, las derivadas fraccionarias. Pacossi argumenta que la modelización no sólo permite resolver problemas predefinidos, sino que también facilita el descubrimiento de nuevas propiedades matemáticas, pudiendo dar lugar al desarrollo de teorías más amplias y comprensivas.

Ambas perspectivas subrayan la importancia de la modelización matemática intramatemática no sólo como una metodología para resolver problemas complejos, sino también como un proceso generador de nuevas teorías. La acumulación progresiva de conocimiento matemático, defendida por Nápoles, y la integración de herramientas computacionales en la modelización, promovida por Pacossi, destacan cómo este enfoque intramatemático puede transformar la forma en que entendemos y aplicamos conceptos matemáticos tradicionales.

El análisis conjunto de las actividades y resultados obtenidos de los trabajos expuestos por Nápoles Valdes y Pacossi sugieren varias líneas de investigación y desarrollo que podrían explorarse en estudios futuros:

*Desarrollo de estrategias didácticas centradas en la modelización intramatemática:* Profundizar en la creación de tareas y actividades que utilicen la modelización matemática como un medio para fortalecer el pensamiento abstracto y algebraico. Esto incluye la elaboración de consignas que desafíen a los estudiantes a formular y resolver problemas exclusivamente dentro del ámbito matemático, sin depender de contextos externos, para así fomentar una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

*Integración de la modelización intramatemática en el currículo escolar:* Investigar cómo la modelización intramatemática puede ser incorporada en forma coherente y progresiva en los diferentes niveles educativos. Esto implica el diseño de secuencias didácticas que permitan a los estudiantes construir gradualmente su capacidad de modelizar situaciones puramente matemáticas, asegurando una continuidad en su formación desde la educación básica hasta la superior.

*Evaluación de la eficacia de la modelización intramatemática en el desarrollo de competencias matemáticas:* Estudiar el impacto de las tareas de modelización intramatemática en el desarrollo de habilidades específicas, como la resolución de problemas, el razonamiento lógico, y la argumentación matemática. Es importante determinar en qué medida estas tareas contribuyen al fortalecimiento de competencias clave en matemáticas y cómo pueden ser evaluadas en forma efectiva en distintos contextos educativos.

*Adaptación de la modelización intramatemática a diferentes estilos de aprendizaje:* Explorar cómo las tareas de modelización pueden ser adaptadas para atender a la diversidad de estilos de aprendizaje entre los estudiantes. Esto incluye el desarrollo de materiales y enfoques pedagógicos que permitan a todos los estudiantes, independientemente de sus preferencias cognitivas, participar activamente en la modelización matemática y beneficiarse de ella.

Además, el análisis de la implementación de la modelización intramatemática en el aula sugiere que esta práctica no sólo promueve una comprensión más sólida de las matemáticas, sino que también desarrolla habilidades transferibles que los estudiantes pueden aplicar en otros dominios del saber. La modelización intramatemática ofrece una oportunidad única para que los estudiantes se enfrenten a problemas que requieren un alto grado de abstracción y rigor lógico, preparando así a los futuros profesionales para enfrentar desafíos complejos en su vida académica y profesional. No obstante, para maximizar el impacto de esta metodología, es esencial continuar investigando cómo se puede integrar en forma más efectiva en los planes de estudio y cómo se puede apoyar a los docentes en su implementación.

Consideremos una instancia de modelización matemática en un contexto intramatemático donde se requiere a los estudiantes analizar la influencia de diferentes parámetros en la representación gráfica de una función polinómica. En este tipo de problema, es fundamental caer en casos particulares para facilitar la comprensión y profundizar en el análisis de las propiedades gráficas.

Comencemos con el caso más sencillo: las funciones lineales. Aquí, la influencia del coeficiente principal (pendiente) y del término independiente (intersección con el eje de ordenadas) es relativamente fácil de observar y comprender. La pendiente determina la inclinación de la recta, en tanto que el término independiente define su desplazamiento vertical. Este análisis inicial brinda a los estudiantes una base sólida para explorar funciones más complejas. Al avanzar hacia funciones cuadráticas, cúbicas, y polinomios de grado superior, el análisis se vuelve más desafiante. Aunque el coeficiente principal sigue siendo un determinante clave en la forma de la gráfica (afectando la concavidad en el caso de funciones cuadráticas, por ejemplo), la influencia de los coeficientes de los términos de grado inferior es menos evidente. Por ejemplo, el coeficiente del término lineal en una función cuadrática no afecta solamente la inclinación de la parábola, sino que también influye en la posición de su vértice. Análogamente, en una función cúbica, los coeficientes de los términos cuadrático y lineal interactúan de formas complejas para afectar los puntos de inflexión y la curvatura general de la gráfica.

La validación matemática de estas observaciones puede resultar compleja, especialmente en un contexto de escuela secundaria, donde las estrategias de validación y demostración no están completamente desarrolladas. Los estudiantes podrían enfrentar dificultades para formalizar sus conclusiones mediante argumentos rigurosos o demostraciones algebraicas, lo que subraya la importancia de abordar estos problemas de manera visual e intuitiva, utilizando gráficos y experimentación para explorar cómo los diferentes coeficientes alteran la forma de la gráfica.

A pesar de estas dificultades, este es un destacado ejemplo de un problema abordable desde la modelización matemática en un contexto intramatemático. Al guiar a los estudiantes a través del proceso de identificación de variables, formulación de suposiciones y análisis de resultados, se fomenta un pensamiento matemático profundo y una comprensión más rica de las funciones polinómicas. Además, la naturaleza iterativa del ciclo de modelización permite a los estudiantes refinar sus modelos y mejorar su comprensión, construyendo un puente entre el conocimiento abstracto y su aplicación concreta.

Al trasladar el enfoque de la modelización matemática a un nivel universitario, la complejidad y el rigor se incrementan significativamente, como en el caso del análisis de la convergencia de series infinitas. En este contexto, los estudiantes, que podrían ser licenciados en matemáticas, ingenieros o de carreras afines, deben abordar el problema partiendo de la definición formal de convergencia, utilizando herramientas avanzadas como el criterio de comparación o el criterio del cociente. A medida que profundizan en el análisis, se enfrentan a la necesidad de identificar patrones y formular conjeturas sobre el comportamiento de la serie. Estas conjeturas no sólo deben ser rigurosamente probadas utilizando conceptos de análisis matemático, sino que también deben ser interpretadas en términos de su significado matemático más amplio.

Este tipo de actividad no sólo refuerza la comprensión de los estudiantes sobre la teoría de series, sino que también les permite aplicar el razonamiento lógico de manera autónoma y estructurada. Además, el proceso de modelización en este contexto requiere una validación matemática exhaustiva, donde las demostraciones y el uso de teoremas se convierten en herramientas esenciales para justificar los resultados obtenidos. En este nivel, la modelización matemática deja de ser un ejercicio puramente teórico para convertirse en una herramienta potente para abordar problemas complejos que pueden surgir en diversas áreas de la ciencia y la ingeniería. Así, los estudiantes no sólo desarrollan una comprensión profunda de la materia, sino que también adquieren habilidades valiosas para aplicar su conocimiento en situaciones nuevas y desafiantes.

## Convergencias y perspectivas en modelización matemática

La convergencia entre la modelización matemática extramatemática e intramatemática no solo enriquece la comprensión de las matemáticas, sino que también abre nuevas vías para la investigación y la enseñanza. Estos enfoques, a primera vista divergentes, encuentran un terreno común en la capacidad de la modelización para integrar y contextualizar conocimientos matemáticos en problemas reales y teóricos. Mientras que la modelización extramatemática se centra en aplicar las matemáticas a situaciones del mundo real, facilitando la resolución de problemas complejos en disciplinas como la economía o la biología, la modelización intramatemática profundiza en el desarrollo interno de la disciplina, explorando conceptos abstractos y ampliando los límites del conocimiento matemático.

El reconocimiento de estas convergencias es fundamental para superar la dicotomía tradicional entre matemáticas puras y aplicadas, que a menudo resulta en una fragmentación del conocimiento y en una educación matemática limitada a la repetición de ejercicios aislados. Este enfoque tradicional, basado en el uso de lápiz y papel para realizar cálculos y aplicar definiciones, puede limitar la capacidad de los estudiantes para aplicar lo aprendido a contextos más amplios y relevantes. En cambio, la integración de estos enfoques de modelización ofrece una visión más holística, donde la matemática se convierte en una herramienta poderosa y flexible para abordar una amplia gama de problemas, tanto dentro como fuera de la disciplina.

La interacción entre la modelización matemática extramatemática, intramatemática e Inteligencia Artificial Generativa (Figura 2) en la enseñanza y la investigación de las matemáticas ilustra una convergencia profundamente enriquecedora. La modelización extramatemática se centra en la aplicación práctica de conceptos matemáticos para resolver problemas del mundo real, como los que surgen en la economía o la biología. Por otro lado, la modelización intramatemática explora el desarrollo interno de la disciplina, indagando en conceptos abstractos y teóricos que amplían los límites del conocimiento matemático. La integración de la IAG en estos enfoques transforma la enseñanza y la investigación, proporcionando herramientas que generan experiencias de aprendizaje personalizadas y adaptativas. Al combinar estos tres elementos, se crea un ecosistema donde los conceptos matemáticos abstractos no sólo se aplican a problemas reales, sino que también se enriquecen mediante el uso de tecnologías avanzadas. Esta interacción fomenta una educación matemática más holística y dinámica, en la que la teoría y la práctica se entrelazan, permitiendo a los estudiantes y a los investigadores explorar y entender las matemáticas de manera más profunda y contextualizada. Además, la IAG facilita la creación de tareas educativas que conectan teoría y práctica de forma innovadora, abordando problemas complejos y promoviendo un aprendizaje que trasciende la repetición de procedimientos aislados.



**Figura 2:** Interacción entre Modelización Matemática e Inteligencia Artificial Generativa

La incorporación de tecnologías avanzadas, como la IAG, promete revolucionar aún más la práctica de la modelización matemática. La IAG no sólo facilita la creación de tareas educativas que son tanto rigurosas

como relevantes para los estudiantes, sino que también permite diseñar experiencias de aprendizaje adaptativas y personalizadas. Este potencial transformador plantea nuevas preguntas para la investigación y la práctica educativa: ¿Cómo podemos integrar efectivamente la IAG en la enseñanza de las matemáticas sin desvirtuar el papel fundamental del educador? ¿De qué forma podemos utilizar estas herramientas para trascender los errores clásicos de la enseñanza de las matemáticas, que frecuentemente, se centra en la memorización de algoritmos y la aplicación mecánica de procedimientos?

Las respuestas a estas preguntas no sólo definirán el futuro de la educación matemática, sino que también determinarán cómo preparar a las próximas generaciones para enfrentar los desafíos de un mundo en constante cambio. La modelización matemática, en sus múltiples formas, tiene el potencial de convertirse en el eje central de una educación matemática más dinámica, relevante e interdisciplinaria. Para lograrlo, es necesario continuar investigando cómo combinar las fortalezas de la modelización extramatemática e intramatemática, y cómo incorporar de manera ética y efectiva las tecnologías emergentes en la enseñanza. Este camino no está exento de desafíos, pero ofrece una oportunidad única para transformar la forma en que entendemos y enseñamos las matemáticas, posibilitando que esta disciplina no sea solamente una ciencia del cálculo, sino también una herramienta esencial para la innovación y la resolución de problemas en el siglo XXI.

### **Referencias Bibliográficas**

Bassanezi, R. (1994). Modelling as a teaching-learning strategy. *For the Learning of Mathematics*, 14(2), 31-35.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, 1, 145-159.

Bosch, M., García, F. J., Gascón, J., & Ruiz Higuera, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar: Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, 18(2), 37-74.

Cruz, C. (2010). La enseñanza de la modelación matemática en ingeniería. *Revista de la Facultad de Ingeniería*, 25(3), 39-46.

Molina-Mora, J. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2).

Pochulu, M. (Comp.). (2018). *La modelización matemática: Marco de referencia y aplicaciones*. GIDED - UNVM.

Pochulu, M. D., Nápoles Valdes, J., Camaño, J. & Pacossi, G. (2024, mayo 16-17). *Modelización y Resolución de Problemas* [Video]. V Simposio en Educación Matemática (Virtual), Universidad Nacional de Luján. <https://www.youtube.com/live/bwZ0RPBRQyk?si=LTociB64as4BUQvM&t=7656>

Romero, S. (2011). La resolución de problemas como herramienta para la modelización matemática. *Modelling in Science Education and Learning*, 4(5), 71-82. <http://dx.doi.org/10.4995/msel.2011.3054>

Trigueros, M. (2009). El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas. *Innovación Educativa*, 9(46), 75-87.

Villa-Ochoa, J. A. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 27, 1-21.

**Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
“Didáctica Matemática”**

**Mabel RODRÍGUEZ<sup>(1)</sup>, Estefanía CALVO<sup>(2)</sup>,  
Gustavo CARNELLI<sup>(3)</sup>, Fabián ESPINOZA<sup>(4)</sup>**

**<sup>(1), (3)</sup>Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina**

**<sup>(2)</sup>Universidad Nacional de Villa María, Argentina**

**<sup>(4)</sup>Universidad Nacional del Nordeste, Argentina**

**Resumen**

Este artículo se enmarca en las Post-Memorias V SEM-V, pertenecientes al GTD “Didáctica Matemática”, revisitando tres exposiciones presentadas en el seno del GTD; las bases de las mismas forman parte de las Memorias del V-SEM-V, conforme documenta el video de la presentación en vivo realizada, presentando tres propuestas de enseñanza de la matemática (una, para el nivel medio y las restantes, para el nivel superior, una de ellas enmarcada en la formación inicial de profesores de matemática y la otra, correspondiente a una instancia de desarrollo profesional que tuvo como destinatarios docentes de matemática que ejercen en el nivel superior). ¿Por qué se plantea la revisitación? Porque como fruto de la integración y las reflexiones generadas, se plantea un encuadre de cada propuesta en un modelo que permite identificar y explicitar detalles con respecto a las tareas docentes, similares en estructura, pero de naturaleza diferente, desarrolladas por el docente conforme al rol asumido.

Referimos en todo momento a las presentaciones individuales, aunque para que el texto resulte autocontenido, presentamos inicialmente una muy breve descripción del modelo aludido, para luego exponer detalles de cada experiencia en términos de los elementos del modelo.

**Palabras clave:** Formación inicial de profesores de matemática, Modelo de planos de la formación Enseñanza de la matemática a nivel medio, Desarrollo profesional docente

## Introducción

Este escrito corresponde a las Post-Memorias del Grupo de Trabajo y Discusión “Didáctica Matemática” como fruto de los intercambios y reflexiones que se dieron contextualmente. En esta actividad fueron presentados aportes a la enseñanza de la matemática para distintos niveles del sistema educativo formal. En cuanto a nivel medio compartimos una experiencia para contenidos de Geometría con uso de recursos tecnológicos (Calvo, 2024). En el nivel superior, particularmente para la formación inicial de profesores, retomamos la propuesta para una materia inicial de Álgebra (Carnelli, 2024), describiendo un aporte específico sobre la inclusión de la lógica en ella. Finalmente, describimos la experiencia en un espacio de desarrollo profesional docente con asistentes docentes de nivel superior (Espinoza, 2024). Además, en las disertaciones se consignó el acercamiento a un modelo que permite explicitar el tipo de trabajo que los docentes realizan en función del rol que ejerce (Rodríguez, 2024).

Las contribuciones de los profesores Calvo, Carnelli y Espinoza corresponden a distintos roles. Así, este escrito revisita sus contribuciones a la luz del modelo mencionado y de los intercambios y reflexiones producidas. Entendemos que el aporte ofrecido por este artículo es explicitar cómo cada experiencia docente, que pueden conocerse detalladamente, accediendo a las referencias indicadas, permite comprender los distintos elementos del modelo.

## Modelo de planos de la formación de profesores de matemática

El *modelo de planos de la formación de profesores de matemática* (Rodríguez et al., 2019) permite identificar los distintos momentos de trabajo que un docente debería transitar cuando asume distintos roles en su trabajo profesional. El rol que suele regir la formación inicial es “enseñar matemática a nivel medio”. Sin embargo, el campo laboral habilita a que los docentes asuman responsabilidades que cambian sustantivamente el tipo de trabajo con respecto al cual fueron formados. Basta imaginar un rol de capacitador en matemática o en educación matemática, formador de maestros, formador de profesionales, entre otros.

Evitando ser reiterativos, invitamos a los lectores a revisar la referencia citada, así como la presentación en el V SEM-V que está videograbada (Rodríguez, 2024), y estará publicada en las Memorias del V SEM-V.

Resaltamos aquí que los cinco momentos de trabajo: identificación de posicionamientos y metas (PM), programación de la enseñanza (P), diseño de instrumentos metodológicos (IM), gestión de la clase (G) y reflexión (R), si bien se mantienen en cada uno de los planos, cobran sentidos muy diferentes, conforme en cuál de ellos nos desempeñemos.

La Figura 1 muestra la estructura común en cada plano y la notación empleada para cada uno de los mencionados momentos acompañado de un número que indica en qué plano se realiza.

**Figura 1.** Estructura del modelo de planos con las abreviaturas utilizadas (Rodríguez, 2024)



En lo sucesivo, retomamos las presentaciones correspondientes a las 3 conferencias invitadas, enmarcadas en términos del modelo de planos; previamente, adicionamos un breve encuadre a fin de situar cada propuesta.

## **Un ejemplo de enseñanza de la matemática para el nivel medio (Plano 1)**

### **Encuadre**

En el año 2017 se creó la escuela ProA con orientación en software, que funciona dentro del campus de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN), Facultad Regional Villa María, Provincia de Córdoba. En la misma existen dos divisiones en cada curso, aproximadamente con 30 estudiantes cada uno, provenientes de distintas escuelas primarias de la ciudad. La mayor parte del estudiantado pertenece a una clase social media, media-baja y tienen una potencialidad de aprendizaje heterogéneo en todos los espacios curriculares. Así, unos pocos estudiantes se destacan, otros llevan todas sus materias al día y un gran porcentaje no ha logrado aún los aprendizajes esperados, no siendo tan responsables a la hora de cumplir con las tareas como se requiere y es muy difícil motivarlos para que trabajen. Desde la institución se promueve un seguimiento personalizado que guarda el rastro de las dificultades que aquí se señalan.

En este contexto, y sabiendo que los resultados obtenidos en matemática en estudios y programas regionales e internacionales de evaluación de los aprendizajes son negativos, buscamos innovar mediante una secuencia didáctica en el espacio curricular Matemática, más específicamente en el área de Geometría, en segundo año.

El proyecto ha tenido diferentes etapas que buscan responder distintas preguntas, entre las que señalamos:

- ¿Cómo integrar recursos tecnológicos en el aula para lograr que los estudiantes aprendan en forma autónoma y entretenida?
- ¿Cómo ayudan las TIC a comprender conceptos y propiedades en relación con Geometría?
- ¿De qué forma los nuevos recursos y el trabajo colaborativo potencian las competencias matemáticas y de trabajo en equipo en los estudiantes?

### **La propuesta desde el modelo de planos**

El rol del docente de matemática en la escuela secundaria requiere establecer metas educativas basadas en los diseños curriculares y en otros conocimientos relevantes. Estas metas pueden ser tanto académicas (conocimientos y habilidades matemáticas) como actitudinales (actitudes hacia el trabajo en matemática). Para lograr estas metas, el docente debe planificar su enseñanza y seleccionar o diseñar herramientas didácticas adecuadas. Luego, debe implementar estas actividades en el aula con estudiantes reales, gestionando la dinámica de la clase.

Es crucial que el docente reflexione sobre su práctica educativa, evalúe el impacto de su enfoque y ajuste sus métodos en base a la necesidad. Este proceso de reflexión continua permite al docente mediar entre los resultados obtenidos y los objetivos planteados desde la enseñanza. Se espera que esta reflexión conduzca a mejoras en la planificación, los métodos pedagógicos utilizados y la gestión del aula, adaptándolos mejor a las necesidades y características específicas de los estudiantes de nivel secundario.

En el Plano 1 del trabajo del profesor, se establecen metas educativas para estudiantes de nivel medio, se planifica la enseñanza, se diseñan actividades, se implementa y se reflexiona sobre su efectividad para mejorar continuamente tanto el proceso de enseñanza como el proceso de aprendizaje. En esta propuesta, las características centrales de los momentos de trabajo docente fueron las siguientes:

#### **PM1 (posicionamiento y metas)**

El enfoque pedagógico adoptado se alineó estratégicamente con el diseño curricular de la provincia de Córdoba, que se centra en la presentación de actividades que incentiven el uso efectivo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC), así como en promover el desarrollo del trabajo autónomo de los estudiantes. Esta propuesta no sólo buscó fortalecer las habilidades de resolución de problemas, sino también motivar a los estudiantes para que tomaran decisiones informadas sobre los métodos y estrategias más adecuados para abordar las actividades. El objetivo fundamental de este enfoque fue doble: por un lado, se buscó profundizar la comprensión de las construcciones, objetos y conceptos geométricos, promoviendo un aprendizaje significativo y duradero en el ámbito matemático y, por otro lado, se planteó una meta actitudinal importante, enfocada en mejorar el compromiso y el grado de implicación de los estudiantes en su propio proceso de aprendizaje. Así, se aspiró no solamente a que los alumnos construyan conocimientos matemáticos, sino también cultivar una disposición positiva hacia el aprendizaje autónomo y continuo.

### **P1 (planificación)**

La planificación de esta actividad fue estructurada en varias etapas interrelacionadas que aseguraron un proceso educativo integral y efectivo. Primero, se efectuó un diagnóstico inicial para evaluar el nivel de conocimientos y habilidades de los estudiantes en relación con la geometría. Luego, se diseñó una secuencia didáctica detallada y estratégica centrada en la comprensión profunda de estos conceptos y propiedades de triángulos equiláteros, mediatrices, bisectrices, circunferencia, entre otros, utilizando el juego Euclídea como herramienta principal. Este enfoque no sólo permitió la práctica activa y la experimentación con las construcciones geométricas euclidianas, sino que también facilitó el aprendizaje colaborativo, debido a que los estudiantes se agruparon para resolver desafíos específicos dentro del juego.

Para garantizar la evaluación integral de los aprendizajes, se implementó una fase evaluativa que incluyó la creación de cuestionarios en Google Drive y otras actividades como un Padlet y un espacio para que los estudiantes suban videos explicativos de una actividad a elección. Estos recursos no sólo sirvieron para medir el progreso individual de cada estudiante, sino que también fomentaron la reflexión sobre los procesos de resolución y la consolidación de los conocimientos adquiridos. Además, se planificaron preguntas específicas para acompañar a los estudiantes a medida que avanzaban en el juego y en la comprensión de las diversas construcciones geométricas. Este enfoque aseguró que todos los participantes tuvieran la oportunidad de avanzar y alcanzar los objetivos educativos establecidos en forma efectiva y significativa.

Desde la fase inicial de planificación, se consideró fundamental asegurar el acceso equitativo de todos los estudiantes a recursos tecnológicos como computadoras, celulares o tabletas, dado que estas herramientas fueron fundamentales para el desarrollo integral de la actividad. Esta integración de las TIC no sólo enriqueció los procesos de enseñanza y de aprendizaje, sino que también preparó a los estudiantes para acercarlos a algunos desafíos tecnológicos del mundo actual.

### **IM1 (diseño de instrumentos)**

Diseñamos el diagnóstico para analizar los conocimientos previos de los estudiantes y las distintas actividades del juego utilizando el recurso Euclídea; si bien el mismo dispone de 120 problemas geométricos agrupados en 15 niveles diferentes, en esta propuesta consideramos los primeros 7 problemas del primer nivel, denominado por el juego como Alfa. Euclídea es un juego que permite realizar construcciones geométricas usando "regla y compás" y resulta un desafío incluso para quienes tienen experiencia en construcciones euclidianas. El objetivo del juego es resolver un problema utilizando la mínima cantidad de movimientos posibles. Si hay varios objetos que satisfacen el enunciado de un problema, se deben encontrar todos para obtener puntaje extra.

Al finalizar cada desafío del juego, los estudiantes debieron responder un cuestionario de Google Drive, con preguntas diseñadas específicamente para cada uno de los niveles, donde además de fundamentar las construcciones narrando lo realizado mediante el uso de vocabulario específico, debían resolver una actividad diseñada con GeoGebra que tenía una relación con la construcción del nivel del juego de Euclídea. Por ejemplo, si en Euclídea debían construir una mediatriz, en el applet debían identificar mediatrices de segmentos, utilizando herramientas limitadas, ya que el software permite ocultarlas.

Por otra parte, se preparó un Padlet con el propósito que los estudiantes respondan preguntas de tipo metacognitivas y una planilla para que elijan un nivel para realizar un video-tutorial con la resolución de un desafío del juego.

Para analizar la comprensión de los estudiantes, se realizó una rúbrica, cuyos indicadores eran los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele (Vargas Vargas y Gamboa Araya, 2013). Esta rúbrica se completó para cada uno de los estudiantes, y para cada uno de los cuestionarios realizados (1 por cada desafío del juego), permitiendo así tener el avance de cada estudiante de manera detallada.

### **G1 (gestión de la clase)**

Durante el desarrollo del juego, se planteaban preguntas estratégicas que facilitaban la comprensión y asimilación (muchas de las cuales fueron planificadas con anticipación) de conceptos por parte de los estudiantes. Esta metodología permitió avanzar de forma progresiva mediante diferentes desafíos, pues para comprender un nivel nuevo era imprescindible haber comprendido el nivel anterior. Al concluir la secuencia de actividades, se implementó una estrategia colaborativa con los estudiantes para consolidar tanto los conceptos como las propiedades geométricas abordadas, elaborando un glosario y cuadros, entre otros recursos. Finalmente, mediante la elaboración de narrativas por parte de los estudiantes, se efectuó un análisis detallado de los niveles de razonamiento alcanzados en cada uno de los desafíos. Este proceso incluyó la rúbrica para evaluar adecuadamente los logros y el aprendizaje obtenidos durante la actividad.

Esta gestión post-actividad no sólo promovió la reflexión crítica y la internalización de los conocimientos adquiridos, sino que también brindó una retroalimentación estructurada y significativa para cada estudiante, destacando sus fortalezas y áreas de mejora en relación con los objetivos educativos planteados.

### **R1 (reflexión sobre la propuesta)**

El grupo participante de la experiencia presentó dificultades en hallar el interés sobre las actividades en todos los espacios curriculares. Es significativo señalar que todos los estudiantes al iniciar la experiencia se sintieron motivados por involucrarse con juegos y TIC. Realizaron actividades variadas y a la vez aprendieron en forma amena. Las apreciaciones personales que tuvieron con respecto a la actividad se plasmaron en un Padlet, donde muchos de ellos manifestaron haber continuado con otros niveles de Euclidea, a pesar que la actividad sólo consideraba el primer nivel, y también varios señalaron haber recomendado el juego a amigos y familiares.

En términos generales, consideramos que se alcanzó el objetivo buscado, pues la propuesta permitió a los estudiantes reconocer los elementos, las propiedades y las figuras básicas. Estos logros alcanzados por los estudiantes están en concordancia con el objetivo que persigue el diseño curricular provincial.

Esta propuesta es una muestra de la potencialidad de las TIC cuando se incorporan a propuestas pedagógicas pensadas, diseñadas e implementadas en función de objetivos pedagógicos. Además, posibilita la apertura de nuevas puertas para seguir avanzando en el uso de tecnologías digitales para promover un aprendizaje significativo de la Geometría como de otras áreas de interés.

## **Un ejemplo de enseñanza de la matemática en el nivel superior (Plano 2)**

### **Encuadre**

Álgebra I es una de las asignaturas correspondientes para primer año del Profesorado de Educación Secundaria y de Educación Superior en Matemática que ofrece el Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, una institución de la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, de larga tradición en la formación docente en distintas disciplinas. La comisión en la que se enmarca el trabajo corresponde al turno mañana (una de las tres del turno y de las seis que constituyen el total) y la cantidad de estudiantes que inician efectivamente la cursada son entre 30 y 35, con un porcentaje de recursantes estimado en un 25 %. El desgranamiento afecta con fuerza al primer año de las distintas carreras, aunque en menor medida en el turno mañana. Suelen finalizar la cursada unos 20 a 25 estudiantes. Desde hace una década, aproximadamente, hay una tendencia a la baja en la matrícula de ingresantes.

### **La propuesta desde el modelo de planos**

#### **PM2**

La asignatura aborda el estudio de los conjuntos numéricos: naturales, enteros, racionales, reales y complejos, y polinomios; además, trata generalidades de los conjuntos, las relaciones y nociones de lógica proposicional. Incluye, también, un primer acercamiento a las estructuras algebraicas de grupo, anillo y cuerpo.

Como muestra de las decisiones asumidas, en consideración con estar formando futuros profesores, nos interesa comentar el lugar de la lógica en la propuesta.

Tradiciones institucionales en la enseñanza de esta asignatura sugieren comenzar con lógica: proposiciones y funciones proposicionales, operaciones entre proposiciones, razonamientos, etc. Se desarrollan estos asuntos (con más o menos contextos matemáticos, según se decida), para luego abordar los restantes temas. Podríamos llamar a esta idea *La lógica primero*. Nuestra propuesta se posiciona en un lugar distinto (PM2), porque pensamos que la lógica no es objeto de estudio en esta materia (lo es *el álgebra* con sus distintas temáticas) y porque no compartimos ni queremos sugerir que para estudiar matemática es necesario saber lógica de antemano; además, vemos virtuoso su estudio en forma integrada con los distintos contenidos matemáticos. A modo de ejemplo, comentamos someramente sobre el condicional, noción fundamental para comprender matemática. A lo largo de los distintos temas, trabajamos intensamente el hecho de que en el quehacer matemático usualmente partimos de condiciones: “Si ocurre  $p$  entonces...”; por ejemplo: “Si un número es entero entonces...”, “Si un polinomio con coeficiente reales tiene una raíz compleja entonces...”, etc. Entonces, en una primera instancia, nos centramos en analizar ejemplos de modo de poder sintetizar dos cosas: una, que ante un enunciado del tipo *Si  $p$  entonces  $q$* , si dado  $p$  no ocurre  $q$ , es el enunciado es falso; otra, la parte matemáticamente más compleja: si cuando ocurre  $p$ , también ocurre  $q$ , habrá que hacer alguna demostración de ello para justificar su validez. Explicitamos que el caso de antecedente falso es casi excepcional en el trabajo matemático. Lo abordamos también, pero con un lugar secundario; como uno de los ejemplos, vemos el caso de cuando queremos probar que el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto. Queremos que esto valga, por lo que el condicional de la definición de inclusión tiene antecedente falso (ningún elemento pertenece al vacío) y debe ser verdadero; por este motivo (matemático) y no porque venga dado por una tabla de verdad (lógica).

## P2

Comenzamos expresando que la lógica es el tema privilegiado por tradiciones institucionales. A propósito, una decisión central al planificar la propuesta es: ¿por dónde empezar? (y con qué alcances, claro). En nuestra propuesta, decidimos comenzar con un tema que resulte familiar: las ecuaciones polinómicas (y no lógica o las generalidades de conjuntos). Esto nos permite visitar a las ecuaciones cuadráticas ocupándonos de cuestiones interesantes que trascienden la aplicación de la fórmula resolvente, que es –quizás–, lo que más conocen y saben hacer. Luego, con las ecuaciones polinómicas de grado mayor o igual que tres, podemos revisar casos clásicos de factorización conocidos, ver sus limitaciones y avanzar con estrategias de factorización más generales, siempre pensando más en resolver las ecuaciones que en factorizar a los polinomios asociados (aunque observamos que ese será un problema por atender más adelante).

## IM2

Incursionando al diseño de la propuesta didáctica, para todos los temas elaboramos instrumentos que toman la forma de guías de estudio que contienen tres partes: algunos problemas que funcionan de presentación / motivación del tema; luego, el cuerpo central, que es el conjunto de actividades para realizar (ejercicios y problemas) y, finalmente, un apartado teórico, especialmente escrito para el curso; con esto último queremos decir que adquiere la característica de lo que suelen llamarse manuales (materiales con abundante explicación y ejemplos, explícitamente dirigidos para el aprendizaje de un cierto público). A modo de ejemplo, mencionamos:

Uno de los problemas de presentación del estudio de los números enteros es el siguiente (sin explicaciones previas sobre el tema):

*¿Podrías deducir en qué día de la semana naciste? (sin apelar a calendarios)*

Este problema permite poner en juego el interés por analizar los restos de la división entre dos enteros.

Como una de las actividades que conforman el cuerpo central de los materiales, podemos mencionar una sobre números reales:

*Comparar los siguientes pares de números. Justificar.*

(a)  $\sqrt{48}$  y  $4\sqrt{3}$

(b)  $\frac{1}{\sqrt{8}}$  y  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(c)  $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  y  $-2 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

La actividad tiene el interés de poner en juego la transformación de expresiones numéricas mediante propiedades (que no se explicitan en el enunciado), no como mera destreza operacional, sino con una meta. También aparece el uso de la calculadora científica: su uso está habilitado, pero si los números son iguales, no podrá darse un argumento matemáticamente válido basado en el recurso.

Por razones de espacio no presentamos ejemplos del apartado teórico.

## G2

En cuanto a la gestión de la clase, utilizamos distintas estrategias. Si estamos ante el inicio de un nuevo tema, asignamos un tiempo a la resolución en grupos de los problemas de presentación; luego, realizamos una discusión colectiva dirigida por el docente, que cerramos con algún comentario sobre qué estaremos desarrollando más adelante sobre lo que apareció. La clase continúa con la resolución del cuerpo central del material. Conforme al tema, proponemos un primer abordaje grupal de ejercicios para una posterior discusión o se comienza con esa discusión desde el pizarrón, para luego asignar otros ejercicios para el trabajo grupal.

## R2

A partir de las primeras experiencias en el dictado de la asignatura, pensamos en una nueva secuenciación de los contenidos. Debido a las dificultades que manifiestan quienes se inician en los estudios superiores con los conocimientos previos, pensamos en un abordaje de los grandes temas en dos momentos: uno primero, en el que se trabajen las cuestiones menos complejas, menos profundas, de menor carga teórica, y un segundo momento en el que se complete con lo esperado para desarrollar del tema. De esta manera, lo más complejo del curso se trabaja cuando ya hayan realizado un recorrido significativo en la asignatura. Esto se enmarca en el proceso de reflexión y metacognición (R2) del modelo de planos. (Puede verse una propuesta en ese sentido en Carnelli, 2022, para una asignatura de Cálculo). A modo de ejemplo, con los números naturales, en el primer momento trabajamos problemas de combinatoria sin fórmulas (sin hablar de combinaciones y variaciones), por lo que para resolver los problemas se utilizan diagramas de árbol y conteo con casillas. Las combinaciones y las variaciones aparecen en el segundo abordaje del tema. También se dejan para esta instancia las demostraciones por inducción. Una ventaja adicional que vemos es que así se dan elementos a quienes más adelante enseñarán estos temas en el nivel secundario, considerando que para enseñar combinatoria no es imprescindible desarrollar las nociones de combinaciones y variaciones, y que puede hacerse un estudio significativo aún sin ellas (otro ejemplo de la inclusión del Plano 1 en el Plano 2).

Con lo desarrollado hemos mostrado, brevemente, cómo la enseñanza de esta asignatura de matemática del nivel superior, dirigida a futuros docentes, se enmarca en el Plano 2 del modelo de planos, en sus distintas componentes. Al hacerlo, el análisis nos permite poner en discusión los distintos aspectos de la propuesta y ver su pertinencia en función de quienes son sus destinatarios.

## **Un ejemplo de propuesta de desarrollo profesional para profesores (Plano 3)**

### **Encuadre**

Aquí se aporta información de la génesis y desarrollo de un curso de formación profesional destinado a docentes del nivel superior de nuestro país, cuya denominación es “Habilidades y competencias matemáticas en el nivel superior”.

El curso surge a partir de una convocatoria del Ministerio de Educación de la República Argentina, a través del Instituto Nacional de Formación Docente. La misma consistió en presentar propuestas de desarrollo profesional docente, en el marco del Programa Nacional de Formación Permanente “Nuestra Escuela”, conforme a lo estipulado en el artículo 5° de la resolución del Consejo Federal de Educación N° 407/21, con vistas a su ejecución en el año 2022. En el ámbito del componente II del Programa señalado, la invitación se dirige a las Universidades Nacionales y/o Institutos de Formación Docente.

En este contexto, en el ámbito de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), un grupo de colegas de esta y de otras instituciones del país, decidimos participar como formadores, ofreciendo el curso recientemente señalado, diseñado bajo la modalidad virtual asincrónica, con aulas tutorizadas por equipos docentes especializados, de 10 semanas de duración.

El curso está alojado en el Aula Virtual de la UNNE, en la plataforma Moodle. Hemos diseñado el aula habilitando distintas secciones: presentación del equipo responsable, foro de presentación de los asistentes, avisos y consultas generales. Las propuestas de trabajo fueron habilitadas semanalmente en solapas.

Seguidamente, describimos la propuesta desde el modelo de planos, mencionado anteriormente.

### **La propuesta desde el modelo de planos**

#### **PM3**

Consideramos que el desarrollo profesional se impulsa mediante prácticas relacionadas con la reflexión sobre los distintos tipos de tareas que realizan los docentes involucrados, promoviendo el uso de teorías de Educación Matemática para analizar hechos y datos, y dando lugar a que los propios actores en formación reconozcan cuestiones a mejorar. Este posicionamiento es un punto de partida que nos permite seleccionar como meta principal que los docentes utilicen adecuadamente elementos de educación matemática para la planificación de una enseñanza basada en la resolución de problemas y la modelización matemática. En la actualidad, los profesionales de distintos campos que utilizan la matemática requieren un saber-hacer que les permita resolver problemas de su campo profesional, utilizar recursos tecnológicos, comunicarse con efectividad, etc., competencias que no se adquieren mediante la enseñanza caracterizada por la aplicación de procedimientos y algoritmos previamente estudiados.

#### **P3**

Los aspectos más destacados de la planificación del curso se puntualizan a continuación (para mayor información sobre ellos, se puede visitar la conferencia alojada en el sitio web: <https://www.sem-basicas.unlu.edu.ar/?q=node/74>), editada en las Memorias del V SEM-V.

- *Objetivos:* se trata de que los profesores puedan diseñar, fundamentar y evaluar propuestas de enseñanza encuadradas en el enfoque de Resolución de Problemas (Pochulu y Rodríguez, 2012) y Modelización Matemática (Pochulu, 2018) y que para lograrlo sean capaces de seleccionar y utilizar de manera pertinente bibliografía sobre Educación Matemática.
- *Contenidos:* cuestiones metodológicas para diseñar la enseñanza de la matemática en el nivel superior, la resolución de problemas y la modelización en clases de matemática del nivel superior.
- *Metodología:* se activaron encuentros, semanalmente, en el aula virtual, que se organizaron estimando una dedicación de los asistentes de cuatro horas. Los cursantes accedieron a materiales de estudio, referencias del tema y consignas de trabajo. Esto fue ofrecido en diferentes soportes: textos, videos, presentaciones audiovisuales, foros, etc. Los intercambios y las interacciones entre los asistentes y con el docente se encauzaron por foros, mensajería interna o mail.

Los encuentros plantearon trabajos individuales y/o grupales, de discusión, intercambios y reflexión sobre sus propias prácticas, a la luz de los materiales teóricos acercados y seleccionados por los asistentes.

- *Evaluación*: fue de tipo formativa, con entregas periódicas (grupales o individuales, escritas o en video) y un trabajo final.
- *Bibliografía*: si bien hemos promovido la autonomía en la búsqueda y selección de materiales pertinentes, ofrecimos, para todos los contenidos abordados, una mínima y actualizada referencia teórica y metodológica.

### IM3

Los instrumentos metodológicos diseñados destacables son los siguientes:

- Tipos de consignas para las clases: elaboramos tres tipos de consignas para abordar el curso; las vinculadas con cuestiones metodológicas, Resolución de Problemas y Modelización Matemática.
- Instrumentos de evaluación: hemos organizado los tres trabajos prácticos evaluativos en base a los tipos de consignas señaladas recientemente. El trabajo final consistió en el mejoramiento de los trabajos prácticos parciales.

### G3

Nuestro trabajo como gestores de la enseñanza y la evaluación se inició con la programación curricular de la capacitación.

Durante el desarrollo de las clases fuimos proponiendo lecturas, reflexiones y discusiones en los foros. En el ámbito de tales discusiones, evitábamos dar respuestas inmediatas o exhibir tempranamente nuestros puntos de vista.

En cuanto a las devoluciones de los trabajos prácticos, simplemente presentábamos comentarios y preguntas. Solamente en los casos donde la consigna no fue respondida o donde no hallamos alguna cuestión posible de ser mejorada, solicitábamos una reelaboración del trabajo. La intención siempre fue: dejar inquietudes, invitarlos a interactuar, preguntar, fundamentar, etc.

### R3

Las situaciones que nos interpelaban y promovían instancias de reflexión en los profesores que coordinábamos el curso, fueron las producciones parciales de los cursantes. Así, muchas de sus respuestas nos desafiaban, haciendo necesario un minucioso análisis matemático y didáctico para comprender los aciertos y las dificultades y así poder promover situaciones de mejora.

Estas instancias de reflexión y toma de nuevas decisiones fueron favoreciendo los ajustes y las mejoras de la capacitación.

Queda en evidencia que el modelo de planos para la formación docente permite identificar claramente las características de las actividades que son necesarias de proponer, conforme a los distintos tipos de destinatarios de la formación. En este caso, el aprendizaje de criterios para redactar consignas abiertas y con alto potencial matemático, de cuestiones metodológicas generales para la enseñanza y la evaluación, poder identificar, diferenciar y caracterizar situaciones que promueven la resolución de problemas y la modelización matemática en el nivel superior, son conocimientos necesarios para cualquier docente que enseña matemática en este nivel.

## A modo de cierre

Queremos mencionar que el modelo de planos nos ha resultado una herramienta muy útil para ayudar al docente a ubicar su propuesta de enseñanza. Esperamos que compartir los ejemplos en esta presentación, resultado de los intercambios y reflexiones, haya facilitado la comprensión del modelo, la identificación de la estructura común de trabajo y las diferencias para la concreción del trabajo en cada plano.

Finalmente mencionamos que, actualmente, con los requerimientos que se le exigen a los docentes en los diferentes roles, es común encontrar que un profesor de matemática deba adaptarse a requerimientos didáctico-matemáticos que le son impuestos por las instituciones, sin que hayan sido formados para hacerlo. Cuando esto ocurre, en particular, para la formación de profesionales más allá de la formación de profesores, puede resultar de utilidad considerar el modelo de planos ampliado que puede verse en Rodríguez et al. (2024).

## Referencias Bibliográficas

- Calvo, E. [Departamento Ciencias Básicas UNLu] (2024, 16 de mayo). *La comprensión de objetos geométricos con nuevos recursos*, [Video]. Youtube. <https://youtu.be/bwZ0RPBRQyk?t=21619>
- Carnelli, G. (2022). Secuenciación de contenidos: una propuesta alternativa para la enseñanza del Cálculo. *Urania*, 13, 12-21.

- Carnelli, G. [Departamento Ciencias Básicas UNLu] (2024, 16 de mayo). *Consideraciones para el diseño de una propuesta didáctica de un curso inicial de Álgebra para la formación docente*, [Video]. Youtube. <https://youtu.be/bwZ0RPBRQyk?t=22882>
- Espinoza, F. [Departamento Ciencias Básicas UNLu] (2024, 16 de mayo). *Reflexiones sobre un curso de educación matemática destinado a docentes del nivel superior*, [Video]. Youtube. <https://youtu.be/bwZ0RPBRQyk?t=23844>
- Pochulu, M. (Comp.). (2018). *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones*. GIDED - UNVM.
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comp.) (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Vol. 1*, UNGS-EDUVIM.
- Rodríguez, M. [Departamento Ciencias Básicas UNLu] (2024, 16 de mayo). *Momentos del trabajo del profesor de matemática, en función del rol asumido*, [Video]. Youtube. <https://youtu.be/bwZ0RPBRQyk?t=20164>
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (2024). Desarrollo profesional para docentes de matemática superior: un encuadre teórico y una propuesta. *Cuadernos de investigación y formación en educación*, 17(1), 35-50. Universidad de Costa Rica.
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Fierro, M. (2019). Modelo de planos de formación docente para abordar distintos roles del profesor de matemática. *Revista Electrónica De Divulgación De Metodologías Emergentes En El Desarrollo De Las STEM*, 1(1), 84-103. <http://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/95>
- Vargas Vargas, G., & Gamboa Araya, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría, *Uniciencia*, 27(1), 74-94.

**Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
“Creatividad en Educación Matemática”**

**Helcio Soares PADILHA Junior<sup>(1)</sup>  
Claudia Lisete OLIVEIRA GROENWALD<sup>(1)</sup>**

**<sup>(1)</sup>Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil**

**Resumo**

Este artigo apresenta uma síntese das discussões realizadas no Grupo de Trabalho e Discussão 3 (GTD-3) do V Simpósio de Educação Matemática Virtual, focado em práticas inovadoras e criativas para o ensino de matemática. O estudo aborda a integração de tecnologias digitais, como jogos online, videogames comerciais e e-books animados, e discute como essas ferramentas podem ser utilizadas para promover um aprendizado mais dinâmico e significativo. Além disso, analisa a importância do conhecimento pedagógico dos professores de matemática e a necessidade de formação continuada para a implementação eficaz dessas metodologias inovadoras. A metodologia do artigo inclui uma análise qualitativa das conferências apresentadas no simpósio, que exploram diferentes abordagens pedagógicas e seus impactos no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Os resultados indicam que a adoção de práticas que estimulam a criatividade e utilizam recursos tecnológicos pode transformar o ensino de matemática, tornando-o mais acessível e envolvente para os estudantes. Conclui-se que uma abordagem interdisciplinar, combinada com a capacitação dos professores, é fundamental para criar um ambiente de aprendizagem que fomente o pensamento crítico e criativo. Este estudo contribui para o campo da educação matemática por contribuir sobre como essas práticas podem ser aplicadas para preparar os alunos para os desafios do século XXI.

**Palavras-chave:** Educação Matemática, Criatividade, Tecnologias Digitais, Formação de Professores.

## Introdução

O Grupo de Trabalho e Discussão 3 (GTD-3) do V Simpósio de Educação Matemática Virtual proporcionou um espaço privilegiado para a troca de ideias e experiências entre pesquisadores da área de Educação Matemática do Brasil e da Espanha. O GTD-3 focou em temas contemporâneos e inovadores que envolvem desde a integração de tecnologias digitais até a renovação de metodologias de ensino, buscando compreender e explorar o papel da criatividade na educação matemática. Este artigo apresenta uma síntese das principais discussões e contribuições dos pesquisadores participantes, abordando como diferentes abordagens e ferramentas pedagógicas podem transformar o ensino e a aprendizagem da matemática.

Ao longo deste texto, serão discutidos cinco tópicos centrais, cada um abordando um aspecto distinto do ensino de matemática. Esses tópicos incluem o conhecimento pedagógico do professor de matemática, o uso de jogos e atividades lúdicas, a integração de jogos online no desenvolvimento do pensamento matemático, o uso de e-books animados, e a utilização de videogames comerciais como ferramentas de ensino. Cada um desses temas será explorado com base nas conferências apresentadas, destacando as principais ideias, práticas recomendadas e desafios identificados pelos pesquisadores.

Este artigo visa não apenas descrever as contribuições de cada pesquisador, mas também estabelecer conexões entre os diferentes tópicos abordados, evidenciando a complementaridade das metodologias discutidas. O leitor encontrará uma análise detalhada de como essas abordagens podem ser implementadas no contexto educacional atual, contribuindo para a formação de professores e a melhoria do ensino de matemática. Por fim, será apresentada uma reflexão sobre a importância de uma visão interdisciplinar e inovadora na educação matemática, que promove um ambiente de aprendizagem mais dinâmico, envolvente e adaptado às necessidades dos alunos do século XXI.

## Visão geral do GTD-3

O Grupo de Trabalho e Discussão 3, do V Simpósio de Educação Matemática Virtual, do ano de 2024, reuniu os pesquisadores da área de Educação Matemática do Brasil e da Espanha, a saber: Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald, com a Conferência intitulada “Conhecimento Pedagógico do professor de Matemática e sua influência no desenvolvimento do Pensamento Matemática”; MsC. Helcio Soares Padilha Junior, com a Conferência intitulada “Ensino de Matemática por meio de jogos e atividades lúdicas: experiências de professores brasileiros da escola primária”; Dr. Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa, com a Conferência intitulada “O papel dos jogos online na formação do pensamento matemático”; Dra. Edvoneite Souza de Alencar, com a Conferência intitulada “Ebooks animados para o ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental; e Dr. Lluís Albrarracín Gordo, com a Conferência intitulada “*Videojuegos comerciales en el aula de matemáticas: una guía práctica*”.

Nesta seção do artigo, apresentamos uma visão geral de cada discussão, tratados em suas comunicações e conferências ao evento.

## Conhecimento Pedagógico do Professor de Matemática

Groenwald abordou em sua conferência a importância do conhecimento pedagógico na formação dos professores de Matemática e como isso influencia o desenvolvimento do pensamento matemático nos estudantes. A autora argumenta que a formação de professores de Matemática deve ir além da simples transmissão de conhecimento teórico sobre a disciplina. É necessário que os professores sejam capacitados para criar e adaptar métodos pedagógicos que considerem o contexto em que estão inseridos, as características dos estudantes e as demandas do currículo escolar. Sua apresentação enfatizou a necessidade de uma formação inicial que proporcione aos futuros professores oportunidades para desenvolver habilidades como a reflexão crítica, a criatividade e a capacidade de inovar na prática educativa, baseada em Nóvoa (2007).

A formação docente, segundo Groenwald, deve ser um processo contínuo de discussão, reflexão e desenvolvimento de competências essenciais para o ensino de Matemática em todos os níveis educacionais. A autora defende que os professores precisam estar preparados para lidar com as complexidades do ambiente escolar, que vão desde a compreensão das dificuldades de aprendizagem dos alunos até a integração de novas tecnologias e metodologias no ensino. Além disso, ela sugere que a formação dos professores de Matemática deve ser orientada por uma visão interdisciplinar, que permita a eles estabelecerem conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, promovendo uma educação mais holística e integrada. Essa abordagem reflete uma visão moderna da Educação

Matemática, onde o foco não está apenas na memorização de fórmulas e conceitos, mas na formação de indivíduos capazes de aplicar o conhecimento matemático de maneira crítica e criativa (Groenwald & Llinares, 2022).

### **Transformação do Ensino de Matemática com Jogos**

Por sua vez, Padilha Junior discutiu a transformação do ensino de Matemática por meio do uso de jogos e atividades lúdicas, fundamentando-se na teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget (1964). A pesquisa realizada no município de Jaguariáiva, Brasil, revela como a formação continuada de professores, focada na adoção de jogos como ferramentas pedagógicas, pode resultar em mudanças significativas nas práticas de ensino. Sua conferência destacou que o uso de jogos educativos não só torna o aprendizado mais prazeroso e motivador, mas também facilita a assimilação ativa de conceitos matemáticos pelos estudantes. Essa metodologia, alinhada com as etapas cognitivas descritas por Piaget (1964), demonstra ser eficaz em promover um aprendizado mais intuitivo, onde os alunos participam ativamente do processo, explorando e descobrindo soluções para problemas matemáticos de forma lúdica.

Além disso, o artigo explora os impactos dessa abordagem nas atitudes dos professores e estudantes. Padilha Junior argumenta que, ao integrar jogos no ensino de Matemática, os professores podem criar um ambiente de aprendizagem mais interativo e dinâmico, o que resulta em um maior engajamento e interesse dos estudantes pela disciplina. A formação continuada dos professores é apontada como um fator crucial para a implementação bem-sucedida dessa metodologia, garantindo que os educadores estejam preparados para utilizar jogos de maneira eficaz e adaptada às necessidades de seus estudantes. Sua discussão sugere que essa abordagem pedagógica não apenas melhora o desempenho acadêmico dos alunos, mas também contribui para uma mudança na percepção da Matemática, que passa a ser vista como uma disciplina mais acessível e divertida. Por fim, Padilha Junior apresenta uma visão robusta e prática de como os jogos podem transformar o ensino de Matemática, tornando-o mais significativo e alinhado com as necessidades do século XXI (Padilha Junior, 2023).

### **Jogos Online na Formação do Pensamento Matemático**

A conferência de Homa focou na integração de jogos *online* como um recurso didático na formação do pensamento matemático. A proposta central da discussão foi demonstrar como a incorporação de elementos lúdicos, como jogos digitais e resolução de problemas, pode fomentar o desenvolvimento de habilidades matemáticas essenciais, como raciocínio lógico, representação, comunicação e argumentação. O uso de jogos *online* é apresentado como uma metodologia que não apenas torna o aprendizado mais dinâmico e interessante, mas também facilita a compreensão e aplicação de conceitos matemáticos em diferentes contextos. Esses jogos permitem que os estudantes visualizem e generalizem conceitos matemáticos, o que pode ser particularmente útil em um ambiente educacional onde a abstração é uma habilidade fundamental.

Outro aspecto discutido pelo pesquisador é a importância da integração das Tecnologias Digitais no planejamento didático dos professores de Matemática. Homa argumenta que o acesso a produtos educacionais digitais, como jogos desenvolvidos com *software* como o *GeoGebra*, oferece aos professores uma ferramenta poderosa para enriquecer suas práticas pedagógicas. Esses recursos podem ser facilmente incorporados no processo de ensino e aprendizagem, ajudando a transformar a sala de aula em um espaço mais interativo e colaborativo. A discussão sugere que a abordagem lúdica dos jogos digitais não só motiva os alunos, mas também os prepara para desafios matemáticos mais complexos, ao desenvolver habilidades críticas de forma natural e divertida. A reflexão proposta por Homa sobre a relação entre jogos e aprendizado matemático destaca a relevância de adotar novas tecnologias no ensino para criar experiências de aprendizagem mais significativas (Homa, 2019).

### **E-books Animados no Ensino de Matemática**

Alencar explorou a utilização de *e-books* animados como uma ferramenta pedagógica para o ensino de Matemática na educação primária. A proposta é integrar histórias de literatura infantil com conceitos matemáticos, tornando o aprendizado mais envolvente e lúdico. Essa abordagem visa não apenas facilitar a compreensão de conceitos matemáticos, mas também promover um ambiente de ensino mais dinâmico, que estimule a curiosidade e a criatividade das crianças. A criação de *e-books* animados, por meio de uma narrativa que entrelaça elementos de Matemática com enredos cativantes, permite que os estudantes se familiarizem com tópicos matemáticos de uma maneira mais natural e divertida, o que pode ser particularmente eficaz para estudantes em fase de alfabetização.

Além disso, a pesquisadora discute os impactos dessa metodologia na formação e desenvolvimento profissional dos professores. Ao utilizar essas ferramentas, os educadores são incentivados a inovar em suas práticas de ensino, explorando novas formas de engajar seus estudantes. Essa prática não apenas fortalece o conhecimento pedagógico dos professores, mas também os capacita a utilizar recursos tecnológicos de forma criativa e eficaz. A iniciativa de integrar *e-books* animados no currículo pode ser vista como uma tentativa de alinhar a Educação Matemática com as demandas contemporâneas por métodos de ensino mais interativos e adaptados às realidades digitais dos estudantes. Essa abordagem destaca a importância de renovar as práticas educacionais para atender melhor às necessidades e expectativas das novas gerações de estudantes (Alencar & Silva, 2017).

### Videojogos Comerciais no Ensino de Matemática

Albarracín, contribuiu com a discussão, explorou as possibilidades do uso de videogames comerciais como ferramentas didáticas no ensino de Matemática. Ele argumenta que, embora esses jogos não sejam originalmente concebidos para fins educacionais, podem ser adaptados para criar contextos ricos de aprendizagem que promovem a competência Matemática. Albarracín apresenta um guia prático para a incorporação desses jogos nas aulas de Matemática, destacando como a experiência de jogo pode ser estruturada para facilitar a resolução de problemas e o raciocínio lógico, sobretudo em seu contexto europeu. Um exemplo destacado é o uso do jogo “*Kula World*” para desenvolver a visualização tridimensional, onde os alunos são desafiados a explorar e resolver problemas em um ambiente virtual complexo, promovendo o pensamento espacial e a aplicação de conceitos geométricos. Ele também discute os desafios e as oportunidades de integrar videogames comerciais na Educação Matemática. Albarracín aponta que, para que essa integração seja eficaz, é necessário que os professores estejam preparados para mediar o processo de aprendizagem, criando atividades complementares que ajudem os estudantes a conectar a experiência de jogo com os conceitos matemáticos abordados. Ele sugere que os videogames podem atuar como uma ferramenta motivadora e engajante, capaz de transformar o ambiente de aprendizagem tradicional em um espaço mais dinâmico e interativo. No entanto, Albarracín também adverte que o sucesso dessa metodologia depende da escolha criteriosa dos jogos e do planejamento cuidadoso das atividades de ensino, de modo a garantir que os objetivos educacionais sejam atingidos. O uso de videogames comerciais, portanto, surge como uma abordagem inovadora e promissora para enriquecer a Educação Matemática, mas que requer um planejamento pedagógico robusto (Albarracín, 2021).

### Contribuições do GTD-3 para professores de Matemática

Como forma de demonstrar as contribuições do GTD-3 para professores de Matemática, a Tabela 1 apresenta a relação entre as discussões feitas pelos pesquisadores com o tema Criatividade em Educação Matemática.

Tabla 1 – Relação entre as conferências e o tema do GTD-3.

Conferencia	Relação com a Criatividade	Complementaridade
Conhecimento Pedagógico do Professor de Matemática	Formação docente que valoriza a criatividade, integrando metodologias inovadoras e tecnológicas no planejamento didático.	Formação docente que pode ser potencializada pelo uso de recursos digitais e jogos educativos, promovendo a criatividade.
Transformação do Ensino de Matemática com Jogos	Incentiva a criatividade no ensino de matemática por meio do uso de jogos, transformando a experiência de aprendizagem em algo mais significativo.	Abordagem prática das teorias abordadas, enfatizando a formação docente para abrir espaço à criatividade no ensino de Matemática.
Jogos Online na Formação do Pensamento Matemático	Promove a resolução criativa de problemas e o desenvolvimento do pensamento matemático de forma dinâmica e interativa.	Pode ser complementada pelo uso de <i>e-books</i> animados e outras ferramentas digitais, criando um ecossistema de aprendizado abrangente.
E-books Animados no Ensino de Matemática	Estimula a criatividade através da criação de histórias infantis com	Pode ser combinada com o uso de jogos digitais e outras ferramentas

	elementos matemáticos, transformando a aprendizagem em algo lúdico.	para criar um ambiente de aprendizado diversificado.
Videojogos Comerciais no Ensino de Matemática	Explora a criatividade dos alunos ao utilizar contextos lúdicos de videojogos comerciais para resolver problemas matemáticos.	Pode ser enriquecida com outras práticas que utilizam tecnologia para transformar a educação matemática, criando um ambiente de aprendizado envolvente.

**Fonte:** Propria

A discussão fomentada pelos pesquisadores, mostra uma visão interdisciplinar clara, onde a criatividade no Educação Matemática é promovida através de diversas ferramentas e metodologias que se complementam. A combinação de tecnologias digitais, jogos, e a formação continuada de professores cria um ambiente de aprendizado mais dinâmico e adaptável às demandas globais do ensino.

### Considerações finais

As discussões promovidas no âmbito do GTD-3 do V Simpósio de Educação Matemática Virtual revelam a importância de integrar criatividade e inovação no ensino de matemática, utilizando uma variedade de ferramentas e abordagens pedagógicas. Os artigos apresentados pelos pesquisadores abordaram desde a formação pedagógica dos professores até a aplicação de tecnologias digitais, mostrando que o ensino de matemática pode ser profundamente enriquecido por metodologias que estimulam a curiosidade e o engajamento dos alunos.

Uma das principais contribuições deste trabalho é a demonstração de que a criatividade pode ser promovida através de múltiplos caminhos, como o uso de jogos digitais, e-books animados e videojogos comerciais. Essas ferramentas, quando integradas de maneira planejada e reflexiva, podem transformar a experiência de aprendizagem, tornando-a mais interativa e significativa. Além disso, a formação continuada dos professores emerge como um elemento essencial para que essas inovações sejam efetivamente implementadas nas salas de aula, garantindo que os educadores estejam preparados para utilizar essas novas metodologias de forma eficaz.

Por fim, este artigo destaca a necessidade de uma visão interdisciplinar no ensino de matemática, onde as fronteiras entre disciplinas são atravessadas para criar um ambiente de aprendizagem mais holístico. A integração de diferentes abordagens pedagógicas não só enriquece o ensino, mas também prepara os alunos para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo, onde a capacidade de pensar criticamente e de forma criativa é cada vez mais valorizada. As contribuições do GTD-3 oferecem uma base sólida para futuras pesquisas e práticas educativas, sugerindo caminhos promissores para a evolução da educação matemática.

## Referencias

- Albarracín, L. (2021). Una secuencia de actividades para desarrollar la visualización usando un videojuego. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 181-199.
- Alencar, E. S., & Silva, R. J. (2017). A literatura infantil na educação matemática inclusiva. *EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA – RS*, 3(18), 68–74. [https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1592686/1794164804951506\\_Alencar2018Literatura.pdf](https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1592686/1794164804951506_Alencar2018Literatura.pdf)
- Groenwald, C. L. O., & Llinares, S. (2022). Aprendiendo a mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación En Educación Matemática*, 2(2), e202202. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.29>.
- Homa, A. I. R. (2019). Objetos de aprendizaje tridimensionales contruídos con el software Geogebra. *Revista Paradigma*, 11(1). 69-79. <https://core.ac.uk/download/pdf/328833913.pdf>
- Nóvoa, A. (2007). *Desafios do trabalho do professor no mundo contemporâneo*. São Paulo: SINPRO.
- Padilha Junior, H. S. (2023). *Impactos didáticos-metodológicos da formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental na rede municipal de educação de Jaguariáva-PR* [Dissertação de Mestrado, Universidade Luterana do Brasil]. PPGECIM/ULBRA. <http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/440/437>.
- Piaget, J. (1964). *Formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação*. LTC.

**Post-Memorias V SEM-V del Grupo de Trabajo-Discusión  
“Educación Estocástica”**

**Jorge E. SAGULA<sup>(1, 2, 3)</sup>, Héctor HEVIA<sup>(4, 5)</sup>,  
Cassio GIORDANO<sup>(6)</sup>, Enrique ÁLVAREZ<sup>(7)</sup>**

**<sup>(1)</sup>División Matemática y División Estadística, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(2)</sup>Director Equipo COIN, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(3)</sup>Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**<sup>(4)</sup>Universidad Alberto Hurtado, Chile**

**<sup>(5)</sup>Universidad Adolfo Ibáñez, Chile**

**<sup>(6)</sup>Universidade Federal do Rio Grande, Brasil**

**<sup>(7)</sup>División Estadística, Departamento Ciencias Básicas,  
Universidad Nacional de Luján, Argentina**

**Resumen**

Este texto, corresponde a las Post-Memorias del Grupo de Trabajo-Discusión GTD “Educación Estocástica” del V SEM-V (V Simposio de Educación Matemática Virtual), y se caracteriza por no ser exclusivamente fruto de los artículos previos a cada una de las disertaciones (Conferencia Central y Tres (3) Disertaciones Invitadas), en estado de edición final, de parte de EDUNLU, Editorial de la Universidad Nacional de Luján, en carácter de Memorias del V SEM-V, y tampoco, solamente, proveniente de las respectivas cuatro (4) respectivas disertaciones, sino por las interacciones, al finalizar el GTD, y las reflexiones generadas, amén de las preguntas formuladas; es decir, refleja el conocimiento emergente, que en un altísimo porcentaje, con muy escaso nivel de significancia se registra en modo alguno, no cubriendo aspectos que se dan en un momento histórico único.

La última parte del párrafo previo, revela, en gran medida, la respuesta a ¿por qué, Post-Memorias? Porque las Memorias, increíblemente, son antes de las disertaciones, en general, de manera que se pierde lo más rico de los conceptos vertidos al finalizar una actividad grupal, en este caso un grupo de trabajo-discusión, lo que denomino, en mi carácter de Director Académico de cada edición del SEM y del SEM-V, y además aquí, en mi carácter de Director de este Grupo de Trabajo y Discusión, “el conocimiento emergente”; por tanto, esta es una muestra de lo que ha quedado, de lo reflejado en los intercambios, en las reflexiones, ..., en fin, las nuevas ideas a develar en el curso del tiempo, y ....., ante la posibilidad de escalarlo en una próxima edición del SEM-V.

La primera disertación, a mi cargo (Jorge E. SAGULA) en carácter de Conferencia Central, fue titulada **“La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG”**, plasmando que detrás de la Inteligencia Artificial Generativa, a más de haber mucha historia, jalonada por grandes hitos que quizás no llegaron al público masivo, y en general, permitieron llegar a estas instancias, donde los medios y no sólo audiovisuales, le dieron una mayor circulación al tema, abarcando distintas profesiones y especializaciones, incluso las más alejadas a la temática, pero ciertamente, detrás, y muchas veces creyéndose invisibles a la mirada de muchos, están, entre otras disciplinas, ..., numerosas disciplinas, la Estadística y la Probabilidad, que, por cierto, son vitales, pues sin las mismas, todo se reduciría, a la nada misma, son parte del oxígeno que respiramos los humanos, ....., son vitales para los algoritmos que permiten visualizar textos e imágenes, y percibir sonidos, y recrear, ..., mundos fantásticos.

Entonces, mi aporte para las Post-Memorias lleva por título **“Revisitando la Educación Estocástica, desde las miradas expuestas, y hacia la Inteligencia Artificial”**.

La segunda disertación, a cargo de Héctor HEVIA, en carácter de Disertación Invitada, se tituló **“Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico, desde la visión de la Fenomenología”**, en la cual el Profesor-Investigador, vuelve a las fuentes, a reconstruir la visión de la Fenomenología, dándole preeminencia no sólo a la coherencia de los significados, a la semántica, tema crucial en la Estadística, en sus distintas fases, sino que postula la preservación de los mismos, y reivindica a los investigadores en la

Fenomenología, e invita a indagar en torno al Pensamiento Estadístico, esencial precisamente, en la perspectiva de la Fenomenología.

Y su aporte a las Post-Memorias se titula **“La Fenomenología como Lugar del Sentido Común”**, donde no sólo revisita los conceptos salientes de la resignificación sino el Pensamiento Estadístico y la Visión de la Fenomenología, haciendo hincapié en los autores clásicos, como en sus propios trabajos precedentes.

La tercera disertación, a cargo de Cassio GIORDANO, en carácter de Disertación Invitada, se tituló **“El desarrollo del Pensamiento Estadístico, Probabilístico y Combinatorio en el contexto de la Estadística Cívica”**, en la cual el autor y disertante presenta un enfoque basado en la perspectiva de la Estadística Cívica y el desarrollo del pensamiento estocástico, en el amplio rango de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria; su aporte consiste en un ensayo teórico, donde el núcleo duro y central se basa en un trabajo de gran profundidad, debido a Nicholson, Gal y Ridgway, evaluando la importancia de las 11 Facetas del marco de trabajo de la Estadística Cívica, articuladas en función del Modelo de Pensamiento Estadístico debido a Wild y Pfannkuch, haciendo hincapié en la Investigación y el Modelo de Alfabetización Estadística y Probabilística, cuyo autor es Gal.

Su aporte a las Post-Memorias, ratifica el título de origen, correspondiente a su disertación en el GTD.

La cuarta disertación, a cargo de Enrique ÁLVAREZ, en carácter de Disertación Invitada, fue titulada **“Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica Bayesiana en cursos de grado de Estadística”**; en la misma el autor y disertante, presenta una propuesta pedagógica en aras de introducir de manera simple la Estadística Bayesiana en carreras no específicas de Estadística y Matemática, pero que necesitan de sus fundamentos y aplicaciones; destacando su importancia en la Ciencia de Datos, pues a través de su vertiente de resolución, la Analítica, requiere de la más que sustantiva Estadística Bayesiana

El disertante sustenta su propuesta en estos pasos: 1) Presentar los fundamentos epistemológicos e intuitivos que originan a la Estadística Bayesiana; 2) Explicitar malentendidos comunes en cuanto a la Estadística Bayesiana; 3) Ilustrar el método de cálculo mediante ejemplos reales, concretos y simples.

Su aporte a las Post-Memorias, ratifica el título de origen, correspondiente a su disertación en el GTD.

Las cuatro visiones dejan, inicialmente, puntos específicos para mostrar distintos niveles de correlato, en el amplio campo de la Educación Estocástica, no sólo desde su fundamentación sino desde su implicancia en la Educación y en los últimos decenios en la convergencia entre Estadística y Probabilidad, Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial, y así, poder generar reflexiones que permitan abrir nuevos puntos de interés para seguir avanzando.

**Palabras clave:** Estadística. Probabilidad. Inteligencia Artificial. Machine Learning. Deep Learning. Pensamiento Estadístico. Fenomenología. Estadística Cívica. Estadística Bayesiana. Ciencia de Datos. Educación. Convergencia.

## Revisitando la Educación Estocástica, desde las miradas expuestas, y hacia la Inteligencia Artificial

En forma sintética, el propósito inicial de esta disertación, en carácter de Conferencia Central en el marco del Grupo de Trabajo-Discusión “Educación Estocástica” fue revelar “cómo la Inteligencia Artificial”, en su propia evolución, constituye una visión no sólo interdisciplinar sino multimetodológica, y fundamentalmente soportada por diversas teorías, no inherentes exclusivamente a la percepción humana sino con la intervención de ciencias tales como la Estadística y la Probabilidad, posibilitando la resolución de problemas de diversa índole, hasta de gran complejidad, y conflictos con distintos niveles de incertidumbre.

Enfáticamente, y no casualmente, la propia evolución de la Inteligencia Artificial, desde sus inicios no formales en la década del '40 en el siglo XX, a partir de los trabajos de Mc Culloch y Pitts, en 1943, en la Simulación de Mecanismos Mentales, hasta la fuerte incidencia de Alan Turing (1950) expresando que “en algún momento, las máquinas evidenciarán inteligencia”, hasta el nacimiento formal en Dartmouth University (verano'1956) cuando no sólo la academia sino la industria tecnológica comenzó el proceso mixto de I+D, comenzando el recorrido desde las **Redes Neuronales (Neural Nets)** y su evolución, el **Aprendizaje de Máquina (Machine Learning)**, su escalabilidad, el **Aprendizaje Profundo (Deep Learning)**, el **Aprendizaje por Refuerzo (Deep Reinforcement Learning)**, hasta la **Inteligencia Artificial Generativa (Generative Artificial Intelligence)**, le deben su existencia, en gran medida, desde el diseño, la construcción y sus respectivos algoritmos, a la presencia de la **Estadística** y la **Probabilidad**, en sus distintas sub-disciplinas, sin dejar pasar en momento alguno la importancia manifiesta del Pensamiento Estadístico, Pensamiento Estocástico, Pensamiento Complejo, Pensamiento Heurístico, Pensamiento Metaheurístico y Pensamiento Computacional.

La importancia del Pensamiento Probabilístico es crucial en la transferencia desde el cerebro humano a través de la Ingeniería de Conocimiento, en el contexto de la Inteligencia Artificial, pero más en nuestros días, en la Inteligencia Artificial Generativa, pues las herramientas como el ChatGPT, en cierta forma, lo utilizan, pero no en forma cabal, como lo concibe un humano, ... un experto humano.

El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad de que suceda algún resultado específico. En este contexto, el Pensamiento Probabilístico permite identificar los resultados más probables; así, las decisiones se consideran más precisas y efectivas (**Sagula, J., 2023**). El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones. Este tema es crucial en el escenario de la Inteligencia Artificial, en su propia evolución, en la búsqueda del “mejor escenario” de paralelismo posible, con la Inteligencia Natural, en esencia con las Neurociencias para la comprensión del Cerebro y sus acciones, intentando mapearlas y simularlas; en esta instancia, se puede postular que “una representación mental es un isomorfismo entre procesos que ocurren en el cerebro y el comportamiento de ciertos aspectos del mundo”. Esta definición de una Teoría de la Representación, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística (del griego “heuriskien”, significa “buscar”); tal que Heurística puede definirse como “conjunto de procedimientos simples, frecuentemente basados en el sentido común, que conforme se supone, permitirán obtener una buena solución a problemas con cierto grado de dificultad, en forma rápida y fácil” (**Zanakis & Evans, 1981**).

**Gal (2005)**, propone un modelo, en el cual el componente cognitivo incluye los conceptos: (1) Ideas Centrales: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre; (2) Cálculo de probabilidades: estimando la probabilidad de ocurrencia de eventos; (3) Idioma: términos y métodos

utilizados para comunicarse sobre el azar; (4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal; y (5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades.

Es dable concluir que el Pensamiento Probabilístico puede verse como una línea de pensamiento de mayor complejidad, el Pensamiento Heurístico, no excluyente de tales procesos, pero que constituye una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, y que precisamente, puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; consecuentemente, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas.

Las ideas son ideas, y los hechos son hechos; para que la IA, en los últimos años, ha quedado reducida, a la IAG (Inteligencia Artificial Generativa), concepto bastante curioso, pues adjetivar de esta forma, es ciertamente “una redundancia”, en virtud que “todo aquello que evidencia Aprendizaje”, de por sí, ya es Inteligente. Sin embargo, en noviembre’2022 (a pesar que el antecedente primario fue el primer chatbot (ELIZA, MIT, 1966), OpenAI anuncia ChatGPT, entonces millones de usuarios comenzaron a interactuar directamente con una computadora, escribiendo un texto en lenguaje natural, incluso con faltas de ortografía y ausencia de signos de puntuación. Los resultados, sorprendieron a expertos, desarrolladores y novatos, pues con un breve texto como input en el prompt de la computadora, se generaba rápidamente un texto de varias líneas con cierta coherencia y con una gramática y sintaxis adecuadas. Era una auténtica revolución. Por primera vez se tenía al alcance de nuestros dedos la posibilidad de interactuar en forma directa con una computadora, en el idioma elegido, que podría generar textos como si se tratara de una persona empática, generosa y sensible. ¿Cómo fue posible? La red neuronal estaba entrenada con millones de textos de múltiples temas, y ahora más allá de los textos, con GPT-4, tanto input como output, imágenes, videos y audio. Esto último ha permitido el surgimiento de arte y diseño usando la IA. (Sagula, 2024)

Pero, qué hay detrás, qué la sostiene, cuál es el soporte vital, la Estadística y la Probabilidad, en su amplio abanico. Por qué? Porque cada algoritmo combina las resoluciones de cada uno de los términos, a partir de la experticia humana, a partir de la interacción humana, y esto evidencia que ese conocimiento no siempre es preciso, determinístico, sino refleja el conocimiento empírico, las conjeturas, las opiniones, distintas apreciaciones, enfoques,...., detrás están los árboles de probabilidad, los modelos basados en estadística y en probabilidad, reflejando en el mejor de los escenarios, conclusiones plausibles....

Héctor HEVIA, en su disertación titulada “**Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico, desde la visión de la Fenomenología**”, regresó a las fuentes, a reconstruir la visión de la Fenomenología, dándole preeminencia no sólo a la coherencia de los significados, a la semántica, tema crucial en la Estadística, en sus distintas fases, sino que se dirigió a profundizar la preservación de los significados, y enfatizó la reivindicación a los investigadores más importantes en la Fenomenología, invitando a indagar en torno al Pensamiento Estadístico, esencial precisamente, en la perspectiva de la Fenomenología. En su aporte, en el intercambio producido al finalizar la cuarta disertación, enfatizó sobre la resignificación, el Pensamiento Estadístico y la importancia de la Visión de la Fenomenología, destacando a Moore, Husserl y Bruner. Y estas ideas quedaron reflejadas en las Post-Memorias, tituladas “**La Fenomenología como Lugar del Sentido Común**”.

Cassio GIORDANO, en su disertación titulada “**El desarrollo del Pensamiento Estadístico, Probabilístico y Combinatorio en el contexto de la Estadística Cívica**”, presentó un enfoque basado en la perspectiva de la Estadística Cívica y el desarrollo del pensamiento estocástico, en el amplio rango de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria; su aporte consiste en un ensayo teórico, donde el núcleo duro y central se basa en un trabajo de gran profundidad, debido a Nicholson, Gal y Ridgway, evaluando la importancia de las 11 Facetas del marco de trabajo de la Estadística Cívica, articuladas en función del

Modelo de Pensamiento Estadístico debido a Wild y Pfannkuch, haciendo hincapié en la Investigación y el Modelo de Alfabetización Estadística y Probabilística, cuyo autor es Gal. Las 11 facetas presentadas en cuanto a la Estadística Cívica, son de plena actualidad y conducentes, a profundizar en cada una como nuevas líneas de investigación.

Expande la Alfabetización Estadística y Probabilística, llevándola a la necesidad de la Alfabetización Computacional, mostrando el correlato necesario para la actualidad y más en la era de la Big Data, la Ciencia de Datos, que necesita de la Analítica, y por ende, de la comprensión e interpretación contextual de la Resolución de Problemas Complejos en procura de un enfoque integral, a la hora de diseñar algoritmos apropiados insesgados, más expandiendo hacia el campo enorme de la Inteligencia Artificial.

Enrique ÁLVAREZ, en su disertación titulada “**Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica Bayesiana en cursos de grado de Estadística**”, presenta una propuesta pedagógica en aras de introducir de manera simple la Estadística Bayesiana en carreras no específicas de Estadística y Matemática, pero que necesitan de sus fundamentos y aplicaciones; destacando su importancia en la Ciencia de Datos, pues a través de su vertiente de resolución, la Analítica, requiere de la más que sustantiva Estadística Bayesiana. El disertante sustenta su propuesta en estos pasos: 1) Presentar los fundamentos epistemológicos e intuitivos que originan a la Estadística Bayesiana; 2) Explicitar malentendidos comunes en cuanto a la Estadística Bayesiana; 3) Ilustrar el método de cálculo mediante ejemplos reales, concretos y simples. Enrique, dejó claramente expresada la importancia de la Estadística Bayesiana, sobre todo en procesos inferenciales.

Y ciertamente, la concepción bayesiana, tiene vital importancia, tal como quedó reflejado previamente en la Inteligencia Artificial Generativa, pero su recorrido se remonta en la Inteligencia Artificial, al núcleo de los Sistemas Basados en Conocimiento, y en particular, a un antecedente previo a ELIZA, los Sistemas Expertos, pues la propia definición del conocimiento privado, reflejado en el know-how humano, permitió, por ese entonces, el nacimiento del Razonamiento Aproximado y del Razonamiento Plausible, manifestándose mediante modelos de Razonamiento de Acumulación de Evidencia y Desacumulación de Evidencia, basados en la Inferencia Bayesiana y en Modelos Probabilísticos, para escalar a Modelos Posibilísticos y de Grados Confianza, entre otros.

Las cuatro visiones dejan, inicialmente, puntos específicos para mostrar distintos niveles de correlato, en el amplio campo de la Educación Estocástica, no sólo desde su fundamentación sino desde su implicancia en la Educación y en los últimos decenios en la convergencia entre Estadística y Probabilidad, Ciencia de Datos e Inteligencia Artificial, y así, poder generar reflexiones que permitan abrir nuevos puntos de interés para seguir avanzando. Por caso, la Ley de los Grandes Números ligada con la Teoría del Aprendizaje Estadístico tiene fuerte implicancia en la evolución del Machine Learning, por caso, a través del Principio EMR; lo ya vertido en términos del Razonamiento Aproximado, de la Ingeniería de Conocimiento, de los Sistemas Basados en Conocimiento, de la Teoría de Agentes,....., y sigue el derrotero hasta la Inteligencia Artificial Generativa, ....., y la historia continuará, probablemente, continuará.

## Referencias Bibliográficas

- Sagula, Jorge E. (2023).** Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico. En Memorias del IV SEM-V. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 11-12 mayo'2023. ISBN 978-987-3941-87-0. EDUNLU, mayo'2023.
- Zanakis, S. H. & Evans, J. R. (1981).** Heuristic “optimization”: Why, when, and how to use it. Interfaces, 11(5), 84-91.
- Gal, I. (2005).** Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas.
- Sagula, Jorge E. (2024).** La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG. En Memorias del V SEM-V. EDUNLU (en proceso de edición).

## La Fenomenología como Lugar del Sentido Común

La Fenomenología es esencialmente sentido común; sentido común, puro. La Fenomenología permite ver lo evidente que paradójicamente y pese a su condición de evidencia, no es visible a la conciencia habitual. En este tipo de operaciones mentales, observando el pensamiento estadístico, uno se percata de lo disímil que son los dos conceptos básicos de población, que W. E. Deming tan juiciosamente ha señalado (Hahn y Meeker, 1993). Sin embargo, la visión desprovista de prejuicios, tanto como sea posible –la famosa “epojé” de la fenomenología de Husserl– permite la consolidación del concepto de población en *una sola categoría de pensamiento* y la emergencia de un único concepto de población: la población como número aleatorio, en forma similar a la emergencia del concepto del número 0 (El Concepto de Población en Estadística, Hevia [en producción]). Sin duda alguna, el requerimiento de comprensión que exige este constructo único de población, es mayor y podría dificultar o facilitar, conforme sea el caso, el avance hacia nuevas fronteras del pensamiento. En 1960, Wahburn y Howell (Bruner, 1964) sostuvieron que: “la aventura del pensamiento en que la Humanidad se ve envuelta, se habría generado desde la familia de los homínidos y pareciera no tener límites”. Sólo lo inalcanzable aparece en el anhelado horizonte.

Nueva visión, nuevas interrogantes. La disponibilidad de “muy grandes masas de muy desordenada información”, (Moore, 1998, p. 1258), nos podría conducir a un nuevo y más amplio concepto de población y, también, a la búsqueda de insospechadas invariantes que permitan desarrollar una ciencia avanzada de datos. Por caso, (Hevia, 2024), deja en evidencia, bajo ciertas condiciones, la existencia de un efecto gravitatorio en los datos, el cuál podría “suavizarse” mediante un desarrollo teórico que lleve consigo el establecimiento de nuevos posibles “parámetros”.

El avance en el conocimiento se produce a través, tanto de categorizaciones como de diferenciaciones entre categorías (Bruner et al., 1978), pues importan ambas. Es posible que una de las dificultades que se presenta para alcanzar un buen entendimiento del denominado Pensamiento Estadístico, se deba a su imprescindible rol en la interpretación. En (Hevia, 2023), se planteó que la interpretación consiste en cruzar un universo de pensamiento, específicamente, el universo de pensamiento de la Estadística, para avanzar hacia un cierto universo de pensamiento donde se encuentran las unidades de análisis del estudio estadístico que se realiza y que constituye la realidad subyacente. Moore (1988, p. 4) señala que: “La estadística se preocupa de la recopilación, organización y análisis de los datos, y de las inferencias desde los datos a la realidad subyacente”. Esa es la preocupación, pero, distinto es el pensamiento estadístico. La interpretación (la inferencia), requiere del pensamiento estadístico, que el especialista estadístico hace brotar mediante la puesta en escena frente a la conciencia de los significados estadísticos que brinda un cierto artefacto estadístico; todo esto bajo el imperativo de la coherencia del universo de pensamiento que es la Estadística. Hevia (2023, p. 184), señala:

“El *pensamiento* es el agente que enlaza los objetos del discurso proporcionando racionalidad y coherencia en un sentido general; pero, a la vez, es peculiar y específico de cada universo de discurso”.

Y más adelante, avanza, expresando:

“El pensamiento estadístico es privativo de los estadísticos; el pensamiento matemático, es propio de los matemáticos. Frecuentemente, esta comprensión de los tipos de pensamiento ha llevado a establecer afirmaciones tales como ‘¿Qué es estadística? Estadística es lo que los estadísticos hacen’ (Tal, 2001, p. 9)”.

De tal manera, los significados estadísticos constituyen la sustancia sobre la cual opera el pensamiento estadístico, con el objetivo de construir, coherentemente, más significados estadísticos, nuevas y más avanzadas síntesis de este pensamiento. En (Hevia, 2024), por ejemplo, se ha asignado significado estadístico a la Ley de los Grandes Números expresando que (en versión simplificada, seguidamente):

**“una muestra aleatoria de tamaño  $n$  cae, en promedio, sobre  $\mu$ ; salvo error, el que se controla con  $n$ .”**

El desafío es cómo lograr la formación de un significado estadístico como el anterior, sin tener experiencias acordes al respecto. Según Husserl, esto es **imposible**.

Hevia (2023, p. 184), señala que:

“desde la fenomenología, significado es exclusivamente contenido. Husserl afirma, que un objeto es para la conciencia, lo que son sus significados; los cuales dicen relación directa con los contenidos de nuestra experiencia con ese objeto”.

Puede concluirse, parcialmente, que en esta última cita, podría estar encerrada la clave para la formación de genuino pensamiento estadístico. La experiencia con los datos junto con la experiencia provistos por los procedimientos estadísticos; lo que en Estadística se puede denominar, con extrema cautela, *el procesamiento estadístico de los datos*, es la *actividad* que por excelencia generaría la experiencia necesaria para la formación de los conceptos estadísticos y, por consiguiente, la formación de bases genuinas para el desarrollo del pensamiento estadístico. Pero, aquí surge una dificultad, un desliz cognitivo, una falacia que hace ya un tiempo se levanta invisible, obstaculizando el estudio del aprendizaje y el aprendizaje mismo. El procesamiento estadístico de los datos consideraba, sin mayor cuestionamiento (antes no había alternativa), las formas en que se desarrolla el aprendizaje en el ser humano –las que, hasta ahora, no han sufrido mayor cambio- pues estas formas son inherentes a nuestro proceso de evolución como especie, considerando, por tanto, fuerte arraigo en nuestra constitución. La falacia toma lugar al considerar que no hay menoscabo en el aprendizaje si el **resultado** del procesamiento estadístico de los datos se obtiene mediante algún procedimiento ajeno; por ejemplo, un software. Pero, esta forma de producir el resultado del procesamiento de los datos, se desarrolla de manera desconectada de nuestras formas ancestrales de aprender, que sólo se activan cuando los tres tipos de implementaciones externas señaladas por Bruner (1964), que han sido los motores de nuestra evolución como especie, están a disposición para una participación activa en la construcción de conocimiento. La superación de los efectos negativos que esta falacia produce en el aprendizaje, podría ser proporcionada por los recursos que hoy entregan las TIC. Las TIC que se dirigen al aprendizaje no pueden desconocer las formas en que nosotros, los seres humanos, aprendemos y que han sido las que nos han alejado de otros homínidos que no emprendieron la aventura del pensamiento en que ahora estamos envueltos.

Por otro lado, merced a los recursos que hoy brindan las TIC, se dispone, en general, de una profusión de datos, tanto observados como simulados, que nos permitirían acceder, por medio de *experiencias conducidas*, hacia la formación de conceptos estadísticos sólidos, basados en la experiencia con los datos, únicas experiencias que forman el pensamiento estadístico. En (Hevia, 2024), se advierte cómo conceptos tan abstractos como el error cuadrático medio de un estimador, se hacen tangibles mediante experiencias de simulación en una cierta planilla de cálculo. Dicho sea de paso, algunas planillas de cálculo se prestan notablemente para la activación de, al menos, dos de las implementaciones que en nuestra especie impulsan la formación del conocimiento.

## Referencias Bibliográficas

- Bruner, J. S. (1964). The course of cognitive growth. *American Psychologist*, Pp. 1–15.
- Bruner, J. S., Goodnow, J. J. y Austin, G. A. (1978). *El proceso mental en el aprendizaje*, Madrid: Nancea.
- Hahn, G. J. y Meeker, W. Q. (1993) Assumptions for Statistical Inference. *The American Statistician*, Vol 47, N° 1, Pp. 1-11.
- Hevia, H. (2022). La Idea de Modelo de Probabilidad de una Población. Libro digital *Cutting-edge research in mathematics and its applications*. Atena Editora DOI: 10.22533/at.ed.575221502 ISBN: 978-65-5983-957-5 <https://doi.org/10.22533/at.ed.575221502>
- Hevia, H. (2023). Pensamiento Estadístico: ¿Qué aportan las Matrices de Koestler? Memorias del IV Simposio de Educación Matemática Virtual, Paradigmas evolutivos en Educación Matemática: Conferencias y artículos / Editor Científico y Compilador: Jorge E. Sagula. Universidad Nacional de Luján. EDUNLU. Libro digital, PDF. ISBN 978-987-3941-87-0. Mayo'2024.
- Hevia, H. (2024). Redescubriendo el Pensamiento Estadístico desde la Fenomenología. Por aparecer en las *Memorias del V Simposio de Educación Matemática Virtual*.
- Moore, D. S. (1998). Statistics among the Liberal Arts. *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 93, N° 444, Pp. 1253-1259.
- Moore, D. S. (1988). Should Mathematicians Teach Statistics? *College Mathematics Journal*, 19, Pp. 3-7.

## El desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio en el contexto de la Estadística Cívica

La Estadística Cívica juega un rol fundamental en el desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio al brindar un contexto práctico y significativo para aplicar estas habilidades en la vida cotidiana. El pensamiento estadístico implica la capacidad de recopilar, analizar, interpretar y sacar conclusiones a partir de datos. La Estadística Cívica ayuda a desarrollar esta habilidad aplicando conocimientos de carácter estadístico en contextos reales e involucrando a los ciudadanos en el análisis de datos que afectan directamente a sus vidas, como la salud pública, la economía o las políticas sociales, entre otras disciplinas; esto permite una comprensión más profunda de la importancia de la estadística en el proceso de toma de decisiones. También contribuyen a mejorar el análisis de datos críticos, fomentando la evaluación crítica de la calidad de los datos, su origen, posibles sesgos y la validez de las conclusiones; esto mejora la capacidad de cuestionar e interpretar datos con conocimiento. Además, contribuyen a la interpretación de gráficos y tablas, proporcionando práctica en la interpretación de diferentes formas de presentación de datos, como gráficos, tablas e infografías, esenciales para el pensamiento estadístico. Con respecto al desarrollo del pensamiento probabilístico, que implica la comprensión de la incertidumbre, los riesgos y la capacidad de razonar sobre la probabilidad de eventos, la Estadística Cívica contribuye en este ámbito posibilitando la comprensión de los riesgos, incentivando la interpretación de las probabilidades y los riesgos en contextos cívicos, como la evaluación de riesgos ambientales, la salud pública o la seguridad. Esto ayuda a desarrollar una comprensión más profunda de las probabilidades y su relevancia práctica. También, ayuda a tomar decisiones en condiciones de incertidumbre, proponiendo problemas reales donde la incertidumbre es un factor, exigiendo a los ciudadanos que utilicen el pensamiento probabilístico para tomar decisiones informadas, mejorando la capacidad de razonar sobre la incertidumbre en forma lógica y estructurada. Finalmente, contribuye a establecer una distinción entre correlación y causalidad utilizando ejemplos del mundo real, resultando crucial para evitar inferencias incorrectas y mejorar el razonamiento probabilístico. En cuanto al desarrollo del pensamiento combinatorio, que implica la capacidad de razonar sobre combinaciones y disposiciones de elementos, esencial en varias áreas de las matemáticas y las ciencias, la Estadística Cívica contribuye a la resolución de problemas complejos, aplicando el pensamiento combinatorio para resolver problemas cívicos complejos, como por caso, la optimización de recursos en una comunidad o el análisis de diferentes escenarios en políticas públicas. También, prepara al estudiante para desarrollar prácticas guiadas por el modelado y la simulación, mediante el uso del pensamiento combinatorio para construir modelos o simulaciones que predicen diferentes resultados basados en varias combinaciones de factores, ayudando a comprender el impacto de múltiples variables que interactúan simultáneamente. Las Estadísticas Cívicas son igualmente útiles en el análisis de datos multidimensionales, fomentando el análisis de conjuntos de datos que involucran múltiples variables y sus interacciones, promoviendo el razonamiento combinatorio en la interpretación de estos datos.

Engel, Ridgway y Stein (2021, p. 1) afirman que “La democracia prospera en argumentos basados en evidencias. La desinformación e ignorancia son amenazas para nuestra forma de vida”. Los regímenes autoritarios se alimentan del miedo y la desinformación, difundiendo información falsa, generando confusión, dividiendo las personas y debilitando las instituciones rectoras de la democracia y la justicia social. En este proceso de corrosión lenta y gradual de la legitimidad de las instituciones, impulsado por el dinamismo de las redes sociales, las noticias falsas desempeñan un rol preponderante. Para confrontación de la distribución deliberada de desinformación o rumores por medio del periódico impreso, la televisión, la radio, o aún en línea, como en las redes sociales, utilizamos Estadísticas Cívicas. Nicholson, Gal y Ridgway (2018, p. 7), al abordar este modelo conceptual, destacan la faceta ‘significado para la sociedad y la política’, considerado por ellos como el “... corazón de la Estadística Cívica, donde el foco está en las implicaciones sociales de pruebas”. Nicholson, Gal y Ridgway (2018) argumentan que la capacidad de involucrarse con las Estadísticas Cívicas involucra once facetas distintas ((significado para la sociedad y la política; evaluación crítica y reflexión; disposiciones; estadística y riesgo; modelos, patrones y representaciones; metodología y procesos de indagación; ampliación sobre estadísticas oficiales; conocimiento cívico del contexto; TIC y búsqueda; núcleo cuantitativo; alfabetización y comunicación).

El conocimiento del contexto cívico es fundamental para el desarrollo de la alfabetización y el pensamiento estadístico, desde la perspectiva de la Estadística Cívica, pues surge de la intersección de tres grandes áreas del conocimiento humano, según Engel (2019): Política/Ciencias Sociales, Estadística y Pedagogía. Para Nicholson, Gal y Ridgway (2018), el conocimiento estadístico, en sus diversos niveles, depende de un conjunto de habilidades que deben mejorarse en el entorno escolar. Sin embargo, estas competencias, fundamentales para el ejercicio de la ciudadanía en la vida cotidiana, están ligadas a la voluntad de involucrarse con la Estadística Cívica. Los elementos disposicionales definen la voluntad de involucrarse y dedicar tiempo y energía para comprender mejor la información que se presenta continuamente en los más diversos medios. Esto implica, en el modelo de alfabetización estadística de Gal (2002) tanto creencias,

como actitudes y postura crítica. Similarmente, tres años después, Gal (2005) desarrolló un modelo de alfabetización probabilística.

Tanto la alfabetización estadística como la probabilística se sustentan en la perspectiva investigativa defendida por Wild y Pfannkuch (1999). El ciclo investigativo es una de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico, como observa acertadamente Gal (2002, p. 4): “Los contextos de lectura deberían distinguirse de los contextos de investigación en los cuales las personas (por ejemplo: estudiantes, estadísticos) realizan investigaciones empíricas sobre datos reales (Wild y Pfannkuch, 1999)”, una vez que “... estas personas sirven como “productoras de datos” o “analizadoras de datos” y por lo general, tienen que interpretar sus propios datos y resultados e informar sus hallazgos y conclusiones”. Según Wild y Pfannkuch (1999, p. 225): “Un ciclo PPDAC tiene que ver con la abstracción y resolución de un problema estadístico aterrizado en un problema más grande [...] La investigación movida por la pura curiosidad usualmente está justificada por la idea de que la comprensión acumulada tendrá a largo plazo beneficios prácticos”. Para esos autores: “Una solución al problema real basada en el conocimiento requiere de una mejor comprensión de cómo trabaja un sistema y, quizá también, cómo reaccionará a los cambios, a las corrientes de entrada, a las posiciones o al entorno [...] Las conclusiones de las investigaciones nutren a una base más extensa de conocimiento en contexto que puede informar de cualesquiera acciones”.

Lopes y Meirelles (2005, p. 3) enfatizan que las raíces de la Estadística provienen de diferentes áreas del conocimiento, llevándonos a la interdisciplinariedad, que capacita al estudiante para investigar cuestiones de otras áreas del conocimiento humano, integrando conceptos, procedimientos y metodologías, y agrega: “Para la efectividad del trabajo pedagógico interdisciplinario, creemos necesario desarrollar un proyecto educativo más integral, centrado en el trabajo en equipo”. Analizando una a una las posibles contribuciones de las Estadísticas Cívicas a través de las once facetas de su modelo conceptual, resulta:

**Faceta 1:** Preparación para el compromiso social. Un ciudadano estadísticamente culto puede tomar decisiones basadas en la evidencia, relacionando ideas de riesgo, valor esperado, representatividad, entre otras y para ello, es necesario brindar formación que promueva el compromiso y el conocimiento de la sociedad por medio de evidencia confiable. Esta faceta se considera cuando los estudiantes eligen temas de relevancia social, política, económica, social, histórica y ambiental, según lo prescripto por el BNCC (Brasil, 2018), documento que estandariza los currículos brasileños de Educación Básica (primaria y secundaria). La elección de un tema por parte del estudiante es fundamental para movilizar su interés y compromiso/participación, ejerciendo un rol investigador (Batanero y Díaz, 2011).

**Faceta 2:** Evaluación crítica y reflexión. Aun cuando se utilicen datos de fuentes responsables, es necesario realizar de modo natural una evaluación y una reflexión críticas. El desarrollo de la criticidad es uno de los aspectos esenciales para la formación de ciudadanos autónomos, capaces de impulsar las transformaciones necesarias para promover la igualdad y la justicia social (Freire, 2005).

**Faceta 3:** Disposiciones. Las actitudes reflejan una compleja red de valores, motivaciones y creencias. Tienen una dimensión social y ética con algunas componentes que influyen en el compromiso personal, tanto positiva como negativamente. Ignorar la evidencia basada en creencias, la aceptación acrítica de nueva información o la creencia dicente que sólo los expertos pueden entender los fenómenos sociales, son actitudes que pueden provocar problemas en el aprendizaje. La pandemia de CoVid-19 y el movimiento anticencia y antivacunas que desató constituyen un claro ejemplo sobre cómo los valores personales, étnicos, culturales, políticos e incluso religiosos son tan o más fuertes que los elementos cognitivos (Gal, 2002, 2005). Así, la participación activa de los estudiantes en el ciclo investigativo (y también, naturalmente, en el ciclo interrogativo) puede promover una mayor claridad sobre la importancia, el potencial y los límites de la ciencia (Wild y Pfannkuch, 1999).

**Faceta 4:** Estadística y riesgo. La Estadística Cívica implica la comprensión de ideas fundamentales de estadística: muestreo, población y representatividad, variabilidad, distribución, asociación y correlación, regresión, no linealidad, *Big Data*, entre otras, exigen la familiaridad con una variedad de fuentes de datos y técnicas de análisis asociadas, especialmente las utilizadas para detectar patrones y regularidades. La participación de los estudiantes en experimentos estadísticos, probabilísticos y de simulación que exploren recursos computacionales es fundamental para desarrollar la alfabetización y el pensamiento probabilístico, no limitado a la perspectiva de la probabilidad clásica o laplaciana (pues la idea artificial de equiprobabilidad conduce al surgimiento de la epistemológica), pero explorando tanto la perspectiva frecuentista como la perspectiva subjetiva de la Probabilidad (Gal, 2005).

**Faceta 5:** Modelos y representaciones. Modelar fenómenos sociales complejos, permite utilizar diferentes modelos para analizar el mismo fenómeno. Por tanto, es necesario formar la capacidad de identificar y comprender modelos, con los supuestos básicos que los sustentan. Todo tiene que ver con interpretar críticamente representaciones y visualizaciones sofisticadas, incluidas aquellas que son dinámicas e interactivas, desde un punto de vista descriptivo-exploratorio. Es importante promover, paralelamente a la alfabetización estadística, probabilística y combinatoria, la alfabetización computacional. Actualmente, incluso en escuelas sin acceso a computadoras, es posible explorar *softwares* y aplicaciones utilizando los

teléfonos celulares de los estudiantes, para desarrollar los niveles de lectura de gráficos estadísticos de Curcio (1987) y Friel; Curcio y Bright (2001).

**Faceta 6:** Metodología y proceso de investigación. Esta faceta está ligada a la Faceta 5, relacionando elementos como: sesgo, variabilidad y aleatorización. Incluye la comprensión de cuestiones éticas relacionadas con la producción de datos y la necesidad de conocer cuestiones de confidencialidad y protección de los ciudadanos que movilizan elementos disposicionales de la alfabetización estadística y probabilística de Gal (2002, 2005).

**Faceta 7:** Extensiones en el área de estadísticas oficiales. Las estadísticas oficiales son fuentes de datos sobre temas de relevancia social. Muchas de las ideas clave que utilizan reciben escasa atención en los cursos tradicionales de estadística, tales como: diseño de encuestas (falta de respuesta o sesgo en la respuesta), problemas de medición (confiabilidad y validez, definición de metadatos), definición y significado de índices, operacionalización de variables y su relación con el constructo teórico del cual se parte y los modelos que permiten analizarlas. Actualmente, en el momento de turbulencia política que atraviesa Brasil, con una polarización política izquierda-derecha, es fundamental contrastar datos oficiales con información estadística de otras fuentes, como organizaciones no gubernamentales, universidades, periodistas de investigación, etc. Sólo con un amplio abanico de posibilidades, los estudiantes son capaces de formar para sí, una opinión de forma asertiva, basada en datos científicos.

**Faceta 8:** Conocimiento social contextual. La estadística se basa en la modelización; pero para modelar, se requiere una comprensión básica de los fenómenos que se modelan: conocimiento general como tamaño de la población, tamaño del producto nacional bruto, deuda nacional y recursos; demografía; derechos humanos y vulnerabilidad de las minorías, historia y geografía; regional y geopolítica. El conocimiento contextual es fundamental (Gal 2002, 2005).

**Faceta 9:** Tecnologías de la información y comunicación e investigación de la información. Muchos proveedores de estadísticas oficiales hacen que los datos estén disponibles al público, los cuales requieren conocimientos especializados y habilidades de uso de las tecnologías digitales. Es posible que los datos deban limpiarse, ordenarse, transformarse, agregarse o desagregarse. Todo ello implica distintos aprendizajes que deberían fomentarse por medio de las propuestas de enseñanza. En tiempos de infodemia y *fake news*, la capacidad de argumentar en forma asertiva, basada en evidencia científica, seleccionando fuentes confiables de información, cruzando datos a través de las TIC es fundamental para estructurar el pensamiento estocástico.

**Faceta 10:** Núcleo cuantitativo. Las habilidades cuantitativas son la base de todos los aspectos de la cultura estadística. Estas habilidades incluyen la comprensión de números, razones, porcentajes, tasas y fracciones. Gal (2002, 2005) considera esta necesidad al establecer, entre los cinco elementos cognitivos de la alfabetización estadística y probabilística, además de los conocimientos sobre lenguaje, estadística, probabilidad y contexto, los conocimientos matemáticos.

**Faceta 11:** Comprensión de textos y comunicación. En muchos casos, la información se presenta como un texto y para que el mismo no resulte denso, se acompaña de diagramas o representaciones. Así, la habilidad para comprender el texto está asociada a la comprensión de las representaciones, que en términos de Wild y Pfankuch (1999) puede describirse como procesos de transnumeración, relacionado con la habilidad de comunicar conclusiones de forma comprensible y fundamentada en la evidencia, articulando conocimientos sobre el lenguaje (con énfasis en el lenguaje científico) y conocimientos matemáticos, con cambios en la representación (tablas, gráficos, medidas de tendencia central y dispersión). Incluso al optar por un determinado tipo de gráfico, es necesario comprender qué se gana y qué se pierde, qué resalta y qué esconde cada elección gráfica. La transnumeración implica pérdidas y ganancias. Esto no siempre se explora éticamente. Frecuentemente, está detrás de un intento de manipular la información. Friel; Curcio y Bright (2001), explican que es necesario no sólo leer detrás de los datos, sino leer más allá de los datos expuestos en un gráfico estadístico.

Durante mucho tiempo, la enseñanza de Estadística en Brasil se limitó a un enfoque técnico y procedimental, dando prioridad a la Estadística Descriptiva, en detrimento de la Inferencia Estadística, dissociada de la Probabilidad. Esto, a su vez, se presentó desde una perspectiva laplaciana, con el sesgo de la equiprobabilidad, como una extensión natural de la Combinatoria. Este último, a su vez, se limitó a la exploración de permutaciones, arreglos y combinaciones, mediante situaciones descontextualizadas o asociadas a contextos artificiales. La articulación de estos tres campos del conocimiento estocástico desde la perspectiva de un enfoque de ciclo investigativo (PPDAC) con la investigación autoral, que sitúa al estudiante como protagonista, ofrece nuevas posibilidades para la exploración y desarrollo del pensamiento estocástico. Las Estadísticas Cívicas hacen que el aprendizaje estadístico, probabilístico y combinatorio sea más accesible y relevante al conectarlo directamente con cuestiones que afectan a la sociedad. Al aplicar estos conceptos a situaciones del mundo real, la Estadística Cívica no sólo desarrolla habilidades técnicas, sino que también promueve una ciudadanía más informada, capaz de participar activamente en el proceso democrático. El modelo de Estadística Cívica, con sus once facetas, ofrece al docente nuevas posibilidades

didácticas que amplían el alcance del conocimiento estocástico, acercando los enfoques de enseñanza a la realidad política, social, económica, cultural, ambiental e histórica necesaria para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

## Referencias Bibliográficas

- Batanero, C., Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-18). Grupo FQM-126.
- Engel, J., Ridgway, J., Stein, F. W. (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *Paradigma*, 42, 1-31.
- Freire, P. (2005). *Pedagogia da autonomia – saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.
- Lopes, C. E. e Meirelles, E.O. (2005). Desenvolvimento da probabilidade e da estatística. In *VIII Encontro Regional de Professores de Matemática LEM/IMECC/UNICAMP* (pp. 1-8). UNICAMP.
- Nicholson, J., Gal, I., Ridgway, J. (2018). *Understanding Civic Statistics: A Conceptual Framework and its Educational Applications*. A product of the ProCivicStat Project.
- Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

### Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica y Bayesiana en cursos de grado de Estadística

En el contexto del GTD “Educación Estocástica” se han desarrollado disertaciones (una central y tres invitadas), si bien, contextualmente diferentes, visiblemente unidas por el eje temático de la sesión, y allende dicho eje. En las mismas, se realizó el pertinente esfuerzo por transmitir ideas sobre cómo mejorar la enseñanza de la probabilidad y la estadística tanto para alumnos de distintos niveles educativos como para el público en general, hecho cabalmente enfatizado en cuanto a su necesidad debido la creciente difusión e interés general, a veces exagerado, por las herramientas de Inteligencia Artificial.

En mi disertación, específicamente, abordé de la forma más sencilla posible, una metodología de enseñanza sobre los fundamentos filosóficos y a más de ellos, propios del sentido común en cuanto a las dos escuelas predominantes en Estadística, la Escuela Frecuentista y la Escuela Bayesiana. Ambas escuelas comparten la noción estocástica en su esencia, pues para que cualquiera de ellas tenga sentido es necesario suponer que la muestra en la que se basará la inferencia ha sido determinada en forma recolectada aleatoria. Bajo este supuesto, la estimación frecuentista se pregunta: “¿cómo tendrían que ser los parámetros de la población, sobre la cual se extrajo la muestra, a efectos que esta última resulte lo más típica posible?”. En cambio, en la Estadística Bayesiana los parámetros se ven como magnitudes, que, si bien son desconocidos para la población en cuestión, se tiene algún conocimiento o presunción previa de sus posibles valores. Esa información, más débil o más fuerte conforme sea el caso, se expresa mediante una distribución *a priori*, la cual (vale enfatizar) refleja todo lo que se sabe (o cree) sobre los parámetros **antes** de observar la muestra aleatoria nueva. Luego, al tomarse nuevos datos se construye la distribución *a posteriori*, que actualiza el conocimiento previo, pudiendo convalidarlo o contradecirlo. En tal sentido, cuando hay contradicción, se puede interpretar el método Bayesiano como la forma de cambiar un paradigma a la luz de nueva evidencia.

Dentro de este marco conceptual, es relevante remarcar que ambos métodos, Frecuentista y Bayesiano, son naturalmente válidos y útiles para la Inferencia Estadística. La principal diferencia, es que el método Bayesiano permite utilizar en el proceso, información *ad-hoc*, mientras que el método frecuentista sólo utiliza la muestra y ciertos supuestos sobre la forma de la población de la cual ella surgió.

Como consecuencia fundamental de la exposición se sugirió la ventaja de enseñar de una forma que evite un excesivo desvío en detalles matemáticos de cálculo, las bases epistemológicas de ambas escuelas; de tal forma, permitiría enseñarla en cursos iniciales de grado universitario, en lugar de posponer su enseñanza a cursos especializados de postgrado o afines. Esta propuesta tiene, de parte del disertante, años de desarrollo en cursos de grado.

### **Referencias Bibliográficas**

- Hoff, P. D. (2009). A First Course in Bayesian Statistical Methods. Springer.  
Ntzoufras, I. (2009). Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley.  
Robert, C. P. (2007). The Bayesian Choice. Springer.  
Wasserman, L. (2005). All of Statistics, Springer, NY.

ISBN 978-987-9285-54-1



9 789879 285541