



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Memorias

“Tendencias en investigación
En Educación Matemática”

Conferencias
y
Artículos

MAYO'2024



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Memorias del V SEM-V Mayo'2024

Editor Científico: Jorge E. SAGULA

Compilador: Jorge E. SAGULA

Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

Sagula, Jorge E.

V Simposio de Educación Matemática-Virtual : memorias : tendencias en investigación en Educación Matemática / Jorge E. Sagula. - 1a ed - Luján : EdUnLu, 2024.

Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-631-6582-10-2

I. Matemática. I. Título.

CDD 510.711



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Prólogo

El día 16 de mayo de 2024, y en su mes histórico, durante dos días, en modalidad virtual sincrónica, y con vertiginoso ritmo académico, comenzará su recorrido en la Educación Matemática, la 5ª edición del SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo pasado, en el mes de mayo del año 1999, en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján, y que, a pesar del período de discontinuidad, celebra sus Bodas de Plata, sus 25 años, pues el modelo creado representa el enlace entre la Educación Matemática y la comunidad, reflejada en sus niveles educativos.

La idea original, concebida en 1998 y testeada en distintos escenarios de la Educación Superior no sólo en ámbitos académicos de Argentina sino en distintos países del Continente Americano y en Europa, y como consecuencia de mis participaciones en diferentes espacios de Educación Matemática fuera de Argentina, permitió sembrar semillas cognitivas y regarlas con diferentes enfoques y modalidades para potenciar a la Matemática en un país tenedor de Tres (3) Premios Nobel en Ciencias, y cuyo derrotero en Matemática, en general, tuvo momentos de alto reconocimiento y posicionamiento en varios países de América y Europa, y aún hoy, lo sigue siendo, más allá de todo tipo de avatares.

La disruptiva pandemia CoViD-19, en el posicionamiento de la virtualidad como medido de reducción del aislamiento, posibilitó el renacimiento del constructo del SEM, pero ya sin el recorrido físico en la sociabilización de los docentes e investigadores, sino mediados por la Modernidad Líquida, pero potenciando los sentidos del habla, de la audición y en muchos casos, del tacto en la escritura, y así poder trabajar en Aprendizaje por Refuerzo, de modo de propender a la mejora continua sin singularidades de la Educación en general; esclareciendo que se trata de los tres mismos sentidos que se utilizan en clases convencionales en un proceso de construcción del conocimiento en la modalidad presencial. Así, el encuentro de profesores-investigadores, en distintas líneas y desde distintos enfoques y puntos de vista, ha permitido tener encendida “la llama del aprendizaje” en el campo de la Educación Matemática.

Por tal razón, y comprometido con el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje en el campo de la Educación Matemática, ratifico el compromiso inicial, y así las cosas, el SEM cumplirá 25 años, un cuarto de siglo, que precisamente comenzó en el siglo pasado y vislumbró al siglo de la comunicación y la potenciación del conocimiento, y entonces, desde la Universidad Nacional de Luján, se acercará a la Comunidad de la Educación Matemática esta nueva edición, el V SEM-V, para potenciar su derrotero, y este año, su leitmotiv es: “TENDENCIAS EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”, cuyo objetivo es la trascendencia, y por ende, la aplicación del conocimiento en todos los niveles educativos, con el propósito de enriquecer a la disciplina y servir al resto de las disciplinas.

Jorge E. SAGULA
Chivilcoy, 19 de abril de 2024.



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

V Simposio de Educación Matemática-Virtual (V SEM-V) "TENDENCIAS EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Universidad Nacional de Luján - Modalidad Virtual
16 y 17 de mayo de 2024

Director Académico
Jorge E. SAGULA

PROGRAMA GENERAL
Jueves 16 de mayo de 2024

09:00-09:30 horas
CEREMONIA INAUGURAL

09:30-11:00 horas
PANEL DE APERTURA
**"TENDENCIAS ACTUALES EN INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"**

Diferencias y similitudes entre teorías de Educación Matemática
Dr. Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Límites y posibles complementariedades entre teorías
de la Educación Matemática
Dr. Rodolfo VERGEL CAUSADO
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría
Histórico-Cultural de la Actividad
Dr. Juan DÍAZ GODINO
Universidad de Granada, España

La importancia del uso de recursos didácticos metodológicos en la
Educación Matemática y la importancia del conocimiento
pedagógico para el profesor de Matemática
Dra. Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

Moderador
Lic. Jorge E. SAGULA
Universidad Nacional de Luján, Argentina



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

11:00-13:00 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-1 MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.1

El diseño de tareas de modelización Inteligencia Artificial

Dr. Marcel POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

CONFERENCIA CENTRAL GTD-1.2

Modelización Matemática y Aplicaciones

Dr. Juan E. NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste y UTN-FRRes, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.1

Transformación de problemas en tareas de modelización matemática

Mg. Jaime CAMAÑO

Universidad del Sucre, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.2

¿Estamos todos de acuerdo en que las matemáticas son formales?

Dr. Rubén Gustavo PACCOSI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

14:00-14:45 horas

CONFERENCIA CA.1

Didáctica de la Matemática como disciplina científica:

teorías y relaciones entre teorías

Dr. Bruno D'AMORE

NRD-Universidad de Bologna, Italia

Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

14:45-15:30 horas

CONFERENCIA CA.2

Didáctica de la Geometría en la Enseñanza:

Conexión entre Lenguajes, Comunicación y Argumentación

Dr. Marcos BARRA

Universidad Alberto Hurtado, Chile



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

15:30-17:30 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-2 DIDÁCTICA MATEMÁTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-2.1

Momentos del trabajo del profesor de matemática,
en función del rol asumido

Dra. Mabel RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.1

La comprensión de objetos geométricos con nuevos recursos

Dra. Estefanía CALVO

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.2

Consideraciones/aportes para el diseño de una propuesta didáctica para un curso
inicial de Álgebra para la formación docente

Dr. Gustavo CARNELLI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.3

Algunas reflexiones sobre un curso de educación matemática
destinado a docentes del nivel superior

Dr. Fabián ESPINOZA

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

17:30-18:15 horas

CONFERENCIA CA.3

¿Es posible transformar el aula en un escenario
en base a los estilos de aprendizaje de los alumnos?

Desafío que nos interpela en nuestro rol docente

Dra. Adriana María del Huerto ENGLER

Universidad Nacional del Litoral, Argentina

18:15-19:00 horas

CONFERENCIA CA.4

CognoTecnoEmoción: mediaciones tecnológicas de la emocionalidad
en el desarrollo del pensamiento matemático

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Universidade de Ouro Preto, Brasil



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

Viernes 17 de mayo de 2024

09:00-09:45 horas

CONFERENCIA CA.5

Experiencias sobre Análisis de Recursos Educativos
en la Formación del Profesorado

Dr. Roberto VIDAL CORTES

Universidad Alberto Hurtado, Chile

09:45-10:30 horas

CONFERENCIA CA.6

Transformación del Trayecto Profesional Docente en Educación Matemática
desde la perspectiva de la Investigación Metodológica

Dr. Rafael LORENZO MARTÍN

Universidad de Holguín, Cuba

10:30-11:15 horas

CONFERENCIA CA.7

Optimización Didáctica en Matemática:
Directrices ante los errores de los alumnos

Dr. Miguel DELGADO PINEDA

UNED, España

11:15-13:15 horas

**GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-3
CREATIVIDAD EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA**

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.1

Conhecimento Pedagógico do professor de Matemática
e sua influência no desenvolvimento do Pensamento Matemática

Dra. Cláudia L. OLIVEIRA GROENWALD

Universidade Luterana de Brasil, Brasil

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3.2

Ensino de Matemática por meio de jogos e atividades lúdicas:
experiências de professores brasileiros da escola primária

Mg. Helcio SOARES PADILHA Jr.

Universidade Luterana de Brasil, Brasil

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.1

O papel dos jogos online na formação do pensamento matemático

Dr. Agostinho Iaquan RYOKITI HOMA

Universidade Luterana de Brasil, Brasil



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.2

Ebooks animados para o ensino de matemática
nos anos iniciais do Ensino Fundamental
Dra. Edvonete SOUZA de ALENCAR
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.3

Videojuegos comerciales en el aula de matemáticas: una guía práctica
Dr. Lluís ALBARRACÍN GORDO
Universitat Autònoma de Barcelona, España

14:30-16:30 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-4 EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-4.1

La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG
Lic. Jorge E. SAGULA
DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.1

Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico,
desde la visión de la Fenomenología
Dr. Héctor HEVIA
Universidad Alberto Hurtado, Chile

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.2

El desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio
en el contexto de la Estadística Cívica
Dr. Cassio GIORDANO
Universidade Federal do Rio Grande, Brasil

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.3

Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica y Bayesiana
en cursos de grado de Estadística
Dr. Enrique ÁLVAREZ
Universidad Nacional de Luján, Argentina



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

16:30-17:15 horas

CONFERENCIA CA.8

(Des)haciendo Matemática:

Aportes para el estudio del conocimiento matemático para enseñar

Dr. Gabriel SOTO

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

17:15-18:00 horas

CONFERENCIA CA.9

Innovación como resultado de investigación
de la Visión Etnomatemática de Ubiratán D'Ambrosio

Dr. José Alfredo CASTELLANOS SUÁREZ

Universidad Autónoma Chapingo, México

18:00-19:30 horas

PANEL DE CLAUSURA

**“INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA:
¿UNIDIRECCIONALIDAD O BIDIRECCIONALIDAD?”**

Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: Explorando fronteras

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ

Programa de Posgrado en Educación Matemática
Universidade de Ouro Preto, Brasil

La Nueva Educación, los retos para el maestro actual
en la era de la Inteligencia Artificial

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ

Universidad Nacional de Trujillo, Perú

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

La Inteligencia Artificial y la Investigación en Matemática

Dr. Juan NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA

Dr. Marcel POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Programa General

Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?

Lic. Jorge E. SAGULA

DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina

Moderadora

Lic. Emma L. FERRERO

Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas

Universidad Nacional de Luján, Argentina



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Índice Referencial

1ª Parte: PANELES

PA: Panel de Apertura

PC: Panel de Clausura

2ª Parte: CONFERENCIAS

CA: Contexto Abierto

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-1-MRP: Modelización y Resolución de Problemas

GTD-2-DM: Didáctica Matemática

GTD-3-CEM: Creatividad en Educación Matemática

GTD-4-EE: Educación Estocástica

3ª Parte: ARTÍCULOS

CA: Contexto Abierto

IEM: Investigación en Educación Matemática

TEM: Tecnología en Educación Matemática

GTD: Grupo de Trabajo-Discusión

GTD-2-DM: Didáctica Matemática



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 1

Panel-Apertura: TENDENCIAS ACTUALES EN INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Bruno D'AMORE

Diferencias y similitudes entre teorías de Educación Matemática

Rodolfo VERGEL CAUSADO

Límites y posibles complementariedades entre teorías de la Educación Matemática

Juan DÍAZ GODINO

Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad

Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD

La importancia del uso de recursos didácticos metodológicos en la Educación Matemática y la importancia del conocimiento pedagógico para el profesor de Matemática

Página 4

Panel-Clausura: INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA: ¿UNIDIRECCIONALIDAD O BIDIRECCIONALIDAD?

Fredy E. GONZÁLEZ

Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: Explorando fronteras

Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ

La Nueva Educación, los retos para el maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial

Juan E. NÁPOLES VALDES

La Inteligencia Artificial y la Investigación Matemática

Marcel D. POCHULU

Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA

Jorge E. SAGULA

Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?

Página 8

CA-Conferencia 1: Bruno D'AMORE

Didáctica de la Matemática como disciplina científica: teorías y relaciones entre teorías

Página 15

CA-Conferencia 2: Marcos BARRA BECERRA

Didáctica de la Geometría en la Enseñanza: Conexión entre Lenguajes, Comunicación y Argumentación



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 18

CA-Conferencia 3: Adriana María del Huerto ENGLER

¿Es posible transformar el aula en un escenario en base a los estilos de aprendizaje de los alumnos?: Desafío que nos interpela en nuestro rol docente

Página 27

CA-Conferencia 4: Fredy E. GONZÁLEZ

Cognotecnemoción: mediaciones tecnológicas de la emocionalidad en el desarrollo del pensamiento matemático

Página 28

CA-Conferencia 5: Roberto VIDAL CORTÉS

Experiencias sobre Análisis de Recursos Educativos en la Formación del Profesorado

Página 29

CA-Conferencia 6: Rafael LORENZO MARTÍN

Transformación del Trayecto Profesional Docente en Educación Matemática desde la perspectiva de la Investigación Metodológica

Página 30

CA-Conferencia 7: Miguel DELGADO PINEDA

Optimización Didáctica en Matemática: Directrices ante los errores de los alumnos

Página 53

CA-Conferencia 8: Gabriel R. SOTO

(Des)haciendo Matemática: Aportes para el estudio del conocimiento matemático para enseñar

Página 61

CA-Conferencia 9: José Alfredo CASTELLANOS SUÁREZ

Innovación como resultado de investigación de la Visión Etnomatemática de Ubiratán D'Ambrosio

Página 70

GTD-1-Conferencia Central GTD-1.1: Marcel D. POCHULU

El diseño de tareas de modelización con Inteligencia Artificial

Página 77

GTD-1-Conferencia Central GTD-1.2: Juan E. NÁPOLES VALDES

Modelización Matemática y Aplicaciones



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 78

GTD-1-Disertación Invitada GTD-1.1: Jaime CAMAÑO

Transformación de problemas en tareas de modelización matemática

Página 84

GTD-1-Disertación Invitada GTD-1.2: Rubén Gustavo PACCOSI

¿Estamos todos de acuerdo en que las matemáticas son formales?

Página 85

GTD-2-Conferencia Central GTD-2.1: Mabel RODRÍGUEZ

Momentos del trabajo del profesor de matemática, en función del rol asumido

Página 90

GTD-2-Disertación Invitada GTD-2.1: Estefanía CALVO

La comprensión de objetos geométricos con nuevos recursos

Página 96

GTD-2-Disertación Invitada GTD-2.2: Gustavo CARNELLI

Consideraciones/aportes para el diseño de una propuesta didáctica para un curso inicial de Álgebra para la formación docente

Página 104

GTD-2-Disertación Invitada GTD-2.3: Fabián ESPINOZA

Algunas reflexiones sobre un curso de educación matemática destinado a docentes del nivel superior

Página 109

GTD-3-Conferencia Central GTD-3.1: Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD

Conhecimento Pedagógico do professor de Matemática e sua influência no desenvolvimento do Pensamento Matemático

Página 110

GTD-3-Conferencia Central GTD-3.2: Helcio SOARES PADILHA Junior

Ensino de Matemática por meio de jogos e atividades lúdicas: experiências de professores brasileiros da escola primária



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Paneles y Conferencias - Índice

Página 116

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.1: Agostinho Iaquan RYOKITI HOMA

O papel dos jogos online na formação do pensamento matemático

Página 117

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.2: Edvonete SOUZA de ALENCAR

Ebooks animados para o ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Página 118

GTD-3-Disertación Invitada GTD-3.3: Lluís ALBARRACÍN GORDO

Videojuegos comerciales en el aula de matemáticas: una guía práctica

Página 124

GTD-4-Conferencia Central GTD-4.1: Jorge Enrique SAGULA

La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG

Página 129

GTD-4-Disertación Invitada GTD-4.1: Héctor HEVIA

Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico, desde la visión de la Fenomenología

Página 137

GTD-4-Disertación Invitada GTD-4.2: Cassio GIORDANO

El desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio en el contexto de la Estadística Cívica

Página 145

GTD-4-Disertación Invitada GTD-4.1: Enrique ÁLVAREZ

Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica y Bayesiana en cursos de grado de Estadística



V SIMPOSIO
DE EDUCACIÓN
MATEMÁTICA
VIRTUAL

Artículos - Índice

Página 146

CA-IEM-1: Análisis de las ideas previas sobre la definición de polígono de estudiantes para Maestro de Educación Primaria

**Myriam CODES, Juan Pedro MARTÍN-DÍAZ, M^a. Isabel PASCUAL,
Luis Carlos CONTRERAS**

Página 153

CA-TEM-1: Tareas con GeoGebra y desempeño competencial en carreras de ingeniería

Betina WILLINER

Página 162

GTD-2-DM-1: Uso de TIC en estudiantes iniciales del nivel superior que resuelven problemas matemáticos

Gustavo CARNELLI, Martín CHACÓN

Página 170

GTD-2-DM-2: Actividades para el aprendizaje de la matemática con TIC: discusión acerca de un uso pertinente y significativo

Gustavo CARNELLI, Martín CHACÓN

PANEL DE APERTURA
“TENDENCIAS ACTUALES EN INVESTIGACIÓN
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Dr. Bruno D'AMORE
NRD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Diferencias y similitudes entre teorías de Educación Matemática

Exactamente como sucede en los distintos campos específicos de la Matemática, a lo largo de las décadas se han sucedido evidentemente numerosos estudios teóricos, sobre todo basados en diversos resultados de investigaciones empíricas y/o en campos de estudio y análisis específicos. Imposible enumerarlos y comentarlos todos. Nos limitamos a una lista (no cronológica, salvo la número 1) sólo para dar una idea de la multiplicidad de campos de estudio. Además del tema y/o nombre de la teoría, incluimos el nombre del investigador quien es para nosotros el exponente más significativo del estudio específico. Se ha convertido casi en una costumbre (no absoluta) dar el nombre de “teoría” a estos campos de investigación o modos de interpretar los resultados (a menudo empíricos) obtenidos, como hizo Guy Brousseau al comienzo de su aventura científica.

1. Teoría de las situaciones (Guy Brousseau).
2. Teoría antropológica de la didáctica (Yves Chevallard).
3. Constructivismo (Ernst von Glaserfeld (1917–2010)).
4. Fenomenología didáctica (Hans Freudenthal (1905–1990)).
5. Dialéctica instrumento – objeto (Régine Douady (1935–2006)).
6. Modelo Van Hiele sobre enseñanza – aprendizaje de la geometría (Dina van Hiele Geldof (1912 – 1958) y Pierre van Hiele (1909 – 2010) (modelo 1957)).
7. APOS [Acciones, Procesos, Objetos (mentales), Esquemas (cognitivos)] (Edward Dubinsky (1935 – 2022)).
8. Interaccionismo didáctico (Heinrick Bauersfeld (1926 – 2022)).
9. La naturaleza del aprendizaje matemático (Tommy Dreyfus).
10. Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (Richard Skemp (1919 – 1995)).
11. Teoría de los conceptos figurales (Efraim Fischbein (1920 – 1998)).
12. Tres mundos de la matemática: conceptual, operacional, axiomático (David Tall).
13. Teoría de los campos conceptuales (Gérard Vergnaud (1933 – 2021)).
14. Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos (Paolo Boero).
15. Enfoque instrumental de la educación matemática (Pierre Rabardel (1945 – 2021)).
16. Commognition (comunicación – cognición) (Anna Sfard).
17. Enfoque socio–epistemológico – Matemática Educativa (Ricardo Cantoral (1958 – 2021)).
18. Teoría de los registros semióticos (dimensión semio-cognitiva) (Raymond Duval).
19. Enfoque ontosemiótico EOS (Juan Godino).
20. Haz semiótico (Ferdinando Arzarello).
21. Mediación semiótica (Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti).
22. Teoría de la objetivación (Luis Radford).

Se realizó en el NRD de Bolonia recientemente un análisis detallado, pero extremadamente conciso, de cada una de estas teorías (Asenova y otros, 2023).

Naturalmente, ya existen muchos estudios teóricos y también investigaciones empíricas destinadas a resaltar las similitudes y diferencias entre estas teorías, por ejemplo, en función con los fines para los cuales nacieron. Algunos análisis pretenden captar las diferencias entre estas teorías, otros quieren compararlas de manera positiva y constructiva, basándose en los resultados más significativos obtenidos.

Dos estudios analíticos generales que consideramos particularmente significativos desde este punto de vista son los de Prediger, Bikner–Ahsbahs y Arzarello (2008) y de Bikner–Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue y Sabena (2010).

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2023), *Teorie rilevanti in didattica della matematica*, Bologna: Bonomo. [Idioma español: 2024, Bogotá: Magisterio].

Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Bikner–Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145–175. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Dr. Rodolfo VERGEL CAUSADO

Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Límites y posibles complementariedades entre teorías de la Educación Matemática

Sobre la base Vygotskiana, según la cual a través de los otros llegamos a ser nosotros mismos, se sugiere que la comprensión de una teoría, necesariamente exige el diálogo con otras aproximaciones teóricas para comprender qué las diferencia, cuáles son sus fundamentos epistemológicos y ontológicos y qué posibles puntos de contacto se pueden identificar. Desde estos presupuestos, en este texto pretendo discutir los límites y posibles complementariedades entre algunas teorías en educación matemática. Específicamente la discusión se centra en describir diversas teorizaciones que se han propuesto, explícita e implícitamente, sobre las categorías de sujeto, actividad, aprendizaje, saber y conocimiento en algunas aproximaciones teóricas del campo de la Educación Matemática (Teoría de la Objetivación, TO, Enfoque Ontosemiótico, EOS, Teoría de Situaciones Didácticas, TSD) no para hacer comparaciones ni para estratificar las teorías, sino para analizar posibles complementariedades y sus repercusiones para la investigación en educación matemática. Más específicamente, se pretende esgrimir elementos de respuesta a preguntas como las siguientes: ¿Cómo se articulan teóricamente las categorías de saber, conocimiento y aprendizaje? ¿Qué repercusiones para la investigación en educación matemáticas tiene conceptualizar el sujeto como una entidad psicológica o como una entidad histórico-cultural

o como sujeto epistémico o teórico? Desde algunas aproximaciones teóricas (TO, TSD, EOS), ¿Cuál es la conceptualización que se propone sobre la categoría Actividad y cómo incide dicha conceptualización en la sistematización y análisis de datos de investigación?

Juan DÍAZ GODINO
Universidad de Granada, España

Comprendiendo las teorías como sistemas de actividad en el marco de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad

Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana de Brasil, Brasil

La importancia del uso de recursos didácticos metodológicos en la Educación Matemática y la importancia del conocimiento pedagógico para el profesor de Matemática

O uso de recursos didáticos metodológicos na Educação Matemática é fundamental para promover uma aprendizagem significativa e engajadora. Esses recursos podem incluir materiais concretos, tecnologias educacionais, jogos, atividades práticas e estratégias de ensino que auxiliam os alunos na compreensão dos conceitos matemáticos de forma mais concreta e contextualizada.

Ao incorporar recursos didáticos metodológicos na prática pedagógica, os professores podem criar ambientes de aprendizagem dinâmicos e estimulantes, nos quais os alunos sintam-se motivados a explorar e aprofundar seu conhecimento matemático. Além disso, esses recursos podem ajudar a tornar os conceitos matemáticos compreensíveis para os alunos, especialmente aqueles que têm dificuldades de aprendizagem ou que aprendem de maneira mais visual ou prática.

É importante que os recursos didáticos metodológicos sejam escolhidos e utilizados de forma criteriosa, levando em consideração os objetivos de aprendizagem, o perfil dos alunos e as características do conteúdo a ser ensinado. Eles devem ser integrados de maneira coesa ao planejamento de aula, complementando e enriquecendo as atividades de ensino e aprendizagem.

Defende-se que os recursos didáticos metodológicos desempenham um papel essencial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, proporcionando oportunidades para os alunos construírem significados, desenvolverem habilidades e se engajarem ativamente com os conceitos matemáticos.

Salienta-se que para o professor utilizar recursos didáticos em seu planejamento didático é importante que o professor tenha desenvolvido um conhecimento pedagógico da sua disciplina escolar.

Nesta conferência defende-se a importância do conhecimento pedagógico do professor para que seja possível o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de forma qualificada. Este desenvolvimento necessita acontecer tanto na formação inicial quanto de forma contínua ao longo de sua vida profissional.

Presentador-Moderador
Lic. Jorge E. SAGULA
Departamento Ciencias Básicas
División Matemática y División Estadística
Universidad Nacional de Luján, Argentina

PANEL DE CLAUSURA
“INTELIGENCIA ARTIFICIAL Y EDUCACIÓN MTEMÁTICA:
¿UNIDIRECCIONALIDAD O BIDIRECCIONALIDAD”

Dr. Fredy E. GONZÁLEZ
Programa de Posgrado en Educación Matemática
Universidade de Ouro Preto, Brasil

Inteligencia Emocional vs. Inteligencia Artificial: Explorando fronteras

La Educación Matemática, entendida como un espacio para la producción profesional de saberes asociados con la formación en Matemática de todas las personas, es un espacio fértil para la exploración de las relaciones entre la interioridad, exclusivamente humana, de emociones y la exterioridad tecnológica que, en el mundo actual, permea prácticamente todas las actividades que las personas desarrollan en su cotidianidad y, en ésta última, cada vez con mayor implicación, se hacen presentes los dispositivos tecno-electrónicos que no sólo ya ejecutan tareas prácticas y rutinarias, sino que son capaces de “pensar” y actuar “inteligentemente”. En esta exposición, se tratarán de esclarecer relaciones entre la emocionalidad típicamente humana y la “capacidad cognitiva” atribuida a las herramientas tecno-electrónicas.

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ
Escuela de Postgrado
Universidad Nacional de Trujillo, Perú
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

La Nueva Educación,
los retos para el maestro actual en la era de la Inteligencia Artificial

La Inteligencia Artificial, disciplina que ha venido desarrollándose desde hace 80 años, y construyéndose a partir de criterio y razonamiento lógico-matemático, con alto grado de sensatez, incorporando ingenio al proceso, tratando de estudiar al cerebro humano, con perseverancia y ayuda simbiótica de las tecnologías de la información y sus grandes computadoras que le brindan soporte, en el proceso de aprender de la inteligencia humana, siendo distinta, busca simular su razonamiento, y así poder generar aprendizaje, solo que más veloz, y con mayor asertividad, debido al gran volumen de datos que administra, a partir de lo cual, goza de más elementos para tomar las mejores decisiones. Sin embargo, carece de la creatividad, de instinto, de ese elemento sorpresa: “se me ocurre, a partir de mirar sus ojos, y sentir su piel”, y la conciencia de las personas, del amor espontáneo, que se construye a nivel social; todas esas capacidades que nos hace únicos.

Si hablamos de productividad industrial, de eficiencia operativa, de optimización de costos, y desde allí, de rentabilidad económica, y generación de valor, podríamos estar prediciendo un mundo ideal, mecanizado, automatizado, y optimizado al 99.99%, solo que predecible y previsible, frío, distante de lo humano, en donde las personas cada vez más van perdiendo su espectacularidad de gozar de ese margen de error, de equivocarse y lograr satisfacción teniendo como meta corregirse, por necesidad, por temor o simplemente, para ser cada día mejor, con parámetros de humanidad.

Es allí donde, se plantea el reto para los nuevos maestros, para desarrollar una nueva educación, que pueda convivir y aprovechar las fortalezas que nos va ofreciendo la Inteligencia Artificial, y su continuo crecimiento... pues el futuro sigue avanzando, y es necesario estar más preparados.

Dr. Juan NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

La Inteligencia Artificial y la Investigación Matemática

La pregunta a presentar es: ¿La IA puede ayudar en la investigación matemática? A priori puede pensarse que es más una pregunta retórica que real, pero puedo preguntarle qué “opina” al respecto el ChatGPT.

Pero, ¿el ChatGPT puede ayudar en la investigación matemática?

Sí, el ChatGPT puede ser útil en la investigación matemática en varios aspectos:

Generación de ideas: Puede ayudar a generar ideas nuevas o plantear enfoques alternativos para resolver problemas matemáticos. Al brindar descripciones detalladas de conceptos matemáticos y ejemplos relevantes, puede ayudar a los investigadores a pensar en forma creativa.

Exploración de conceptos: Puede explicar conceptos matemáticos complejos de forma clara y comprensible, permitiendo ayudar a los investigadores a entender mejor las teorías y métodos existentes.

Resolución de problemas: Puede ayudar a resolver problemas matemáticos específicos proporcionando sugerencias, estrategias y pasos para avanzar en la resolución de un problema dado.

Revisión y crítica: Puede revisar y evaluar el trabajo de investigación existente, identificando posibles errores, inconsistencias o áreas de mejora en los resultados o métodos utilizados.

Búsqueda de referencias: Puede dar referencias bibliográficas relevantes y sugerir fuentes adicionales de información para ampliar el conocimiento sobre un tema específico.

Si bien el ChatGPT puede ser una herramienta útil en la investigación matemática, es importante recordar que no puede reemplazar completamente la experiencia y el juicio humano. Los investigadores deben utilizar el ChatGPT como una herramienta complementaria y seguir evaluando críticamente la información brindada. Además, es fundamental verificar y validar cualquier resultado o idea generada con métodos matemáticos rigurosos y con la revisión de pares.

Finalmente, cabe resaltar dos cuestiones en la respuesta proporcionada: *“no puede reemplazar completamente la experiencia y el juicio humano”* y *“es fundamental verificar y validar cualquier resultado o idea generada con métodos matemáticos rigurosos y con la revisión de pares”*. Sobre estos aspectos, se centrará la exposición.

Dr. Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Transformando problemas más allá de las matemáticas con IA

Se presentarán y fundamentarán reflexiones referidas al diseño de auténticos problemas extramatemáticos, destacando el rol crucial de la inteligencia artificial (IA) en esta tarea. Se examinará cómo la IA puede llenar una brecha al identificar aplicaciones matemáticas en otras disciplinas, a menudo pasadas por alto en los programas de formación docente.

Además, se analizará la falta de autenticidad en los problemas matemáticos tradicionales, que a menudo presentan escenarios artificiales para enfocarse en técnicas y algoritmos. Con la IA, surge la oportunidad de acceder a problemas genuinos que reflejen contextos reales y aplicaciones prácticas de las matemáticas en diversos ámbitos profesionales.

Por último, se brindarán algunos marcos de referencias que enfatizan la importancia de diseñar problemas que guarden una relación más estrecha con el mundo laboral de las carreras en las cuales las matemáticas son esenciales. En este sentido, la IA ofrece la capacidad de crear problemas que promueven el aprendizaje de matemáticas aplicadas y ofrecen una experiencia más significativa y relevante tanto para los estudiantes como para los educadores.

Lic. Jorge E. SAGULA
Departamento Ciencias Básicas-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rector, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Equipo COIN (Director), DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Inteligencia Artificial y Educación Matemática: ¿unidireccionalidad, bidireccionalidad o futuros procesos convergentes multidireccionales?

¿Cómo definir a la Inteligencia Artificial? En forma simple, la Inteligencia Artificial (IA) responde al diseño de sistemas o máquinas que imitan (o simulan) la Inteligencia Humana, tanto en lo relativo a la realización de tareas generales como específicas, y que, con el paso del tiempo, pueden evolucionar, en función de la información recopilada y transformada, “similarmente” al razonamiento humano en conocimiento. Este concepto irrumpe en la ciencia como consecuencia de la publicación del Filósofo y Matemático Alan Turing, “Computer Machinery Intelligence” (1950), pues expresa, entre otros conceptos salientes, que, “en cierta medida”, las máquinas obtendrían inteligencia y serían capaces de simular razonamientos de un ser humano.

Los algoritmos computacionales denominados Redes Neuronales están inspirados en la organización jerárquica de la corteza cerebral; y están organizados en una pirámide de capas sucesivas, donde cada una intenta descubrir irregularidades de mayor profundidad que la capa anterior; cada capa de por sí, puede “descubrir” una parte muy simple de lo que ocurre en forma externa a su contexto; y, si se unen varias capas, se configura un dispositivo de aprendizaje, que es necesario “entrenar” para que, a través de la estrategia de aprendizaje específicamente implementada, se obtengan corpúsculos de conocimiento.

Al comenzar las investigaciones en Aprendizaje Automático (Machine Learning) en el campo de la Inteligencia Artificial en la década de 1980, y desde las ideas de Alan Turing (1950), el

objetivo fue desarrollar técnicas de aprendizaje para máquinas, con el propósito de “generalizar comportamientos e inferencias para un gran conjunto de datos”, y esta respuesta es “como imitación de la forma de aprendizaje del cerebro humano”, tal que sus estrategias se sustentan en Algoritmos basados en Regresión y Algoritmos basados en Árboles de Decisión, precisamente mediante la potencia de técnicas y metodologías “apropiadas” de la Heurística y la Metaheurística. El Aprendizaje Automático se relaciona intrínsecamente con el Aprendizaje Estadístico y la Estadística Inferencial y el Reconocimiento de Patrones, y puede verse como un Método de Inducción de Conocimiento. En esta temática, atinente a la Resolución de Problemas, tanto la Heurística como la Metaheurística juegan roles esenciales. Tanto el Aprendizaje Supervisado como el Aprendizaje SemiSupervisado y No Supervisado se sustentan en contenidos vitales desarrollados en la Estadística, la Probabilidad y la Matemática.

Presentadora-Moderadora
Lic. Emma L. FERRERO
Directora Decana
Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina

Didáctica de la Matemática como disciplina científica: teorías y relaciones entre teorías

Bruno D'AMORE

**Accademia de las Ciencias de Bologna, Italia
Mescud, Universidad Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia**

Didáctica de la Matemática como disciplina científica

En primer lugar, hay que afirmar explícitamente que la actividad de investigación en Educación Matemática sólo puede ser realizada y practicada por matemáticos, es decir por personas que dedican su vida al estudio de la Matemática, cuya competencia en Matemática sea profunda, mucho más de lo que se aprende en los programas de estudio, como un hecho personal, vinculado a un interés científico especulativo (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2021a).

En varias ocasiones hemos comprobado que existen matemáticos, profesores universitarios, por tanto matemáticos activos en investigación de la disciplina, que ni siquiera saben que existe una disciplina propia, que se llama “Educación Matemática”, disciplina que está dotada de carácter académico, de dignidad académica, tanto como para ser denominación propia de una carrera específica ya sea en la carrera básica de Matemática o en cursos de maestría en Matemática o en la carrera de formación de futuros profesores de educación primaria o en cursos de posgrado para la formación de futuros docentes de secundaria o docentes en servicio o en doctorados y posdoctorados específicos.

Estos suelen confundir la denominación específica de sentido bien connotado “Didáctica (de la Matemática)” con el término genérico “didáctica” que para muchos incluso es considerado sinónimo de “horas dedicadas a la enseñanza”; por lo tanto confunden una disciplina de investigación específica, estructurada científicamente a nivel internacional, que se basa en el trabajo asiduo de un gran grupo de investigadores de todos los continentes con una actividad rutinaria común a todos los docentes, es decir con una actividad laboral para realizar la cual generalmente se considera necesario dominar la materia impartida.

Quizás la culpa de todo esto la tenga el nombre dado en los orígenes a esta disciplina, nacida oficialmente, como hemos visto, a mediados de los años '80 del siglo XX (y por tanto aún en su primer medio siglo de vida oficial). Cuando sus creadores le pusieron ese nombre, Educación Matemática, ciertamente no imaginaban la confusión antes descrita, que se habría creado y que ha continuado durante décadas.

Otros (matemáticos y no matemáticos) confunden este tipo de interés con la Pedagogía, creyendo que es más adecuado delegar a ese mundo los problemas que tienen que ver con la escuela; pero la Educación Matemática debe ser considerada, como estamos mostrando en este texto, una actividad de investigación de carácter matemático, para lo tanto se necesitan profesionales (investigadores) matemáticos formados de manera específica.

Otros más la confunden con la Psicología, con la búsqueda de buenas prácticas, con el sentido común, con la experiencia,

...

No en todos los países nuestra forma de ver la Educación Matemática como una disciplina científica independiente está ya definitivamente aceptada y, sin embargo, está cada vez más extendida. Ya hemos dicho varias veces que, en Italia, por ejemplo, la Educación Matemática forma parte del grupo disciplinar MAT/04 (MIUR, Ministerio de Universidad e Investigación), por lo que oficialmente forma parte íntegramente de Matemática:

MAT/01 Lógica matemática

MAT/02 Álgebra

MAT/03 Geometría

MAT/04 Matemáticas complementarias (incluye los siguientes cursos universitarios: Matemática elemental desde un punto de vista superior, Matemáticas complementarias, Educación matemática, Historia de la matemática y otros)

MAT/05 Análisis matemático

MAT/06 Probabilidad y Estadística

...

Existen cursos en Educación Matemática en todo el mundo que se pueden seguir después de haber obtenido el título de Licenciatura o Laurea en Matemática, Maestría en Matemática con enfoque didáctico, Maestría en Educación Matemática, Doctorado en Educación Matemática, Postdoctorado en Educación Matemática.

Aún se debate el tema de la tipología de nuestra disciplina. Según nosotros, autores de este texto, la Educación Matemática pertenece a la tipología de las denominadas Matemáticas Aplicadas. [Sobre una breve historia (insertada en la Historia de la Matemática) de la Educación Matemática y la evolución de la idea de Matemática aplicada, ver: D'Amore y Sbaragli (2020); pero volveremos a este tema explícitamente en las páginas siguientes].

La confusión entre Educación Matemática y Pedagogía sigue viva con mucha fuerza, tanto es así que hemos decidido dedicar varios artículos (por ejemplo: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2020b) a ilustrar algunas investigaciones en Educación Matemática que, para comprender el significado de las mismas, es necesario una competencia matemática profesional, en

cuanto matemáticos, ni siquiera puede ser comprendida por profesores de primaria no investigadores ni por pedagogos recurriendo sólo al conocimiento de Pedagogía.

La Pedagogía fue de gran utilidad en las etapas iniciales, cuando fue necesario crear desde cero bases científicas sólidas para que la Educación Matemática perfilara las especificidades de sus investigaciones. Obviamente recurrimos a la Matemática, a la Epistemología de la Matemática y de la Historia de la Matemática, pero también a la Pedagogía, a la Didáctica General, a la Psicología del aprendizaje, a la Semiótica, a la Filosofía, a la Lingüística... y a otras disciplinas para luego establecer algunos conceptos básicos de la Educación Matemática propios del caso del objeto de aprendizaje Matemática. Fue un esfuerzo conjunto y difuso de los primeros investigadores en Educación Matemática, que duró varias décadas y que, en ciertas direcciones cada vez más específicas, aún está en progreso. Pero ahora la Educación Matemática tiene su propio estatus científico; de ahí que nos resulte ridículo que en algunos países y según algunos profesores universitarios se pueda todavía sostener la tesis de que, para la formación de los futuros profesores de Matemática, la secuencia adecuada podría ser la simplista siguiente: primero rigurosos y bien fundamentados conocimientos en Matemática y luego estudios de Pedagogía.

Si bien estamos totalmente de acuerdo en cuanto al primer punto, por las razones expuestas en Fandiño Pinilla (2011), estamos totalmente en desacuerdo en el segundo, no porque la Pedagogía no sea interesante, atractiva o útil, sino por dos razones:

a) todo lo que de Pedagogía se necesita (teórica y empíricamente) en la investigación científica y en la práctica docente escolar cotidiana ya ha sido resaltado e incorporado a la Educación Matemática actual;

b) en Educación Matemática encontramos mucho más explícito, todo lo que profesionalmente necesita una persona experta en Matemática (realmente experta) en la realización de las acciones profesionales necesarias para lograr que, gracias a su enseñanza, los estudiantes puedan aprender Matemática.

Nótese bien: el verdadero problema subyacente no es cómo, qué y cuándo enseñar Matemática, sino hacer que los estudiantes las aprendan.

Entonces nuestra propuesta en el punto b), sucesiva al a), es la siguiente: un curso real, profundo, técnico en Educación Matemática, pero impartido por alguien que sea un experto específico en esta disciplina, no un profesor universitario cualquiera (por motivos expuestos en D'Amore y Fandiño Pinilla, 2013).

Por lo tanto, en varias ocasiones hemos presentado a audiencias de matemáticos profesionales, profesores universitarios e investigadores activos en diferentes campos de la Matemática algunas investigaciones empíricas realizadas en diferentes niveles escolares sobre algunos temas que, a veces sorprendentemente, han demostrado ser complejos para los estudiantes. Volvemos a subrayar explícitamente: si el análisis de estas dificultades de aprendizaje fuera abordado, comprendido y resuelto por un pedagogo, un experto en Pedagogía, pero no experto en Matemática (ni, en consecuencia, en Educación Matemática), no existiría ninguna esperanza de llegar al fondo del problema. Sólo un experto matemático, y en concreto un experto también en Educación Matemática, puede comprender plenamente las motivaciones, las causas de las dificultades del estudiante y, por tanto, con base en sus estudios específicos, tratar de encontrar un recurso que favorezca el aprendizaje deseado por parte del estudiante.

Otra consideración que se basa en actitudes superficiales de algunos ingenuos expertos disciplinarios, sin formación específica en Educación Matemática, es la de quienes afirman (quizás realmente convencidos) que la dificultad de los estudiantes depende de la insuficiencia del currículo (o programa) nacional de los estudios de Matemática de los cursos preuniversitarios. Esta sigue siendo una posición ingenua: no es cambiando el currículum (insertar este tema, eliminar aquel) como se resuelve el problema.

Ya hemos visto cómo, a finales de los años '60 y luego a lo largo de los años '70, en todo el mundo se trató frenéticamente de cambiar los planes de estudios nacionales de Matemática, empezando por Francia y Estados Unidos; para después afectar a todas las naciones. Fue el momento del nacimiento de las infames Nuevas Matemáticas y denominaciones similares, dominadas por la inclusión de una teoría de conjuntos llamada "ingenua" en lugar de la tradicional Matemática escolar, desde la escuela primaria. Fueron los años del triunfo estructural de los bourbakistas; pero una cosa es intentar crear un lenguaje matemático común a toda la Matemática como ciencia (y esto los bourbakistas lo hicieron con éxito) y otra muy distinta es imponerlo en el mundo escolar.

Como hemos visto, no fueron los profesores, ni los pedagogos, ni los psicólogos quienes frenaron esta forma absurda de hacer las cosas, fueron los matemáticos; famosos son los gritos negativos incluso de los premios Fields. Y fue el matemático francés Guy Brousseau quien, rebelándose contra tanta locura, logró estudiar todo esto desde un punto de vista científico, mostrando sus errores y su negatividad, sancionando así el nacimiento de esa disciplina que hoy se llama Educación Matemática. Sabemos que nos estamos repitiendo.

En muchos países las cosas se prolongaron más que en otros, en algunos la ola de la Nueva Matemática ni siquiera llegó, al menos no de forma tan explícita. En estos últimos países los cambios se produjeron por otros motivos, relacionados por ejemplo con los préstamos solicitados a la AIF (Asociación Internacional de Desarrollo), el organismo del Banco Mundial que concede dichos préstamos, pero solicita cambios drásticos e innovadores en el programa de enseñanza, especialmente en disciplinas científicas (principalmente en Matemática) y en materias técnicas. La idea es poder garantizar la devolución del préstamo en 20 años, gracias a la mejora cultural del país, gracias a la renovación de sus programas de estudio. Una idea ganadora, una auténtica garantía.

Y así, para comprobar que un país que solicitaba un préstamo proponía realmente un programa innovador que podía garantizar una verdadera renovación positiva de esa nación, el Banco envió expertos en misión en estos países para comprobar que lo que se proponía era coherente y prometedor, que constituía la garantía requerida. Por lo general, se enviaban como expertos a personas con experiencias sobre el funcionamiento de la escuela, los programas y los planes de estudio, es decir, en su mayoría directores escolares o ministeriales con amplia experiencia, así como pedagogos.

Pero a inicios de 1990 un matemático que ahora es considerado un erudito en Educación Matemática fue enviado como experto por un banco internacional a un país llamado “en desarrollo” que había prometido cambios drásticos en el plan de estudios en Matemática (la disciplina en la cual más que cualquier otra el banco pidió cambios, mejoras y modernizaciones, siendo la disciplina impulsora de los sectores científicos, tecnológicos y financieros).

Este matemático (que no era un director escolar ni ministerial, sino un investigador matemático, el mismo que tuvo que ver con las últimas experiencias públicas de Papy y Dienes, ya mencionadas) se quedó sin palabras leyendo los programas propuestos por el joven ministro de educación, inspirado e influenciado por quién sabe quién; en estos programas se hablaba de: monoide, grupos, dominios de integridad, jarrillos, campos vectoriales, álgebra de Boole... en la escuela primaria! Es evidente que se trataba solo de una forma torpe de intentar hacer creer al banco que se había dado seguimiento en este país a las solicitudes. Creemos que el joven ministro no tenía ninguna idea de que significaban estos términos. Así que el matemático experto señaló que se trataba de una tentativa totalmente sin sentido de obtener el préstamo.

Si en lugar de un matemático se hubiese enviado a un experto en técnicas escolares o en trabajo de grupo o a un directivo, esos términos utilizados podrían haber sido interpretados como garantía de renovación escolar, como quizás ha sucedido en otros países, como contenidos matemáticos modernos y necesarios para una nación que quiere desarrollarse rápidamente técnica y culturalmente...

No es dando nombres altisonantes a aspectos de la matemática de alto nivel como se cambia una educación nacional, un currículo; pero sólo un experto en la disciplina es capaz de darse cuenta de esto.

Estamos hablando de un tema profundo y decisivo: la investigación en Educación Matemática debe ser realizada por matemáticos profesionales porque sólo ellos, con su experiencia, pueden comprender los resultados y por tanto proponer soluciones, no sólo en el campo de la enseñanza sino sobre todo en el del aprendizaje.

Tenemos varios ejemplos sobre este tema a los cuales nos referiremos más adelante, en un capítulo posterior, porque ahora tenemos la obligación de continuar por el camino que se va perfilando y que consiste en (de)mostrar por qué, para nosotros, hoy se cree que la Educación Matemática es parte de la Matemática Aplicada.

La Educación Matemática como Matemática aplicada

Aprovechamos entonces para explicar que para nosotros la Educación Matemática, disciplina específica de la grande familia de la Matemática, puede interpretarse como uno de los muchos componentes de la llamada Matemática aplicada, por tanto «una rama de la Matemática que se ocupa del estudio de las técnicas matemáticas utilizadas en la aplicación del conocimiento matemático a otros campos científicos y técnicos», como siempre se oye e incluso se lee en Wikipedia. Hasta el día de hoy no existe un consenso científico universal, consciente y total sobre cuáles son las ramas de la Matemática aplicadas, por diversas razones. Habitualmente se hace referencia a cómo la Matemática debe ser considerada un método para el estudio o la aplicación concreta en los más variados campos, en Ingeniería, en Biología, en Física, en Química, en Medicina, en Economía, en Finanzas, en Construcción, en Climatología, en Astronomía, ...

Hay quienes dicen estar sorprendidos por el poder y el éxito de la Matemática en todos estos numerosos y múltiples campos de aplicación, a menudo tan diferentes entre sí. En este sentido, recordamos al físico y matemático estadounidense naturalizado húngaro Eugene Paul Wigner (1902 – 1995), asistente de David Hilbert (1862 – 1943) en Göttingen en 1927, estrecho colaborador de John von Neumann (1903 – 1957), amigo íntimo de Albert Einstein (1879 – 1955) y premio Nobel de física en 1963. Uno de sus famosos y valiosos libros de divulgación científica, publicado por primera vez en 1960, lleva el significativo título: *La irrazonable eficacia de la Matemática en las ciencias naturales* (Wigner, 1960). En ese libro, Wigner da una respuesta filosófica y científicamente sensata a una gran verdad: la Matemática es el lenguaje más natural y significativo de las ciencias naturales, como ya había afirmado Galileo Galilei (1564 – 1642), pero ampliando los ejemplos a casos y situaciones que Galileo ni siquiera podría haber imaginado.

También sugerimos la lectura esclarecedora de una muy breve historia específica de la Matemática aplicada (Stolz, 2002). Pero entretanto se han logrado avances considerables, extendiendo las aplicaciones de la Matemática a muchas otras actividades humanas, no sólo de naturaleza ingenieril o científica “fuerte”; hoy en día existen otros campos en los cuales se ha aplicado la Matemática: Lingüística, Semiótica, Psicología, Arte, hasta en el reconocimiento de los autores de textos anónimos, ... Por tanto, el método matemático hoy nos permite proponer aplicaciones a sectores hasta ahora no tenidos en cuenta, no necesariamente proporcionando modelos que tengan su base en el Análisis o en la Geometría o en la Probabilidad, sino en un sentido mucho más amplio, por ejemplo, como método de comparación de datos, de teorización, de argumentación, de estructuración lógica, de deducción.

Entre estos campos no “fuertes”, nos gusta proponer el ejemplo en el mundo del Arte y la Crítica de Arte (pero no nos detenemos, remitiéndonos a D’Amore, 2015); otras aplicaciones interesantes se encuentran en problemas que, hasta hace unas décadas, parecían pertenecer sobre todo a la Pedagogía y la Psicología (D’Amore, 2021).

Un buen ejemplo que citamos a favor de nuestra postura, ni tan reciente, de reconocimiento oficial de esta manera amplia de ver por parte de los investigadores en Matemática aplicada fue, en nuestra opinión, la Reunión Conjunta UMI-SIMAI/SMAI-SMF: *Mathematics and its Applications*, celebrada en el Departamento de Matemática de la Universidad de Turín en julio de 2006. La idea (que inmediatamente nos pareció brillante) se debe sin duda a Ferdinando Arzarello.

Un sector específico de aquel encuentro estuvo dedicado a las aplicaciones de la Matemática a la Educación Matemática, quizás el sector más seguido en aquella ocasión, probablemente por la curiosidad que despertó esta nueva entrada. Los textos de las conferencias de los distintos invitados (Colette Laborde, Claire Margolinas, Maria Alessandra Mariotti y Ornella Robutti), los de los *reactors* (Paolo Boero y Jean Baptiste Lagrange), los de los invitados con contribuciones temáticas (nueve en total), el de la mesa redonda (en la cual participaron Ferdinando Arzarello, Giampaolo Chiappini y Jean Philippe Drouard) y el de una sesión especial que incluyó varias intervenciones adicionales, se publicaron íntegramente en el número 1, vol. 21, de la revista *La matematica e la sua didattica* (vol. 21, n. 1, abril de 2007).

En esta ocasión, en nuestro seminario abordamos el tema de las diferentes interpretaciones por parte de los estudiantes (de cualquier nivel escolar) de la representación de un determinado objeto matemático sometido a transformaciones semióticas. Ahora bien, si bien el fenómeno vinculado a las transformaciones de conversión (pasar de una representación semiótica a otra cambiando de un registro semiótico a otro, por ejemplo pasar de escrituras algebraicas a representaciones geométricas) ha sido ampliamente estudiado [consideremos el trabajo realizado por el principal estudioso internacional de esta problemática, Raymond Duval, 1995, 2017; Duval, Sáenz-Ludlow, 2016], el mismo fenómeno relacionado con las transformaciones de tratamiento (paso de una representación semiótica a otra, pero dentro de un mismo registro semiótico, como podría ser en una transformación algebraica) había sido descuidada por la investigación (sin embargo, en la práctica escolar esta dificultad de los estudiantes es ampliamente reportada por sus profesores y por la investigación empírica) (D'Amore, 2007b; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2001, 2007c, 2008; D'Amore, Fandiño Pinilla, Santi & Sbaragli, 2011).

Este fenómeno didáctico (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2007a), constituyó la base común de dos doctorados de investigación, uno en Italia y otro en Colombia, realizados respectivamente por: George Santi en la Universidad de Palermo y por Pedro Javier Rojas Garzón en la Universidad Francisco José de Caldas en Bogotá (Santi, 2010, 2011; Rojas Garzón, 2014).

Para ilustrar la cuestión con algunos detalles más, recurrimos a las siguientes aclaraciones que extraemos de D'Amore, Fandiño Pinilla e Iori (2013).

A la adquisición-construcción conceptual-cognitiva de un objeto (matemático) la llamamos “noética”. Consideramos como características semióticas de la actividad matemática la representación de un objeto (matemático) dentro de un registro semiótico apropiado y las transformaciones de tratamiento y conversión de esta representación.

Indicamos:

r^m : registro semiótico ($m = 1, 2, 3, \dots$);

$R^m_i(A)$: i -ésima representación semiótica ($i = 1, 2, 3, \dots$) de un objeto (matemático) A en el registro semiótico r^m .

Del objeto A que se quiere representar, se eligen los rasgos distintivos sobre los cuales se quiere resaltar;

a esta representación en un registro semiótico dado r^m se la denota por $R^m_i(A)$;

se puede realizar una transformación de tratamiento pasando, en el mismo registro semiótico r^m , a otra representación diferente de A , sea $R^m_j(A)$ ($i \neq j$) ($j = 1, 2, 3, \dots$);

se puede realizar una transformación de conversión pasando a una nueva representación de A en otro registro semiótico (diferente) r^n ($n \neq m$), sea $R^n_h(A)$ ($h = 1, 2, 3, \dots$).

Sabemos, especialmente por la investigación empírica clásica en Educación Matemática, que el estudiante (de cualquier nivel escolar) tiene grandes dificultades para reconocer el mismo objeto A en las dos representaciones semióticas obtenidas entre sí por conversión; pero hemos observado en nuestras investigaciones en las aulas que a menudo surge una dificultad similar incluso si las dos representaciones semióticas se obtienen mediante tratamiento.

Pero volvamos a una discusión más general, que abandonamos páginas atrás.

Estamos ante una disciplina matemática, la Educación Matemática, aplicada a problemas relativos a la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, en un entorno escolar o universitario; esta disciplina, hoy consolidada y estable, pasa por un esclarecimiento definitivo de sus vínculos con algunas otras disciplinas que le han proporcionado herramientas y temáticas, como la Didáctica general, la Pedagogía, otras Didácticas disciplinarias. Pero en la específica Educación Matemática se encuentran necesidades de análisis, teorización y utilización de muchas otras disciplinas; obviamente, primero y principalmente la Matemática y luego la Epistemología de la Matemática y la Historia de la Matemática, la Semiótica (pensemos, por ejemplo, en las complejidades del lenguaje simbólico de los diferentes componentes de la Matemática que a menudo tienen semióticas específicas, como el Álgebra o el Análisis o la Lógica matemática); Teorías del lenguaje; Psicología del aprendizaje... A lo largo de las décadas, estudios específicos en Educación Matemática han permitido relacionar todo ello con otros elementos externos pero característicos de nuestra disciplina, es decir adaptarlos a necesidades internas específicas y por tanto hoy en día la formación en este campo de la investigación ya incluye todo lo específico de estas disciplinas. Sin tener que recurrir a generalizaciones, sino centrándonos únicamente en necesidades específicas a este punto.

Diferentes teorías en Educación Matemática. Estudios comparativos

Exactamente como sucede en los distintos campos específicos de la Matemática, a lo largo de las décadas se han sucedido evidentemente numerosos estudios teóricos, sobre todo basados en diversos resultados de investigaciones empíricas y/o en campos de estudio y análisis específicos. Imposible enumerarlos y comentarlos todos. Nos limitamos a una lista (no cronológica, salvo la número 1) sólo para dar una idea de la multiplicidad de campos de estudio. Además del tema y/o nombre de la teoría, incluimos el nombre del investigador quien es para nosotros el exponente más significativo del estudio específico. Se ha convertido casi en una costumbre (no absoluta) dar el nombre de “teoría” a estos campos de investigación o modos de interpretar los resultados (a menudo empíricos) obtenidos, como hizo Guy Brousseau al comienzo de su aventura científica.

1. Teoría de las situaciones (Guy Brousseau).
2. Teoría antropológica de la didáctica (Yves Chevallard).
3. Constructivismo (Ernst von Glaserfeld (1917–2010)).
4. Fenomenología didáctica (Hans Freudenthal (1905–1990)).
5. Dialéctica instrumento – objeto (RéGINE Douady (1935–2006)).
6. Modelo Van Hiele sobre enseñanza – aprendizaje de la geometría (Dina van Hiele Geldof (1912 – 1958) y Pierre van Hiele (1909 – 2010) (modelo 1957)).
7. APOS [Acciones, Procesos, Objetos (mentales), Esquemas (cognitivos)] (Edward Dubinsky (1935 – 2022)).
8. Interaccionismo didáctico (Heinrick Bauersfeld (1926 – 2022)).
9. La naturaleza del aprendizaje matemático (Tommy Dreyfus).
10. Factores emocionales en el aprendizaje de las matemáticas (Richard Skemp (1919 – 1995)).
11. Teoría de los conceptos figurales (Efraim Fischbein (1920 – 1998)).
12. Tres mundos de la matemática: conceptual, operacional, axiomático (David Tall).
13. Teoría de los campos conceptuales (Gérard Vergnaud (1933 – 2021)).
14. Campos conceptuales, campos de experiencia, campos semánticos (Paolo Boero).
15. Enfoque instrumental de la educación matemática (Pierre Rabardel (1945 – 2021)).
16. Commognition (comunicación – cognición) (Anna Sfard).
17. Enfoque socio-epistemológico – Matemática Educativa (Ricardo Cantoral (1958 – 2021)).
18. Teoría de los registros semióticos (dimensión semio-cognitiva) (Raymond Duval).
19. Enfoque ontosemiótico EOS (Juan Godino).
20. Haz semiótico (Ferdinando Arzarello).
21. Mediación semiótica (Mariolina Bartolini Bussi y Maria Alessandra Mariotti).
22. Teoría de la objetivación (Luis Radford).

Se realizó en el NRD de Bolonia recientemente un análisis detallado, pero extremadamente conciso, de cada una de estas teorías (Asenova y otros, 2023).

Naturalmente, ya existen muchos estudios teóricos y también investigaciones empíricas destinadas a resaltar las similitudes y diferencias entre estas teorías, por ejemplo, en función con los fines para los cuales nacieron. Algunos análisis pretenden captar las diferencias entre estas teorías, otros quieren compararlas de manera positiva y constructiva, basándose en los resultados más significativos obtenidos.

Dos estudios analíticos generales que consideramos particularmente significativos desde este punto de vista son los de Prediger, Bikner–Ahsbahs y Arzarello (2008) y de Bikner–Ahsbahs, Dreyfus, Kidron, Arzarello, Radford, Artigue y Sabena (2010).

Otros estudios dedicados a resaltar analogías o diferencias o ambas entre teorías son muy numerosos en los últimos años; nos limitaremos a mencionar algunos en orden cronológico (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2018a, b, 2020a, b, 2021a, b; Fandiño Pinilla, 2017, 2020a, b; Asenova, D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori & Santi, 2020a,b).

Pero las nuevas teorías nacen con objetivos muy específicos, no sólo para absorber o incluir teorías anteriores, sino también para estudiar factores que las teorías precedentes pasaron por alto o para estudiar hechos en los cuales las teorías anteriores no estaban interesadas (D’Amore, 2007a).

Por lo tanto, las teorías construidas después de la Teoría de situaciones muchas veces tuvieron objetivos diferentes, fueron aceptadas con interés y curiosidad en el panorama de la investigación internacional, pero casi nunca fueron propuestas para reemplazar las teorías anteriores porque estas nuevas teorías casi siempre tienen objetivos de análisis y diferentes propósitos investigativos.

Este tema, el de las relaciones entre teorías o investigaciones que resaltan analogías o contrastes entre resultados de investigaciones empíricas, es uno de los temas más fascinantes de las investigaciones actuales, en nuestra opinión (D’Amore & Fandiño Pinilla, 2017).

Bibliografía

Asenova, M., D’Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Fúneme Mateus, C. C., Iori, M., & Santi, G. (2023), *Teorie rilevanti in didattica della matematica*, Bologna: Bonomo.

- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020a). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. The theory of objectification and the theory of didactical situations: An example of comparison between theories in mathematics education. *La matematica e la sua didattica*, 28(1), 7-61.
- Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. (2020b). Análisis de algunos aspectos de la teoría de la objetivación. *RECME-Revista Colombiana de Matemática Educativa: Dossier Temático Teoría de la Objetivación*, 5(2), 33-50.
- Bikner-Ahsbahs, A., Dreyfus, T., Kidron, I., Arzarello, F., Radford, L., Artigue, M., & Sabena, C. (2010). Networking of Theories in Mathematics Education. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Editors), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 145-175. Belo Horizonte, Brasil: PME.
- D'Amore, B. (2007 a). Voces para el diccionario: F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi & W. Wiater (Eds.), *Le parole della pedagogia. Teorie italiane e tedesche a confronto*. Torino: Bollati Boringhieri. Voces: Didattica disciplinare (pagg. 72-75); Scienza (pagg. 335-337). [Edición en idioma alemán: (2010). *Pädagogische Leitbegriffe, im deutsch-italienischen Vergleich*. Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. Fachdidaktik (pp. 98-101), Mathematische Bildung (pp. 227-228), Naturwissenschaftliche (pp. 255-258), Wissenschaft (pp. 362-364)].
- D'Amore, B. (2007b). Mathematical objects and sense: how semiotic transformations change the sense of mathematical objects. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, 7, 23-45.
- D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità tra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.
- D'Amore, B. (2021). *La matematica come strumento critico. Riflessioni su didattica, storia, letteratura, arte, magia e religioni*. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo).
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007a). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representations undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 21(1), 87-92. [Atti del: Joint Meeting of UMI-SIMAI/SMI-SMF: *Mathematics and its Applications*. Panel on Didactics of Mathematics. Dipartimento di Matematica, Università di Torino. 6 luglio 2006].
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Sciences and Educational Technology*. Vol. 1. Nicosia: Intercollege Press. Pp. 111-130.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2007c). Relationships between area and perimeter: beliefs of teachers [Communication article with referees]. En E. P. Avgerinos & A. Gagatsis (Eds.), *Current trends in Mathematics Education*. Proceedings of 5th MEDCONF2007 (Mediterranean Conference on Mathematics Education), 13-15 april 2007, Rhodes, Greece. Athens: New Technologies Publications. Pp. 383-396.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2013). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e spunti critici di discussione e ricerca. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 36B(4), 325-353. [En idioma español: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). La didáctica de la didáctica de la matemática: experiencias personales e indicaciones críticas de algunas discusiones e investigaciones. In B. D'Amore & L. Radford, *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Prefacios de Michèle Artigue y Ferdinando Arzarello. Bogotá: DIE Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Pp. 41-66].
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Reflexiones teóricas sobre las bases del enfoque ontosemiótico de la Didáctica de la Matemática. Theoretical reflections on the basis of the onto-semiotic approach to Didactic of Mathematics. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone & M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del II Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Granada, 23-26 marzo 2017. Sitio web: <http://enfouqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2018a). Su alcuni termini che hanno avuto ampia rilevanza agli albori della costruzione scientifica della didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, 26(2), 247-291.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M. I. (2018b). Relectura de un artículo publicado en 2000 con la visión crítica del 2018: ¿qué queda?, ¿qué perspectivas se alcanzaron?, ¿qué metas son aún lejanas? En A. Avila (Ed.), *Rutas de la Educación Matemática. 30 años de investigación en la revista Educación Matemática*. México: Sociedad Mexicana de Investigación y Divulgación de la Educación Matemática – A. C. Somided. Pp. 63-82.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020a). *Per una teoria delle didattiche disciplinari. Saggio per docenti e ricercatori*. Prefazione di Maura Iori. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo).
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2020b). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS (Enfoque Onto-Semiótico). *Paradigma*, 41(1), 130-150.

- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2021a). La ricerca in Didattica della Matematica: una responsabilità dei matematici. *La matematica e la sua didattica*, 29(1), 39-80.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2021b). Some examples of the phenomenon of metadidactic slippage in school practice. *Acta Scientiae*, 23(4), 1-15. [In English and Spanish]. <http://posgrad.ulbra.br/periodicos/index.php/acta/article/view/6647>.
- D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2024). *Historia de la didáctica de la matemática*. Bogotá: Magisterio.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendimento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. (Nueva edición 2023, Bologna: Bonomo). [En idioma español: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford y Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio]. [En idioma portugués: D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica Sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. Prefácios de Raymond Duval, Luis Radford, Carlos Eduardo Vasco Uribe y Ubiratan D'Ambrosio. Tradução Maria Cristina Bonomi. Sao Paulo: Editora Livraria da Física].
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2020). *La matematica e la sua storia*. IV vol. *Dal XVIII al XXI secolo*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Edizioni Dedalo.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Bern: Peter Lang.
- Duval, R. (2017). *Understanding the Mathematical Way of Thinking. The Registers of Semiotic Representations*. Foreword of Bruno D'Amore. Cham: Springer.
- Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en Matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Presentación y comentarios de Bruno D'Amore (R. Duval) y Carlos Eduardo Vasco Uribe (A. Sáenz-Ludlow). Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*, 32(62), 51-58.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2017). Los elementos básicos sobre la utilización de la semiótica en el análisis de las situaciones de aula. *Revista Científica de Educación – EDUSER*, 4(1), 17-42. <http://revistas.ucv.edu.pe/index.php/EDUSER/article/view/1651>
- Fandiño Pinilla, M. I. (2020a). A proposito di relazioni fra teorie: Alcuni punti di contatto e altri di divergenza fra TAD, TSD, EOS e TO. *La matematica e la sua didattica*, 28(2), 159-197.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2020b). Historia del desarrollo de la Didáctica de la Matemática. Un estudio realizado con los medios teóricos de la EOS. En AA. VV., *Memorias del I Simposio de Educación Matemática (I SEM V), Educación matemática en tiempo de pandemia*. Tomo I, Universidad Nacional de Lujan, Argentina. Pp. 12-18.
- Prediger, S., Bikner-Ahsbals, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, 40, 165–178.
- Rojas Garzón, P. J. (2014). *Relación entre objeto matemático y sentidos en situaciones de transformación de tratamiento*. Prefacio de Bruno D'Amore. Bogotá: Universidad Francisco José de Caldas.
- Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-publications/2010-santi-1/>.
- Santi, G. (2011). Objectification and semiotic function. *Educational Studies in Mathematics*, 77(2), 285-311.
- Stolz, M. (2002). The History of Applied Mathematics and the History of Society. *Synthese*, 133(1), 43–57.

**Didáctica de la Geometría en la enseñanza:
Conexión entre lenguajes, comunicación y argumentación**

Marcos BARRA BECERRA
Universidad Alberto Hurtado, Chile

Resumen

La comunicación en el aula escolar y el lenguaje empleado para abordar los conceptos matemáticos, desempeñan un papel fundamental en la interacción entre docentes y estudiantes para el logro de aprendizajes. En el caso de la enseñanza de la geometría, la forma en que se comunica y se utiliza el lenguaje a menudo está condicionado por la manera en que cada docente concibe acepciones de los conceptos, debido a la naturaleza abstracta de las nociones geométricas, la influencia de las tradiciones interpretativas de los conceptos en el aula escolar, los contextos en que se originan, entre otras. Estas acepciones, las que son propias de cada persona, originan cambios en los modos de comunicar una noción y, de paso, afecta el desarrollo de razonamientos y de la habilidad de argumentar en los y las estudiantes. En esta línea, la conferencia está centrada en explicar la conexión entre los usos del lenguaje, sus fenómenos asociados al desarrollo de la habilidad de comunicación de los conceptos y su impacto en el desarrollo de la habilidad de argumentar.

El lenguaje en la enseñanza de la geometría

Existe un amplio consenso sobre la importancia del lenguaje en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática (Maier, 1999; Puga, Rodríguez y Toledo, 2016; Hernández, Prada y Gamboa, 2017). El lenguaje en el aula considera aspectos metalingüísticos propio de las características de su dimensión comunicativa y de la relación que se produce en un contexto determinado, pues el aula contempla un escenario sociocultural particular que se explicita en la interacción activa de sus protagonistas (León y Calderón, 2008) y que configura las formas y el sentido de los conceptos, afectando la comprensión de la matemática. Este lenguaje matemático no es comprendido, sino interpretado, pues se vincula al lenguaje natural en la enseñanza (Mora, 2011).

En la enseñanza de la geometría escolar, los conceptos son variados, van desde los más básicos a aquellos que se componen a partir de la comprensión de otros. De ahí el cuidado en su tratamiento, pues no son objetos de conocimiento independientes, se trata de una construcción lógica conceptual que ofrece numerosas oportunidades para el desarrollo de conjeturas, pensamiento crítico, habilidades de razonamiento deductivo, visualización, argumentación y una amplia gama de aplicaciones en campos como la arquitectura, la ingeniería, las artes y la astronomía, entre otros. Así, se hace esencial, desde un inicio, trabajar un lenguaje, aunque comprensivo, que obedezca necesariamente al objeto que se comunica. Un ejemplo elemental ocurre cuando mencionamos en una clase que “la suma de las medidas de las aberturas de los ángulos convexos de un triángulo es 180° ”, pues requiere de la comprensión de un conjunto de nociones previas como son ángulos entre rectas, sistema de medición sexagesimal, concepto de ángulo, etc., incluso con el fin de argumentar el hecho de que efectivamente suman 180° , si es que utilizamos argumentos teóricos y no pragmáticos.

Si el lenguaje lleva consigo las acepciones que un docente posee sobre un concepto geométrico, la enseñanza de una noción se transforma en una interpretación local, es decir, que el mismo concepto enseñado por otro docente, no obedece necesariamente a la misma noción, generando confusiones para su comprensión. En este caso, resultaría evidente el hecho de la dificultad que presenta para los estudiantes el aprendizaje de la matemática.

En relación con el desarrollo de la habilidad de comunicar en estudiantes en edad escolar, la política curricular en Chile presentada en sus bases y programas curriculares, indica que es fundamental que los estudiantes expresen sus ideas en forma oral o por escrito sobre propiedades básicas y procedimientos, pero orientando y fortaleciendo el lenguaje y las relaciones que se expresan para favorecer los futuros pensamientos lógicos (MINEDUC, 2013). Por otra parte, también es importante otorgar posibilidades a cada estudiante para que sean ellos/as quienes expresen las representaciones mentales que poseen sobre los conceptos, a través de representaciones pictóricas, en lenguaje natural o en forma simbólica, explicando sus producciones. Con ello, el uso del fortalecimiento del lenguaje matemático en el aula es esencial, empero, no es habitual que la enseñanza escolar se centre en la mejora del lenguaje, privilegiando procedimientos mecanizados y enfoques memorísticos para responder a cada una de las tareas (Martínez, 2014; Chaves, Castillo y Gamboa, 2008; Gil y Rico, 2003), en lugar de aprovechar un buen recurso lingüístico para enseñar las nociones, pues “el lenguaje verbal no es un instrumento ajeno a la matemática” (Díaz, 2010).

Para la presente conferencia y en coherencia a las dificultades asociadas a los usos del lenguaje en aula de matemática, analizaremos algunos fenómenos propuestos que dan cuenta de dichas dificultades, los que llamaremos como: acepciones epistemológicas, la negación de la verbalización, entre otras.; constructos conceptuales originados de la investigación que servirán como soportes para reflexión en torno a la mejora de la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Habilidad de argumentación

El desarrollo de la habilidad de comunicar y el uso del lenguaje en aula de matemática, son la base para el desarrollo de procesos argumentativos en estudiantes. Los estudiantes, en su mayoría, no dan cuenta de habilidades para comunicar un razonamiento o concepto matemático que considere un lenguaje representativo de cada noción, por el contrario, muestran deficiencias para expresar una idea geométrica, recurriendo a recursos gráficos o representaciones que simplemente replican de las formuladas por sus docentes a lo largo de

la escolaridad, llevando tales tradiciones a la educación superior (Gómez-chacón, 2005, citado en Hernández - Suárez et al., 2016), siguiendo con una tradición de las interpretaciones de los conceptos sin un lenguaje definido.

El resultado de tal influencia se orienta a representaciones limitadas y explicaciones que, en la mayoría de las veces, se alejan del significado de los conceptos, lo que complejiza la posibilidad de explicar una conjetura o la capacidad de describir un procedimiento, entre otros. Argumentar exige relacionar de manera lógica un conjunto de conceptos. La relación entre conceptos se fomenta en la actividad matemática al promover prácticas tales como: narrar, describir, explicar, justificar y argumentar (parcialmente). Estas prácticas, en tanto precursoras de la habilidad de argumentar, son actividades que se desarrollan tanto a nivel individual como también en forma colectiva. (Planas, N., & Morera, L., 2012). las formas de argumentación que se deben promover desde principios de la escolaridad se ven relegadas por procedimientos y prácticas de mecanización, lo que exige un cambio de centrado a una búsqueda de promover tales prácticas. Con ello, ¿qué tipo de preguntas orientan a cada precursor de la habilidad de argumentar? ¿hay claridad, tanto en estudiantes como en docentes, sobre la diferencia entre justificar, explicar o argumentar? ¿cuál de los precursores de la habilidad de argumentar favorecen el desarrollo de la habilidad de comunicar y fortalece el lenguaje matemático? En la presente conferencia, analizaremos las conexiones entre el lenguaje y sus fenómenos asociados al desarrollo de la habilidad de comunicación y de argumentación, abordando las respuestas a las interrogantes planteadas desde lineamientos lingüísticos y enfoques de las teorías de la argumentación.

Bibliografía

- Chaves, E., Castillo, M. y Gamboa, R. (2008). Creencias de los estudiantes en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 3(4), 29-44. <https://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/>
- Díaz, H. H. (2010). El lenguaje verbal como instrumento matemático. *Educación Y Educadores*, 12(3),13-31.
- Gil, F. y Rico L. (2003) Concepciones y creencias del profesorado de Secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 21(1), 27-47. <https://ddd.uab.cat/record/1592>
- León, Olga; Calderón, Dora (2008). *Semiosis y lenguaje en la Didáctica de las Matemáticas*. Curso dictado en 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (16 al 18 de octubre de 2008). Valledupar, Colombia.
- Maier, H. (1999). El conflicto para los alumnos entre lenguaje matemático y lenguaje común. *Educación Matemática*, 11(3), 133-135.
- Martínez Padrón, O. J. (2014). Sistema de creencias acerca de la matemática. *Actualidades Investigativas en Educación*, 14(3), 57-86.
- MINEDUC (2013). **Bases curriculares**. Matemática Educación Media. Chile: Mineduc.
- Mora, Á. (2011) Lineamientos lingüísticos para la enseñanza de la Matemática. *Kaleidoscopio*, 15(8), pp.5-16.
- Planas, N., y Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. En E. Badillo, L. García, A. Marbà y M. Briceño (Eds.), *El desarrollo de competencias en las clases deficiencias y matemáticas*, (pp. 275-300). Fondo Editorial Mario Briceño Iragorry.
- Puga Peña, Luis Alberto, Rodríguez Orozco, Jhony Mauro, & Toledo Delgado, Alba Marlene (2016). Reflexiones sobre el lenguaje matemático y su incidencia en el aprendizaje significativo. *Sophia, colección de Filosofía de la Educación*, 20(1), pp. 195-218.
- Hernández-Suárez, C. A., Prada-Núñez, R., & Gamboa-Suárez, A. A. (2017). Conocimiento y uso del lenguaje matemático en la formación inicial de docentes en matemáticas. *Revista de investigación, desarrollo e innovación*, 7(2), 287-299.

**¿Podemos transformar el aula en un escenario
que considera los estilos de aprendizaje de los estudiantes?
Reflexionamos juntos compartiendo una experiencia**

Adriana ENGLER

**Facultad de Ciencias Agrarias, Universidad Nacional del Litoral
Kreder 2805, Esperanza, Santa Fe, Argentina
aengler@fca.unl.edu.ar**

Resumen

El desarrollo científico-tecnológico modificó el papel de la matemática. A través de ella, las distintas ciencias interpretan fenómenos utilizando métodos cuantitativos y cualitativos que favorecen la resolución de problemas y la toma de decisiones. Los conocimientos matemáticos aparecen constantemente en situaciones surgidas de la vida diaria. Todo esto, sumado a su aspecto formativo, provocan que la educación matemática se torne fundamental en estos tiempos. La evolución de la sociedad del conocimiento supone un gran desafío a los modelos educativos formales.

Numerosas investigaciones resaltan la importancia del aprendizaje como un proceso social y dedican tiempo a estudiar los aspectos relevantes del aprendizaje significativo y el personalizado, entre otros. Hace tiempo tomó relevancia el hecho de reconocer que todas las personas no aprenden de la misma manera, cada una tiene distintas necesidades, intereses y expectativas durante el proceso de aprendizaje. Teniendo en cuenta esto, surge la necesidad de estudiar los diferentes tipos de aprendices que conviven en el aula de matemática a través de determinar sus estilos de aprendizaje.

El propósito de este trabajo es invitarlos a pensar si es posible transformar el aula universitaria en un escenario que considera los estilos de aprendizaje de los estudiantes al momento de planificar nuestras actividades. Resulta una invitación a la reflexión y el debate en estos momentos de cambios tan profundos en el que conviven la enseñanza presencial y virtual.

Palabras clave: Aprendizaje. Estilos. Ambientes. Experiencias. Aula. Matemática.

Introducción

El desarrollo científico-tecnológico de los últimos tiempos modificó sustancialmente el papel de la matemática dado que se convirtió en una herramienta indispensable para explorar los fenómenos que aparecen tanto en el mundo de las ciencias de la naturaleza como en el de las ciencias sociales y humanas. A través de ella, las logran interpretar fenómenos, utilizando métodos cuantitativos y cualitativos que favorecen la resolución de problemas y la toma de decisiones. Los conocimientos matemáticos aparecen constantemente en situaciones surgidas de la vida diaria.

Todo esto, sumado a su aspecto formativo, en relación a las formas de pensamiento que se ponen en acción, provocan que la educación matemática se torne fundamental en estos tiempos. La evolución de la sociedad del conocimiento supone un gran desafío a los modelos educativos formales. Se plantean numerosos retos. Las necesidades con respecto a la formación de profesionales son diferentes a las de hace algunos años. Lo importante es tener la capacidad de encontrar en cada circunstancia la información necesaria, seleccionarla y utilizarla. Es necesario que nuestros alumnos aprendan especialmente habilidades o destrezas que permitan poner en acción los conocimientos.

Durante los últimos años, los entornos en los que aprendemos y las fuentes de las que obtenemos información sufrieron cambios considerables. Esta evolución conlleva cambios en las formas de pensar el aprendizaje. No podemos desconocer el aprendizaje informal, el que ocurre fuera de las aulas, el que se logra de la experimentación directa o de la observación de otras personas que actúan o experimentan, así como el que se logra a través de lecturas de distintos autores, de contactos que nos han recomendado y guiado. Una de nuestras principales misiones como docentes es, hoy más que nunca, el logro de aprendizajes que permitan dar sentido a la actividad matemática. Esta tarea no es sencilla, y exige replantear en primer lugar nuestras concepciones sobre cuestiones como qué se entiende por aprender, qué se considera que debe ser aprendido, cómo es el proceso del conocimiento, cómo son o deben ser las interacciones en el aula. Como producto del aprendizaje se busca el cambio mental. Resulta evidente que, el aprendizaje es un proceso personal,

...es una construcción propia que se va integrando e incorporando a la vida del sujeto en un proceso cíclico y dinámico, que –a su vez– involucra un cambio relativamente permanente en la capacidad de las personas, su disposición o su conducta. (Crispín, Esquivel, Loyola y Fregoso; 2011, p. 12)

Estos autores expresan:

...la función del profesor en la actualidad es orientar al estudiante para que desarrolle un conjunto de capacidades tanto intelectuales como socio-afectivas que le permitan continuar aprendiendo durante toda su vida y tomar conciencia de sí mismo, de sus motivaciones, capacidades y posibilidades. Se trata de que aprenda a trabajar con otros, pensar críticamente, resolver problemas, buscar la información necesaria, comprender la realidad desde distintas perspectivas y desde su complejidad, así como tomar decisiones informadas y reflexionadas que le permitan asumir la responsabilidad de éstas y de las acciones que le siguen. (p. 12)

Desde esta posición, nuestra atención debe trasladarse de la enseñanza al aprendizaje y reconocer que el proceso educativo debe centrarse en los estudiantes. Esto implica tener en cuenta elementos que afectan, de un modo transversal, el diseño de diferentes experiencias de aprendizaje. Se trata de plantear tareas que los involucren activamente en su aprendizaje. Debemos trabajar para llevar al aula acciones que conviertan a los estudiantes en activos participantes del proceso de aprendizaje respetando las individualidades en un contexto colaborativo.

Aprendizaje significativo y aprendizaje personalizado

Sabemos que, tal cual lo manifiestan Crispín, Esquivel, Loyola y Fregoso (2011),

El aprendizaje es un proceso multifactorial que el sujeto realiza cotidianamente más allá del ámbito académico-escolar en la relación entre persona y ambiente, lo que involucra las experiencias vividas y los factores externos. Muchas cosas las aprendemos de manera tácita e inconsciente, con ellos y los demás conocimientos la persona resuelve problemas en la vida cotidiana.

Cuando se trata del aprendizaje académico, el proceso debe ser consciente. A partir de sus conocimientos y experiencias previas, la persona interpreta, selecciona, organiza y relaciona los nuevos conocimientos y los integra a su estructura mental. La construcción de nuevos conocimientos y el desarrollo de competencias requieren la participación activa del sujeto. De allí la importancia de entender los diferentes factores y procesos involucrados en el aprendizaje, ya que al conocerlos, tanto profesores como alumnos serán capaces de lograr un aprendizaje significativo y relevante para diferentes aspectos de la vida. (p. 12)

Bajo esta premisa, es importante reconocer que, un aprendizaje significativo no es aquel que solo se memoriza, sino el que se construye, integrándose en lo ya aprendido, modificando aprendizajes anteriores. El aprendizaje

significativo no es la simple conexión de la información nueva con la ya existente en la estructura cognoscitiva del que aprende. Implica la modificación y evolución de la nueva información, así como de la estructura cognoscitiva involucrada en el aprendizaje. Un aprendizaje es significativo si se logran hacer cosas significativas con él y se logra hablar de él significativamente. Según Ausubel, Novak y Hanesian (1983), para que se produzca un aprendizaje significativo, el estudiante debe ser capaz de relacionar la información nueva con sus conocimientos previos, componiendo significados, integrando o asimilando los nuevos conocimientos, a partir de la estructura conceptual que ya posee o de su propia experiencia.

Que se produzcan estas relaciones va a depender también de la disposición, es decir de la motivación y actitud, por aprender, así como de la naturaleza de los materiales o contenidos de aprendizaje. De esta manera, el aprendizaje no solo requiere implicación, participación y protagonismo, sino que es fundamental considerar el contexto en el que se realiza.

Es por ello que, para favorecer aprendizajes significativos, es necesario implementar en el aula, estrategias didácticas que faciliten al alumno construir su conocimiento partiendo de sus experiencias y de su contexto, de manera que aprenda a pensar y a aprender, es decir, a ser responsable de su propio conocimiento.

Dos elementos importantes para el aprendizaje significativo son la experiencia (teórica, práctica, etc.) y que el docente deje que los alumnos sean el centro de su aprendizaje. De esta manera, se define la relación entre el aprendizaje significativo y el aprendizaje centrado en el alumno. Lo que se pretende es que el alumno sea capaz de producir y generar su propio conocimiento a partir del entorno que lo rodea. En este contexto, toma sentido comenzar a hablar de entornos personales de aprendizaje.

Coll (2016) sostiene que la personalización de los aprendizajes es uno de los planteos más explorados en la actualidad. El autor manifiesta que:

La personalización del aprendizaje va mucho más allá de la voluntad de ajustar la acción educativa a las características y necesidades del aprendiz. La finalidad última de la personalización es que el aprendiz dé un sentido personal a lo que aprende. Podríamos decir, por lo tanto, y no es un juego de palabras, que el resultado de la personalización del aprendizaje no es un aprendizaje “personalizado” entendido como el aprendizaje resultante de una enseñanza diferenciada, sino más bien un aprendizaje al que el aprendiz puede dar un sentido personal. (p. 6)

El aprendizaje personalizado es aquel que “tiene un sentido personal para el aprendiz” (Coll, 2016, p. 6). El autor además expresa que:

... la personalización puede referirse al ritmo de aprendizaje, como sucede cuando los alumnos deciden el tiempo que dedican a trabajar un tema; a cuándo y dónde aprenden, como en el aprendizaje en línea; a los recursos y materiales que utilizan para aprender; a las actividades de aprendizaje; o incluso, en las propuestas más radicales y que generan más controversia, especialmente en el caso de la educación básica obligatoria, a qué deben aprender. La mayoría de las propuestas combinan varios de estos aspectos y pocas los tienen todos en cuenta. (p.7)

Coll (2016) deja claro además que:

... personalizar el aprendizaje implica dar voz a los aprendices y ofrecerles la posibilidad de una elección sobre lo que aprenden, cuándo lo aprenden y/o cómo lo aprenden. La personalización va más allá de la individualización (ajustar el ritmo de aprendizaje), la diferenciación (ajustar la metodología) y la inclusión (eliminar las barreras del aprendizaje) y se propone conectar el aprendizaje con los intereses y experiencias del aprendiz. En un entorno educativo personalizado, el ritmo de aprendizaje, los objetivos, los contenidos y la metodología pueden ser diferentes para los aprendices. (Coll, p.7)

Resulta de fundamental importancia adecuar la enseñanza a las exigencias del pensamiento, del aprendizaje y de las realidades tanto histórica, institucional como cultural que requiere la actividad matemática. Nos preguntamos qué tipo de conocimientos y habilidades debemos presentar a nuestros alumnos, qué tipos de procesos de aprendizaje deben ser llevados a cabo por ellos para favorecer aprendizajes significativos, cómo desarrollar disposición a pensar activamente y resolver problemas.

Es preciso propiciar las condiciones que puedan hacer del aula de matemática un ambiente en el que los estudiantes desarrollen experiencias de aprendizaje, que fomenten procesos de exploración e indagación a través de estrategias de enseñanza que favorezcan la construcción de conocimiento y el desarrollo del pensamiento matemático. Planteamos la necesidad de generar esos escenarios contruidos para favorecer de manera intencionada las experiencias de aprendizaje, considerando al ambiente de aprendizaje como “un espacio en el que los estudiantes interactúan, bajo condiciones y circunstancias físicas, humanas, sociales y culturales propicias, para generar experiencias de aprendizaje significativo y con sentido” (Ministerio de Educación Nacional. República de Colombia, s.f). También, en este contexto es importante establecer claramente que una experiencia de aprendizaje

.. es una oportunidad que se ofrece a los alumnos para que tengan una vivencia compartida que los lleve a descubrir, conocer, crear, desarrollar destrezas y habilidades. Su principal característica es que el actor

central es el alumno, ocupando un papel protagónico en el proceso de aprendizaje pensando, sintiendo y actuando para resolver problemas y enfrentando desafíos que la experiencia de aprendizaje plantea. (Ministerio de Educación de Perú, 2021, pp. 2-3)

Teniendo en cuenta todo lo expresado y considerando

...que cada persona aprende a su ritmo, que aprendemos cuando «construimos» nuestro conocimiento, encajando en nuestra visión del mundo y nuestra experiencia lo que ya sabíamos y lo que es nuevo, y que no aprendemos aisladamente, sino dentro de relaciones sociales y de comunicación. (Sancho y Borges, 2011, p. 43)

resulta necesario replantearnos claramente y con responsabilidad nuestra tarea en el aula.

Es cierto además que la evolución tecnológica ha influido notablemente en el ámbito de la educación, modernizando los procesos de gestión y generando nuevos entornos de aprendizaje. A lo largo de los últimos años, los espacios físicos y los espacios virtuales se han ido combinando, “fortaleciendo la idea del aprendizaje en cualquier momento y en cualquier lugar” (Gros, 2015, p. 59).

Gros (2011) expresa que, de la misma manera que se espera en la formación presencial, en la formación virtual, o en un modelo que combine ambas, los estudiantes no solo deben cumplir un papel de consumidores de la información, sino que deben contribuir a contextualizar el espacio de aprendizaje. Sostiene:

...la formación debe garantizar el aprendizaje independiente de los estudiantes, pero, dada la importancia del aprendizaje como un proceso social, también hay que diseñar experiencias formativas que ofrezcan posibilidades para la colaboración. En un enfoque centrado en el estudiante, las actividades para el aprendizaje y el seguimiento constante del profesorado son elementos fundamentales. (p. 10)

La personalización de los ambientes requiere considerar de manera amplia, los diferentes factores que influyen en el aprendizaje. Muchos autores reconocen la influencia, a la hora de favorecer aprendizajes significativos, de las preferencias en cuanto a estilos de aprendizaje. Los estilos de aprendizaje que se pueden dar en los alumnos, puesto que sus características propias van a definir la metodología más adecuada a implementar en el aula para incrementar la eficacia de los procesos de enseñanza y de aprendizaje en cada uno de ellos.

Trabajar con diferentes estrategias permite aprovechar el o los estilos de aprendizaje que aparecen en mayoría a la vez que fortalecer el resto o motivar la aparición de los ausentes. Todo esto influye en el desarrollo de competencias importantes tales como, facilitar la adquisición de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la práctica de actitudes en las clases, entre pares o no y en otras situaciones de carácter didáctico, como el trabajo en equipo.

Estilos de aprendizaje

El estilo de aprendizaje es la forma propia con la que cada individuo aprende, es decir, cómo un alumno utiliza sus propios métodos y estrategias para aprender. Si bien existen muchas formas de definir y estudiar los estilos de aprendizaje, Crispín, Esquivel y Loyola (2011) consideran que

Los estilos de aprendizaje se refieren a la manera o modo preferente de aprender de una persona y se relaciona con los factores anteriores (cognitivos, socio-afectivos, fisiológicos y ambientales). Las personas pensamos, sentimos, aprendemos y nos comportamos de manera diferente. Cada sujeto tiene una manera particular de aprender, es decir, de incorporar conocimientos y establecer asociaciones nuevas de conocimientos para utilizar esta información en la resolución de problemas. El estilo de aprendizaje que cada individuo utiliza depende de sus características personales, sus experiencias e interacciones sociales. Se va desarrollando a lo largo de la vida e influyen en él, de manera importante, las experiencias que va teniendo cada sujeto. Las características de personalidad, la manera en que percibimos la realidad (sentido de la vista, el oído, el tacto) y la forma en que procesamos la información, forman parte de nuestro estilo de aprendizaje. (p. 38)

Alonso, Gallego y Honey (2007) sostienen que los estilos de aprendizaje son los rasgos cognitivos, fisiológicos y afectivos utilizados como indicadores de cómo los alumnos perciben, interaccionan y responden en sus ambientes de aprendizaje. Los autores, basados en teorías cognitivas del aprendizaje, argumentan que es posible categorizar la manera en que las personas acceden al conocimiento de cuatro formas diferentes. Teniendo en cuenta esto, como aprendiz, es decir, como persona que aprende, se puede ser: activo, reflexivo, teórico o pragmático.

Aprendiz activo: es la persona que aprende haciendo, se siente más cómodo en el ámbito de la acción y se compromete con actividades tangibles. Necesita involucrarse, poner manos a la obra y sumergirse en las actividades que quiere aprender. Se concentra en la parte del hacer y eso quizás lo lleve a no prestar mucha atención al revisar *ese hacer* de manera concienzuda. En general, este tipo de aprendices disfruta haciendo, ejecutando y produciendo. Les resulta difícil apreciar las implicancias de sus experiencias y llevarlas a un nuevo nivel. Pasar a la acción es lo que ellos conocen, es lo familiar y pueden caer en el riesgo de descuidar

otros aspectos y muchas veces desperdician sus experiencias como oportunidades de aprendizaje. Características principales: animador, improvisador, descubridor, arriesgado y espontáneo.

Aprendiz reflexivo: aprende observando y pensando en lo que ocurre. Por lo general le cuesta atreverse, pasar a las acciones que intuyen necesita realizar porque se siente mucho más cómodo observando lo que pasa desde afuera, desde la tribuna, desde lo que hacen los demás. Muchos aprendices reflexivos son muy hábiles en cambiar su posición como observadores, ver lo que pasa desde diferentes puntos de vista. Les gusta tomarse su tiempo para procesar lo que pasa, pues esa es la manera en que sienten que pueden llegar a las conclusiones apropiadas, aunque de esa manera se arriesgan a quedarse en un lugar donde no paran de darle vueltas a las cosas. En esos casos pierden la oportunidad de encontrar esos puentes que enlazan sus experiencias con experiencias previas o de generalizar para encontrar patrones dificultando su capacidad de análisis. Características principales: ponderado, concienzudo, receptivo, analítico y exhaustivo.

Aprendiz teórico: busca analizar y explicar qué es lo que se encuentra detrás de las acciones y de los eventos. Necesita modelos, sistemas, conceptos y categorizaciones para darle un sentido lógico tanto a los conceptos como a los procedimientos. Su manera de aprender depende estrechamente de una buena observación de lo que sucede para que sus teorías tengan cierta validez. Si su observación es débil, eso puede comprometer el nivel de su análisis y si su planeamiento y su capacidad de generar nuevas experiencias también son débiles, perderá oportunidades de integrar nuevas oportunidades de aprendizaje hacia el futuro. Características principales: metódico, lógico, objetivo, crítico y estructurado

Aprendiz pragmático: como el activo, necesita poner en práctica en la vida real lo que aprende. Los conceptos abstractos no le son de mucha utilidad si no puede aplicarlos de manera concreta. Sin embargo, el pragmático, a diferencia del activo, es un experimentador nato, prueba constantemente nuevas ideas, teorías y técnicas para ver si funcionan en la vida real. Se siente cómodo planificando y creando las bases para nuevas experiencias. Le gusta trazarse objetivos que lo lleven a esa meta mayor que tiene como buen planificador. Para que un pragmático convierta esos planes en realidad, debe comprometerse con los aspectos más activos de su aprendizaje y no quedarse paralizado en la preparación o la estrategia. Características principales: experimentador, práctico, directo, eficaz y realista

Trabajar con diferentes estrategias (tanto en lo presencial como en lo virtual) permite aprovechar el o los estilos de aprendizaje más presentes en el aula pero a su vez, fortalecer, afianzar y hacer aparecer al resto con el fin de lograr el aprendizaje de calidad esperado.

Experiencia en el aula

Si buscamos el aprendizaje significativo y personalizado en un contexto agronómico, nuestras propuestas deberán diseñarse con el propósito de favorecer el desarrollo, de una manera equilibrada, de los estilos que aparecen en nuestro alumnado.

La indagación acerca de las características relacionadas a las formas de acercarse al conocimiento realizada con una población de 221 alumnos, el primer día de cursado de Matemática I de la carrera Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral mostró que se reconocen los cuatro estilos de aprendizaje en las preferencias de los estudiantes. El análisis de la información obtenida estableció que el 58 % de los estudiantes prefirieron el estilo reflexivo, mientras que el 22% el estilo teórico, el 14% el estilo pragmático y solo el 6% el estilo activo. Claramente los aprendices activos son los que se ubican en el último lugar y muy alejados de los que se reconocen reflexivos. (Vrancken, Schmithalter y Müller, 2024)

A partir de esto, y dada la necesidad de desarrollar acciones para incentivar y favorecer el estilo activo, se diseñó una experiencia de aprendizaje para promover la experimentación buscando trabajar la idea *de ajuste de funciones* desde la contextualización de la matemática en la carrera que cursan. Se trabajó la determinación del área foliar como una aplicación de la teoría de funciones ya desarrollada en las primeras semanas de cursado.

Esta experiencia se llevó a cabo después de desarrollar completamente el tema Funciones polinomiales y racionales. Dado que las aulas virtuales son un complemento importante de las clases presenciales, se decidió implementar un trabajo práctico combinando la clase presencial en el gabinete de computación y el trabajo en el aula virtual disponible para el dictado de la asignatura en la plataforma Moodle.

La semana anterior a la clase, los alumnos recibieron la información que aparece en la Figura 1 a través del aula virtual. Como se puede observar, se dan las instrucciones de lo que debían preparar para asistir a la clase y poder comenzar con la realización del Trabajo Práctico planificado. Los estudiantes también fueron informados que la actividad se iba a realizar durante una hora. En el Gabinete de Informática, los estudiantes

recibieron la información que aparece en la Figura 2. También se habilitó un espacio para el envío del archivo correspondiente según las consignas y el tiempo de entrega indicados. En el Anexo se presenta el Enunciado completo de la actividad.

INDICACIONES PARA EL TRABAJO PRÁCTICO

El trabajo práctico lo realizarán en grupos de a dos integrantes, por lo que pueden ponerse de acuerdo con quién trabajarán y preparar el material juntos.

1. Extraiga hojas, entre 8 y 10, todas pertenecientes a la misma especie vegetal. Selecciónelas de diferentes partes de la planta o árbol y de manera que tengan diferente tamaño.
2. Saque una foto de las hojas junto con una regla. Las hojas deben estar ordenadas, de menor a mayor o de mayor a menor. Cuide que, en la imagen, las hojas queden alineadas de manera horizontal, como se muestra en la figura.



3. Guarde la foto en cualquier dispositivo USB para trabajar el archivo en la computadora.

Figura 1. Instrucciones previas a la clase

- Enunciado actividad
- Instructivo Image.J
- Instructivo para la descarga del programa Image J
- Foto hojas

Envío del Trabajo Práctico

En un único archivo copia la foto con la que trabajaste, las tres tablas y los tres gráficos de excel.

Guárdalo en formato .pdf y envíalo.

Si trabajaste con un compañero, ambos deberán enviar el mismo archivo.

Figura 2. Instrucciones para el desarrollo del Trabajo Práctico

Como se desprende de la lectura del enunciado de la actividad, los alumnos:

- debieron trabajar y prestar atención al entorno virtual (antes, durante y después de la clase presencial),
- pudieron realizar la actividad (si era su decisión) con un compañero favoreciendo el trabajo colaborativo,
- debieron interiorizarse en el manejo del software ImageJ para determinar ancho, largo y área foliar de las hojas,
- hicieron uso del Excel para lograr los gráficos y el modelo que se ajustaba a la propia nube de puntos,
- trabajaron ideas estadísticas que para muchos eran desconocidas,
- comenzaron a manejar un lenguaje diferente en relación a la matemática, la estadística y la fisiología vegetal,
- tuvieron que administrar sus tiempos y, finalmente
- generar y enviar el informe final.

La experiencia resultó muy interesante. Los alumnos se entusiasmaron, respondieron a las consignas y se logró un ambiente de trabajo cordial y ameno. Con relación al archivo enviado con las tablas y gráficos, fue muy enriquecedor lo que se propone a través del aula virtual. La plataforma Moodle brinda la posibilidad de subir un archivo con la resolución de las consignas planteadas y el otorgamiento de una calificación. En este caso, esa calificación no fue cuantitativa sino cualitativa, indicando errores de cálculo, de interpretación, de graficación y no respeto de las normas de presentación. Se estableció la posibilidad de rehacer los ítems que no estaban correctos y completar los que faltaban para volver a recibir la devolución por parte del docente. El intercambio continuó más allá del tiempo establecido para la resolución del trabajo práctico en sí mismo.

A modo de reflexión

Podemos decir que, transformar el aula en un escenario que considera los estilos de aprendizaje de los estudiantes es posible. Como docentes comprometidos con nuestra tarea es importante que indagemos los estilos de aprendizaje que predominan en nuestra aula universitaria a fin de generar propuestas que atiendan a los que prevalecen pero que favorezcan también la aparición de los otros. Para nuestros alumnos, a fin de optimizar el camino hacia el cumplimiento de sus metas, es muy importante identificar la manera en que les resulta natural aprender y considerar las posibilidades que se pueden abrir explorando y adoptando aspectos de esos estilos de aprendizaje que les son más ajenos.

Referencias Bibliográficas

- Alonso, C., Gallego, D., y Honey, P. (2007). *Los estilos de aprendizaje. Procedimientos de diagnóstico y mejora* (7a ed.). Bilbao: Mensajero.
- Ausubel, D. Novak, J. y Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México. Editorial Trillas.
- Coll, C. (2016). La personalización del aprendizaje escolar. El qué, el por qué y el cómo de un reto insoslayable. En J. M. Vilalta (Dir.). *Reptes de l'educació a Catalunya. Anuari d'Educació*. (Trad. I. Merino). Barcelona: Fundació Jaume Bofill.
- Crispín, M.; Esquivel, M. y Loyola, M. (2011). Factores relacionados con el aprendizaje. En M. Crispín (Coord.). *Aprendizaje autónomo: orientaciones para la docencia* (pp. 29-48). Universidad Iberoamericana, AC.
- Crispín, M.; Esquivel, M.; Loyola, M. y Fregoso, A. (2011) ¿Qué es el aprendizaje y cómo aprendemos? En M. Crispín (Comp.). *Aprendizaje autónomo: orientaciones para la docencia* (pp. 10-28). México D.F.: Universidad Iberoamericana, AC.
- Gros, B. (2011). ¿Por qué un nuevo libro sobre e-learning? En B. Gros (ed.). *Evolución y retos de la educación virtual. Construyendo el e-learning del siglo XXI*. (pp. 9-11). Barcelona: Editorial UOC.
- Gros, B. (2015). La caída de los muros del conocimiento en la sociedad digital y las pedagogías emergentes. *Education in the knowledge society (EKS)*, 16(1), 58-68.
- Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (s.f.). *Ambientes de aprendizaje. Desarrollo de competencias matemáticas*. Portal educativo "Colombia Aprende". Recuperado el 8 de junio de 2016 de <http://www.colombiaprende.edu.co/html/productos/1685/w3-article-288989.html>
- Ministerio de Educación de Perú (MINEDU), 2021. ¿Qué es una Experiencia de Aprendizaje? Recuperado el 25 de marzo de 2023 de <https://mineduperu.org/que-es-una-experiencia-de-aprendizaje-2021-minedu/>
- Sancho, T y Borges, F. (2011). El aprendizaje en un entorno virtual y su protagonista, el estudiante virtual. En B. Gros (ed.). *Evolución y retos de la educación virtual. Construyendo el e-learning del siglo XXI*. (pp. 27-49). Barcelona: Editorial UOC.
- Vrancken, S., Schmithalter, M, y Müller, D. (2024). Estilos de aprendizaje en matemática. Resultados y análisis de la aplicación del cuestionario Honey – Alonso en alumnos ingresantes a Ingeniería Agronómica. *Revista de Educación*, 31(2), 113-134. Facultad de Humanidades. Universidad Nacional de Mar del Plata.

ANEXO

Enunciado de la Actividad

Una Aplicación de Funciones. Determinación del Área Foliar

Las hojas son órganos vegetativos, generalmente aplanados, situados lateralmente sobre el tallo, encargados de la fotosíntesis. El estudio del área foliar es de vital importancia, ya que está asociada a muchos procesos agronómicos, ambientales, biológicos y fisiológicos que incluyen, entre otros, el análisis de crecimiento, fotosíntesis, transpiración, interceptación de luz, asignación de biomasa y el balance de energía. Para determinar el área foliar existen diversos métodos. El método tradicional consiste en cosechar un elevado número de hojas para así determinar la superficie foliar de cada una. Este es un proceso costoso y que demanda mucho tiempo. Como alternativa se proponen métodos no destructivos, con software que utilizan el análisis de imágenes para estimar el área foliar en forma rápida y precisa. En nuestro caso, cortaremos unas pocas hojas para trabajar de manera más sencilla. Como alternativa, pueden sacar fotos a las hojas directamente desde la planta o árbol, de manera que estén en una posición plana y poder tomar algunas medidas. Utilizaremos luego el software ImageJ para determinar ancho, largo y área foliar de las hojas.

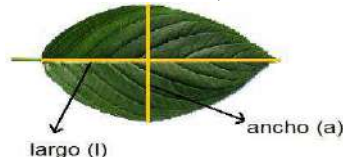
Metodología

Se ajustará una ecuación que relacione el ancho o largo de las hojas con su área foliar. Para ello:

1. Extraiga hojas, entre 8 y 10, todas pertenecientes a la **misma especie vegetal**. Selecciónelas de diferentes partes de la planta o árbol y de manera que tengan diferente tamaño.
2. Saque una foto de las hojas junto con una regla. Las hojas deben estar ordenadas, de menor a mayor o de mayor a menor (Ver imagen paso 2 del instructivo anexo). Cuide que, en la imagen, las hojas queden alineadas de manera horizontal, como se muestra en la figura. Guarde el archivo en su computadora.
3. Trabajando en Excel, construya una tabla como la siguiente.

Nº de hoja	Largo	Ancho	Largo . Ancho	Área foliar
------------	-------	-------	---------------	-------------

4. Obtenga la medida del largo (l) y el ancho (a) de las hojas extraídas, como muestra la figura, utilizando el programa ImageJ y vuelque los datos en la tabla de Excel (ver instructivo anexo, pasos 1 a 7).



Luego complete la columna correspondiente al producto entre ambos (largo por ancho).

5. Con ImageJ, obtenga el área foliar de cada una de las hojas y vuelque los datos en la tabla de Excel (Ver instructivo anexo, pasos 8 a 13).
6. Grafique los valores del área foliar encontrada en función del: **a)** largo, **b)** ancho y **c)** largo por ancho. Utilice para cada gráfico una hoja distinta de su archivo de Excel. *Nota.* La gráfica que se obtiene al representar los pares ordenados de la tabla recibe el nombre de *diagrama de dispersión*.
7. Observe la nube de puntos de cada una de las representaciones gráficas del inciso anterior. En muchos casos estas gráficas sugieren que la situación puede modelarse mediante una función. Con base en la forma del diagrama, determine si los puntos parecen seguir la gráfica de un tipo conocido de función. Si es así, ¿qué tipo de función considera que se ajusta mejor a los datos representados?
8. Una vez elegida la función que parece modelar la situación, podemos determinar su expresión algebraica utilizando los datos dados. Esta tarea, cuyo estudio profundizarán en Estadística, puede realizarse con algunas calculadoras, aplicaciones o programas de cómputo. En Excel, podemos usar la opción “Agregar línea de tendencia” para encontrar la ley de la función según el modelo que seleccionamos previamente. Siguiendo las indicaciones del docente tilde, entre las opciones que el programa le muestra como tipo de tendencia, la que considera que se aproxima mejor a los datos dados. Tilde también la opción “Presentar ecuación en el gráfico” para visualizar la expresión algebraica correspondiente al modelo elegido.
9. El procedimiento utilizado por Excel al determinar el modelo que se ajusta a una serie de datos se llama “regresión”. Muchas veces los datos que se presentan en determinada situación se pueden modelar de manera bastante precisa con diferentes funciones. Es importante analizar que tan bien modelan los datos dados o cuál es la mejor función de ajuste. Cuando se emplea la opción “regresión” en calculadoras, aplicaciones de celular

o computadoras, se observa que los programas dan como salida un valor “R²”. El R-cuadrado es una medida estadística de qué tan cerca están los datos de la línea de regresión ajustada. También se conoce como coeficiente de determinación. Esta correlación, conocida como "bondad de ajuste", se representa como un valor entre 0,0 y 1,0. Si bien su análisis no es tan sencillo, básicamente un valor de 1,0 indica un ajuste perfecto y, por tanto, un modelo muy fiable para las previsiones futuras, mientras que un valor de 0,0 indicaría que el cálculo no logra modelar los datos con precisión en absoluto. Para cada uno de sus gráficos utilice la opción “Presentar el valor R cuadrado en el gráfico”. Introduzca otros modelos que permitan modelar los datos. Observe qué sucede con esta medida.

Cogno-Tecno-Emoción:
Mediaciones Tecnológicas de la Emocionalidad en el Desarrollo del Pensamiento Matemático

Fredy Enrique GONZÁLEZ
Programa de Posgrado en Educación Matemática
Universidad Federal de Ouro Preto (UFOP), Brasil
fredy.gonzalez@ufop.edu.br

Resumen

En este contexto se presentarán las articulaciones entre las dimensiones cognitiva y emocional que una persona pone en juego cuando se encuentra inmerso en la realización de una Tarea Intelectualmente Exigente en un ambiente tecnológicamente mediado como, por ejemplo, un Espacio Virtual de Aprendizaje, una actividad de aula síncrona y remota en el contexto de una e-meeting. Se propone el constructo Cogno-Tecno-Emoción para sustentar una estrategia de aprendizaje en la cual convergen resultados de: las Ciencias Cognitiva acerca de cómo aprenden los seres humanos; investigaciones sobre la incidencia de las emociones en el aprendizaje humano; y, el impacto de la utilización de dispositivos tecnológicos sobre el desempeño humano

Análisis de recursos educativos en la formación del profesorado: algunas experiencias

Roberto VIDAL CORTÉS
Universidad Alberto Hurtado, Chile

Resumen

El propósito de esta conferencia es destacar la importancia de integrar el Análisis de Recursos Educativos (ARE) en la formación inicial de los profesores de Matemáticas. Consideramos que este análisis es una competencia profesional fundamental que debe formar parte de la preparación para la enseñanza. El uso, la selección y la elaboración de materiales educativos son tareas habituales en la labor docente. Los resultados de una implementación piloto demuestran que esta práctica promueve la reflexión crítica sobre el modelo predominante en la enseñanza de las matemáticas, que a menudo se basa en prácticas reproductivas. Además, fomenta una mayor familiaridad con un enfoque constructivista en el aula.

Palabras clave: Formación de profesores de Matemática. Recursos educativos para la enseñanza y aprendizaje de la Matemática. Enfoque constructivista en Educación Matemática. Tareas profesionales del profesorado de Matemática.

Introducción

Es ampliamente reconocido que la labor docente, sin importar el nivel educativo (preescolar, escolar o superior), demanda recursos de apoyo para una gestión eficiente.

En la actualidad, los estudiantes escolares cuentan con una amplia gama de recursos digitales, entre ellos las plataformas de video de acceso público, como YouTube, que ha experimentado un notable crecimiento en los últimos años, especialmente durante la pandemia de COVID-19. Esto se debe al aumento significativo en la producción de contenido educativo en forma de videos, disponibles de manera gratuita en línea, lo que los convierte en una herramienta accesible desde cualquier dispositivo con conexión a Internet.

Recientemente, los medios de comunicación y las redes sociales han destacado cómo las herramientas de Inteligencia Artificial, como GPT CHAT, pueden percibirse como una amenaza para el entorno educativo, de manera similar a lo que ocurrió en décadas pasadas con la introducción de calculadoras u ordenadores. Sin embargo, la tecnología puede ser un aliado valioso en la educación, siempre y cuando se produzca un cambio de paradigma educativo necesario. El modelo predominante se encuentra en declive frente a estas denominadas "amenazas". En este sentido, es relevante cuestionarse cómo la formación inicial de los docentes aborda los desafíos actuales, es decir, ¿hasta qué punto están preparados los futuros profesores para seleccionar, utilizar y adaptar recursos educativos, especialmente en el contexto de la Educación Matemática, con énfasis en el desarrollo de habilidades y competencias necesarias para el siglo XXI?

Con el propósito de explorar esta cuestión, compartiremos una experiencia concreta en el marco de una carrera de Pedagogía en Matemáticas, detallando sus aspectos clave con el objetivo de servir como ejemplo y fomentar su adaptación en otras instituciones formadoras.

Transformación del Trayecto Profesional Docente en Educación Matemática desde la perspectiva de la investigación metodológica

Rafael LORENZO MARTÍN
Universidad de Holguín, Cuba

Resumen

Las sociedades demandan nuevas necesidades educativas que convergen en la Educación 4.0 y su sinergia con la utilización de la Inteligencia Artificial Generativa. En este escenario la calidad en la educación matemática es fundamental para el desarrollo de habilidades críticas y analíticas necesarias en la sociedad moderna. La transformación del trayecto profesional docente en esta área implica una constante evolución metodológica que responda a las necesidades cambiantes del entorno educativo y laboral. La investigación metodológica en la formación escolarizada de la matemática permite identificar y desarrollar prácticas pedagógicas que fomenten un aprendizaje significativo y duradero. Esto es crucial, ya que la matemática no solo es una herramienta para otras ciencias, sino que también contribuye al desarrollo del pensamiento lógico y la capacidad de resolución de problemas.

Los factores asociados a la calidad de la matemática incluyen la profundidad del contenido, la precisión conceptual, y la habilidad del docente para facilitar el entendimiento y la aplicación de conceptos matemáticos complejos, entre otros aspectos esenciales. La formación docente debe enfocarse en estos aspectos para garantizar que los estudiantes no solo aprendan matemáticas, sino que también comprendan su relevancia y aplicabilidad en diversos contextos. Además, la calidad de la educación matemática tiene un impacto directo en el progreso académico y profesional de los estudiantes. Una base sólida en matemáticas es esencial para el éxito en carreras relacionadas con STEM (ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas), que son cada vez más demandadas en el mercado laboral global. En resumen, la transformación del trayecto profesional docente en educación matemática es una necesidad imperante que requiere una fundamentación sólida en la investigación metodológica, con el fin de mejorar la calidad de la enseñanza y, por ende, el aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos.

Optimización Didáctica en Matemáticas: Directrices en respuesta a los errores de los estudiantes

Miguel DELGADO PINEDA

**Departamento de Matemáticas Fundamentales
Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED), España
miguel@mat.uned.es**

Resumen

En este trabajo se presenta una interpretación de lo que puede ser entendido por optimizar la educación matemática desde un punto de vista didáctico. Se lista un conjunto de errores frecuentes cometidos a la hora de escribir en Matemáticas, los cuales muestran que el estudiante tiene serias dificultades de semántica matemática aunque puedan parecer enmascarados de errores sintácticos. Además, se presentan tres postulados que intentan explicar la dinámica tanto en el marco de las acciones educativas como en lo relativo al de aprendizaje autónomo. Estos postulados son las leyes que pueden explicar las dificultades del que enseña y del que aprende y quedan reflejadas en ejemplos de errores comunes que emergen en la enseñanza de las Matemáticas.

Palabras clave: Razonamiento matemático. Errores sintácticos. Dificultades Didácticas. Errores matemáticos. Visualización matemática.

Introducción

Entendemos que un artículo que trata errores cometido por estudiantes debería tener una introducción al estilo de cómo se escribía las introducciones de los artículos de Matemáticas antes de los años cincuenta del siglo pasado. Un estilo que pudiera ser leído por cualquiera sin tener que hacer unas lecturas previas de múltiples artículos que suelen citarse en una introducción, y que muestran una supuesta erudición del autor. Ciertamente, una introducción de errores en Matemáticas debería ser fácil para ser leída por un simple profesor o un simple estudiante.

Podemos decir que la Matemática empezó hace mas de 3000 años con los números

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10...

y con los puntos y las rectas. Por suerte, todo lo que se establece en matemática puede ser catalogado como 0 o 1, es decir, como falso o verdadero: La lógica matemática bivalente es la que establece las verdades matemáticas, así pues, no caben lógicas borrosas y lógicas estadísticas. Eso es lo que hoy vemos, pero, en cierta medida, se entendía una “Matemática” en un contexto filosófico hasta bien superada la Edad Media.

¿Cómo se construye la Matemática? Un aspecto importante de la Matemáticas es que ha sido construida, a lo largo de la historia humana, en el marco de diversas comunidades científicas diseminadas por todo el mundo, aunque hoy en día nos centramos en una única gran comunidad global. Así pues, el conocimiento matemático, catalogado en ocasiones como como *saber sabio*, es un patrimonio global de toda la humanidad.

¿Cómo se transmite la Matemática? Otro aspecto importante de la Matemática es la necesidad transmisora de una generación a otra de personas para que siga siendo un conocimiento global. Hay que hacer que la Matemática sea parte importante de la memoria colectiva humana, por ello, las instituciones académicas establecen protocolos de contenidos esenciales a transmitir. Es la figura del profesor, la institución más próxima a quienes deben acercarse al conocimiento matemático. El profesor es esencial en la transmisión puesto que debe adaptar ciertas verdades matemáticas al marco humano en el que actúa. La elección matemática y en la contextualización al entorno es donde el profesor experimenta lo que se cataloga como *saber a enseñar* para producir la adquisición de los conocimientos por parte de sus estudiantes. Es deseable que ese saber enseñable no puede entrar en contradicción fundamental con el correspondiente saber sabio matemático. Así pues, el enseñante elige un modelo reductor de dificultad cognitiva y suaviza algunos aspectos complejos para adecuarlo a su contexto profesional.

¿Cómo se adquiere la Matemática? El otro aspecto importante de la Matemáticas es asegurar que los conocimientos matemáticos transmitidos son adquiridos por los estudiantes. Ahora bien, no podemos tener la seguridad de que el saber adquirido no esté en contradicción esencial con el saber sabio. Esto es así puesto que cada persona emplea un modelo personal para almacenar lo enseñado. Esta Matemática adquirida es lo que se cataloga como *saber aprendido* por el estudiante.

Lo más elemental en Matemáticas es que entre estos saberes no haya contradicciones básicas que impidan o dificulten que el que hoy es un estudiante se convierta en un profesor mañana o en un científico pasado mañana. La dificultad y complejidad puede reducirse a estudios de casos, pero la coherencia entre saberes debe permitir sus transformaciones vía generalización y evolución en los intereses matemáticos de la sociedad. Sin duda, pueden aparecer dificultades y errores en esa trasposición, al igual que errores en lo adquirido por el estudiante, pero eso es un tema muy tratado en la literatura didáctica.

La diferencia de tratamiento que hacemos de los errores matemáticos de nuestra propuesta consiste en hacer un seguimiento de ciertos errores sintácticos, y usos, que identificamos dentro del marco de tres leyes didácticas, universales desde el punto de vista matemático, que suelen generar errores semánticos matemáticos y, por tanto, dificultan ciertos aprendizajes. Estas leyes nos permiten identificar y catalogar ciertas dificultades en la adquisición de conocimiento matemático y acercarnos a una forma de solventar esos saberes erróneos.

Optimización didáctica

En esta sociedad actual todos los ciudadanos han tenido alguna relación con Matemáticas y albergan ciertos recuerdos imborrables de sus quehaceres matemáticos de su juventud. Además, cada ciudadano espera que sus descendientes posean una formación matemática acorde con los tiempos que vive en la actualidad. Dar respuesta a esa esperanza es lo que tiene que hacer el sistema educativo nacional.

La denominación *Matemáticas* es una referencia global, puesto que la realidad es más compleja, ya que, hay muchas Matemáticas, o, mejor dicho, muchas áreas Matemáticas. Área con distintos fundamentos, con distintos métodos operativos y con distinta algorítmica mental tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Ahora bien, todas están basadas en aplicar un método deductivo-inductivo en sentido amplio, o método científico. Al fin y al cabo, la búsqueda de saber se asienta de forma deductiva o inductiva

La mayoría de las personas tienen una referencia a Matemáticas, pero para asegurar una alusión correcta hacen referencia a Matemáticas con lo que devuelve el diccionario de la Real Academia Española (RAE) y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. Esta estrategia permite asegurar que no se equivoca cuando habla para el público en general, aunque no sea un especialista en Matemáticas.

***Matemáticas:** Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones.*

En un discurso sobre Optimización Didáctica en Matemáticas tendrá que buscar el significado de Didáctica y el de Optimización que aporta el diccionario.

***Didáctica:** Arte de enseñar.*

Esta acepción del diccionario nos agrada y deja a la didáctica dentro en la categoría de las Artes y no de las Ciencias Humanas y Sociales (CHyS) como se interpreta hoy en día. Sin duda, las CHyS estudian el comportamiento individual y colectivo desde su origen, para comprender, o explicar, las regularidades que emergen en el conjunto de las instituciones humanas y particularidades que puedan observarse.

Wikipedia: Las ciencias sociales son las ramas de la ciencia relacionadas con la sociedad y el comportamiento humano. Se las distingue de las ciencias naturales y de las ciencias formales. Además, es una denominación genérica para las disciplinas y campos del saber que analizan y tratan distintos aspectos de las relaciones sociales y los grupos de personas que componen la sociedad. Éstas se ocupan tanto de sus manifestaciones materiales como de las inmateriales.

Al menos, puede entenderse cierto sesgo artístico a la didáctica empleada por un profesor común ante el sesgo de ciencia social que interpreta el investigador en didáctica. En cualquier caso, admitimos que la Didáctica Matemática se entienda en la actualidad como una ciencia social en la cual se aplican métodos propios sociales basados en la Estadística y en la Probabilidad de que ocurra algún suceso, aunque nuestro deseo es que encuentre una axiomatización coherente con lo que hoy hacemos.

Los Axiomas matemáticos se introducen por necesidad, para quitar toda posible interpretación personal y particular de los objetos y de las verdades matemáticas. Así pues, las verdades matemáticas no se generan por consenso o por votación popular. Las verdades matemáticas se deducen desde los axiomas o desde otras verdades deducidas o inducidas previamente. Esto no significa que la heurística, la simulación y la aproximación no tengan gran importancia en la Matemática.

Nos sorprende encontrar productos didáctico-matemáticos que perduren mucho, puesto que suelen tener una caducidad de menos de 10 años debido a un nuevo producto supuestamente mejor. La explicación que el didacta suele dar es que la Didáctica Matemática tiene un recorrido aproximadamente de 100 años, frente al recorrido superior a los 3000 años de la Matemática.

Trasmitimos Matemáticas de una generación a otra para formar parte de la memoria colectiva, aunque, no se suele entender si no se comunican bien. Es una necesidad social disponer de unos ciudadanos mejor formados para facilitar una transición generacional exitosa. Esto hace que algunos investigadores piensen que la Didáctica Matemática debe influir en el constructo universal de Matemáticas. Es evidente que una ciencia que no está axiomatizada y que hace referencia a constantes estudios locales, pues la existencia de ciertas teorías no se trata como teorías generales, no puede hacer cambiar el devenir universal matemático de una generación a otra, puesto que las verdades matemáticas trascienden las verdades de los grupos

sociales. En cierta medida existe una corriente de investigación que trata la Matemáticas como una cuestión etnológica, y acuñó el término etnomatemáticas. En realidad, insertan un nuevo saber relativo a facilitar el aprendizaje en el contexto de una determinada población o una cultura; lo que podríamos llamar *saber etnológico*. Negamos que existan unas etnomatemáticas, si bien reconocemos que puedan existir etnodidácticas que traten algunos temas matemáticos con cierta aceptación social.

En la mayoría de los casos, el discurso didáctico sea matemático o no, se basa en el uso constante de la palabra Optimizar tanto explícitamente como implícitamente. Nuevamente, se puede hacer una consulta en Internet con la expresión “optimización didáctica” para volver a tener un gran listado de direcciones y ficheros. Ahora bien, nos restringimos a los significados de nuestra lengua natural, es decir, al diccionario de la RAE que indica:

Optimizar: *Buscar la mejor manera de realizar una acción.*

Además, determina el significado de Optimización como:

Optimización: *Acción y efecto de optimizar.*

Si bien reconoce esta última palabra como un sinónimo de *Mejora*.

Podemos hacer diversas permutaciones de las palabras: optimización, didáctica y matemáticas, y algunas expresiones tienen sentido.

- Didáctica Matemática en Optimización. Puede interpretarse como la búsqueda de aplicar el arte de enseñar Matemáticas a los problemas de Optimización Matemática. Esta es un área bien conocida en Matemáticas, y en este caso sólo destacamos que distinguimos la Optimización Escalar Real y la Optimización Vectorial Real con sus maneras distintas de actuar.
- Optimización Matemática en Didáctica. En este caso se busca aplicar las reglas de la Optimización mono-objetivo o las reglas de la Optimización Multi-objetivo el arte de enseñar Matemáticas. Hasta la fecha ninguna teoría didáctica determina la aplicación o función objetivo con toda claridad, es decir, describe sólo verbalmente el objetivo simple o múltiple sin registro algebraico. Tampoco queda claro que el objetivo pudiera ser representado por números. Así, pues, no quedamos con una interpretación estadística de “mejora”.
- Optimización Didáctica en Matemáticas. Esta podría significarse como la búsqueda de la mejor forma de ejecutar el arte de enseñar en la ciencia deductiva de los entes abstractos. Esta es la permutación que nos interesa en este trabajo.

Quizás debiéramos esclarecer los significados y métodos de las dos primeras permutaciones mencionadas, pero parafraseamos a Pierre de Fermat diciendo: *Sé cómo probarlo* (explicarlo, en nuestro caso), *pero este margen es demasiado pequeño*.

Deseamos contar con la fuerza centralizadora que tiene un chiste por la sonrisa que genera, en este caso, uno sobre optimización. ¿Qué es un cubo? Un cuadrado óptimamente alimentado y engordado.

En ese chiste la palabra optimizar en Matemáticas se emplea en el sentido de maximizar, si bien hay la otra acepción en el sentido de minimizar. Esto obliga a cambiar el chiste. ¿Qué es un cuadrado? Es un cubo desnutrido y muy flaco.

Cuando un matemático habla con un pedagogo (no nos referimos a didactas de la Matemática) sobre optimización, resulta que este último siempre lo interpreta como mejorar un proceso educativo. Valgan las siguientes citas para iniciar la optimización didáctica

La optimización del aprendizaje implica una combinación dialéctica y compleja entre los roles del profesor como instructor (transmisor) y facilitador (gestor) y los roles del estudiante como constructor de conocimiento y receptor activo de información significativa. (Godino, 2015)

... el mejor o más efectivo método de enseñanza puede ser una mezcla de métodos, con una oportuna y ágil selección entre ellos” (Hiebert & Grouws, 2007)

Para que un proceso sea catalogado como Proceso de Optimización Didáctica (POD) se debe aclarar que dicho proceso presente “la mejor” forma de enseñar y que implique “la mejor” forma de aprender. Aquí está el problema puesto que cada investigador, arropado en alguna teoría didáctica, denomina a cada uno de los POD con los que opera, de forma distinta según la teoría y explicitando nomenclaturas variadas. Ante tanto POD se encuentra el profesor arropado de su experiencia en el aula y se pregunta: ¿Qué significa la mejor forma de enseñar? Su propia respuesta suele ser traducida como “más trabajo”. Por otro lado, el estudiante no suele saber nada de POD y está el aula con el profesor, se pregunta: ¿Qué significa la mejor forma de aprender? Ocurre que llega a una misma interpretación; “más trabajo”. Ahora bien, el investigador en didáctica matemática no suele admitir la respuesta de “más trabajo” puesto que matiza las acciones con la expresión “un mejor trabajo” acompañándola con unos buenos deseos tanto para el profesor como para el estudiante que se referencia como una mejor comprensión del conocimiento matemático desarrollado en el aula.

... cuando se habla de lo óptimo se destaca, obligatoriamente, que se trata de los mejores resultados posibles, no de forma general, sino en las condiciones concretas de la escuela, o determinado grupo... Lo óptimo en unas condiciones no lo es en otras. Las búsquedas de las variantes óptimas deben combinarse simultáneamente, con los esfuerzos encaminados a mejorar las condiciones para el funcionamiento del proceso docente-educativo”. (Babanski, 1982),

Otro chiste en fase: Un investigador le asegura a un profesor que, siguiendo tal método se asegura un 60% de comprensión con un error de más-menos 5%. El estudiante lo escucha y cuando el profesor la pregunta por el valor del límite que debía calcular, éste contesta más-menos infinito.

Optimización matemática

En Matemática tratamos con cuerpos (campos) ordenados como es el caso de los números reales. El orden de R es un orden total que es compatible con las operaciones algebraicas, razón por la cual, la búsqueda de máximos y mínimos es un problema bien definido para funciones reales tanto de variable real como variable vectorial real. Destacamos dos problemas de optimización distintos, la búsqueda de valores máximos (mínimos) absolutos o globales y la búsqueda de máximos (mínimos) locales o relativos. Quizás tengamos que releer la cita anterior para entenderla desde el punto de vista matemático. El problema de optimización concluye con la determinación el conjunto donde se alcanzan esos valores máximos, denominados maximizadores (minimizadores).

Algunas veces parece que el pedagogo no es consciente de algo que cualquier estudiante de matemáticas sabe: Si se está situado en un punto donde se alcanza un máximo (mínimo) local de una función real de variable real, en general, el variar ligeramente la posición numérica obliga a perder la posición óptima. Eso mismo ocurre con las funciones reales de variable vectorial. Así pues, esos cambios de posición hay que estudiarlos adecuadamente para no obtener valores menores. En cierta medida, lo mejor de Babanski debe ser entendido en modo local o relativo. Por otra parte, obtener el valor máximo (mínimo) absoluto puede ser un problema sin solución, pues depende de la función que se estudie. ¿Es presumible una optimización didáctica general o global?

Dicho esto, los matemáticos no suelen entender la expresión “la mejor forma aprender” y “la mejor forma de enseñar” de la que hablan los didactas, más cuando esas formas no están definidas explícitamente ni se corresponden a valores numéricos. Sin embargo, entienden como se ha construido la Matemática y cómo se ha comunicado a través de los siglos. No siempre ha sido igual, y comunican lo que sabe y como saben, pues en algunas ocasiones no hay opciones para elegir a la hora de comunicar Matemática.

Las funciones objetivo aludidas por los didactas de las Matemáticas suelen ser vistas con un conjunto de dimensiones que ni siquiera son numéricas, y tampoco están refrendadas por el trabajo en el marco de algún espacio vectorial donde definir una combinación, lineal o no. Muchas veces simplifican el problema general haciendo referencia a tal o cual dimensión. Con dos o tres dimensiones. ¿Qué es una posición óptima? Otras veces resulta que, algunas de esas dimensiones son de carácter interpretativas con “valores” descritos de forma discreta y enmarcadas en un conjunto de categorías no necesariamente disjuntas. En general, se idealiza un supuesto problema multi-objetivo o multi-dimensional al cual suelen dar respuesta realizando un estudio muy local y con una población experimental más o menos controlada. Para el profesor poner en marcha una supuesta idealización se vuelve “más trabajo”. Podemos suponer que todas las dimensiones tienen carácter numérico y, aun así, puede no tener sentido la búsqueda del óptimo, ya que, cuando el matemático trata con funciones vectoriales reales de variable vectorial real resulta que suele trabajar con el orden producto (orden de Pareto) que ni es compatible con las operaciones del espacio vectorial real ni es un orden total. Así pues, el problema vectorial multi-objetivo bien pudiera no tener vector máximo (mínimo) ni local ni absoluto. La optimización didáctica pudiera parecerse a una gran nube de la cual sólo vemos el exterior y si nos metemos en su interior perdemos las referencias visuales del exterior. Si la función objetivo debe ser interpretada de forma personal, entonces puede ocurrir que esa nube sea simple humo.

Cabe recordar que no se puede asegurar la solución óptima de un problema multi-objetivo de variable vectorial con un vector cuyas componentes son los óptimos de las restricciones del problema a cada una de las dimensiones de cualquier vector factible.

Conocimiento matemático

No es fácil determinar con absoluta certeza que un estudiante posee este o aquel conocimiento matemático. Ahora bien, cada persona posee una colección de saberes matemáticos más o menos extensa, y estos se corresponden con algunos elementos teóricos y algunos problemas.

Un protocolo que puede darnos cierta certeza de que el estudiante aprendió un conocimiento matemático, consiste en solicitar que exprese tal saber empleando algún registro de representación semiótica dado, como los expuestos en Duval (1999) y Delgado (2016), o si no los emplea ver qué tipo de representación espontánea usa, en el sentido de Hitt (2003, 2013) y Hitt & Quiroz (2019). A continuación, se le solicita que, cambie de registro para que podamos observar si traduce su primer registro a ese otro. Recordamos que en la literatura de didáctica de las matemáticas trabajos, por ejemplo: Duval (2006), se indica que un estudiante adquiere cierto conocimiento si es capaz de trasladarlo o traducirlo un registro semiótico de representación a otros tipos de registros. Así pues, si no comunica lo aprendido mediante la exposición o mediante uso en un problema o actividad, no podremos saber si atesora ese conocimiento. Tampoco podremos saber el tipo de pensamiento que empleó para aprender tal objeto matemático, si no lo expone.

Cada uno de esos saberes matemáticos de un estudiante está almacenado haciendo uso de algún proceso de visualización matemática, en el sentido de Delgado (2009), con lo que se genera un registro mental en el sentido de Duval (1999). Todo saber matemático, por mínimo que sea, genera un registro de representación mental. Éste permanece en memoria como si estuviera en el interior de una caja cúbica negra para todos aquellos que no sean el propio estudiante, tanto si es un registro de tipo espontáneo más o menos cercano a un registro académico de lo que debe adquirir, o uno de los registros de Duval (1999) o de Delgado (2019). Así pues, esta forma de registrar es totalmente opaca al profesor y al investigador, lo cual hace necesario que el estudiante elija algún registro de representación semiótica para comunicar su saber. Además, empleará el registro de representación semiótica que considere particularmente prioritario, con independencia del posible registro esperado por el profesor.



Figura 1: Caja negra correspondiente a un registro semiótico mental.

Podemos encontrar cajas negras a la hora de presentar objetos matemáticos, y ello no impide trabajar con ellos. Un paradigma de la caja negra es el concepto de número real. Concepto del cual asumimos sus axiomas; comprendemos de forma operativa, pero que no vemos la esencia del número; no lo entendemos en su extensión.

Podemos emplear el caso de un número irracional trascendente muy analizado y con nombre: π . Éste es utilizado desde la Enseñanza Primaria en relación con la longitud de una circunferencia y el área de un círculo. En esa etapa educativa se aproxima por 3.1416 y se espera a que el estudiante de Secundario o de Universidad opte, intuitivamente y de forma ingenua, por otra imagen después de la afianzada en Primaria. ¿Qué registro, imagen o representación se emplea?

¿Qué caracteriza a esas cajas negras? Al adquirirse un saber matemático, este se almacena en el interior de la caja, por lo cual, sólo podemos apreciar la superficie de la caja, que está compuesta por las siguientes seis caras:

1. **Cara de la Enseñanza:** Es posible entender el contenido de la caja en relación a la forma y método estratégico seguido para intentar plasmar ese conocimiento que el estudiante debe recibir. Se puede pensar en ello, si revisamos la enseñanza aplicada con el número π o con el concepto de composición de aplicaciones.
2. **Cara del Aprendizaje:** Lo aprendido por el estudiante en etapas anteriores permite apreciar la aceptación del nuevo saber contenido en la caja, así como la velocidad a la que se produce esta aceptación. Es esencial entender que la adquisición de conocimiento no es, necesariamente, explosiva si no que es fruto de una maceración con saberes acumulados. No se puede comprender la irracionalidad del número π desde la infancia, ni que es irracional trascendente.
3. **Cara de la Metodologías:** El reconocimiento del saber al amparo de las metodologías basadas, o no, en teorías didácticas permite describir determinados registros de representación más o menos favorecidos. La metodología debe constatar que se adquiere el conocimiento y que se sabe aplicar a un caso práctico o a un problema. La elección de la metodología debe primar la comprensión lectora y la facilidad de exposición del estudiante. Podemos pensar en una metodología favorecedora en el caso del número π consistente en presentar una secuencia de polígonos regulares con incremento de lados.
4. **Cara de los Medios:** Hay que destacar tanto el entorno donde se produce el aprendizaje como aquellos medios que ha sido utilizados para que se produzca. Por ejemplo, no se produce el mismo proceso de visualización de un concepto si se utilizan medios digitales que si se emplean sólo un pizarrón. Los medios inciden en la elección de imagen fundamental que se almacena con el conocimiento. En relación a lo dicho del número π se puede acceder a los dibujos polígonos regulares generado por un ordenador con mayor facilidad que si se dibujan a mano. Con un computador es fácil no se hace fácil observar la diferencia de un polígono regular de 30 lados y una circunferencia.
5. **Cara de la Inteligencia:** Un estudiante no es un autómatas, por tanto, todo lo que a él le llega por vía sensorial es recreado en su interior. La capacidad para valorar el conocimiento accesible depende notablemente de esa cualidad, que algunos denominan inteligencia personal como agrupación de las múltiples inteligencias personales. Una característica que favorece a esa inteligencia matemática es la capacidad personal de variar la velocidad de comprensión en nuevos conocimientos. ¿Por qué unos estudiantes encuentran las Matemáticas muy fáciles y otros no? En muchas ocasiones es debido a esa capacidad de variación indicada.
6. **Cara del Objeto matemático:** El objeto matemático teórico pudiera parecer muy abstracto en un principio, sin embargo, lo que se almacena es una representación del objeto siguiendo una elección entre distintas maneras de representar y de visualizar. Por ejemplo, no se almacena de la misma

forma el número un medio que la función primitiva de coseno, o el número e y la función exponencial.

El análisis relacional de todas las caras de una caja negra permite intuir el contenido de la caja en relación al contenido académico referente. Se puede sospechar una interpretación profesional basada en la experiencia, pero nunca se tendrá total seguridad de lo supuesto. En definitiva, tanto profesores como investigadores simplemente somos expertos en la interpretación de los conocimientos adquiridos por el estudiante, no en ver como los almacena.

Análogamente, podemos imaginar al conjunto de conocimiento matemático que un estudiante adquiere como una colección de cajas negras. La posibilidad de que el estudiante organice esa colección de forma que algunas cajas puedan ser adyacentes, es donde está uno de los puntos fuertes de la Enseñanza. Otro es que aquellas cajas separadas pudieran ser relacionadas de alguna forma. El punto fuerte del Aprendizaje es que el estudiante pueda hacer uso de los contenidos de esas cajas una vez que las ha relacionado de alguna forma, académicamente o espontáneamente.



Figura 2: Idealización del conjunto de conocimiento matemático.

Unas veces la separación de las cajas es debida a la naturaleza del contenido de la caja, por ejemplo, no es lo mismo una caja con la suma de números enteros que otra caja con la suma de números reales. Otras veces es debida a una deficiente de organización personal, bien por des gana o bien por falta de ayuda a la auto organización por parte del profesor. Muchas otras, se debe a la presencia de estas cajas en momentos distintos de la vida académica del estudiante, pues esta materia tiene un fuerte carácter acumulativo y suele requerir cambio de imagen para la visualización y variar el contenido de una caja. Así pues, es casi natural emplear una nueva caja negra que quedará desligada de la primera, con lo cual se genera un problema de decisión de caja que se debe escoger.

La falta de cambios en el interior de las cajas y de las separaciones entre cajas es favorecida muy frecuentemente cuando se producen errores bien por la exposición de contenidos del profesor o bien por la interpretación de contenido que hace el estudiante. Con el chiste de la figura 3 queremos hacer patente un burdo error de interpretación en el lenguaje natural. El mensaje puede ser claro, pero la interpretación del mensaje no.



Figura 3: Ejemplo de error de interpretación de contenidos

Quizás entendamos mejor lo de las supuestas cajas negras con la experiencia siguiente: ¿Cuánto es un medio y un medio? Esta pregunta le estuve haciendo a los estudiantes de los Institutos Nacionales de Bachillerato (Institutos de Enseñanza Secundaria), desde 1978 hasta 1994, donde era profesor, año tras año y aula por aula. La muestra la constituían, principalmente, los estudiantes nuevos en el centro; estudiantes de 1º de Bachiller (3º de Secundaria). Esta pregunta la hice con estudiantes novatos de la universidad, de vez en cuando. Aun hoy la hago ya que se presenta mediante un registro verbal y corresponde con una operación de números racionales.

Un porcentaje superior al 30% de los estudiantes no universitarios quedaban petrificados entre cinco y ocho segundos con cara de perplejidad. Desconozco, pues nunca se comentó, si se preguntaban: ¿Qué quiere el profesor que le responda a esta pregunta? El 30% de los estudiantes procesaban con lentitud el significado de la pregunta para responder sin equivocaciones. El 10% de los estudiantes no respondieron en menos de quince segundos. Algunos tardaron más de medio minuto en contestar. Además, si se preguntaba a un estudiante, resultaba que el 50% del resto del aula no intentaba encontrar la solución. Esto se evidenciaba al cambiar de estudiante ante la tardanza del primero, puesto que parecía que el juego empezara nuevamente. Al tercer cambio de estudiantes todos tenían alguna solución. También, se comprobaba que un porcentaje inferior al 25% sonreía ante la tardanza de la respuesta del primer compañero preguntado.

Cabría esperar que la respuesta unánime fuese “uno”, pero no fue así puesto que en muchas ocasiones la respuesta “dos medios”. ¿Pero no es lo mismo? Comentamos estas respuestas. Entre los que contestaron la segunda cabe destacar aquellos que “contaron dos veces un mismo objeto”, los que necesitaron hacer la “suma como fracción de un medio con un medio” y los que “multiplicaron dos por la fracción un medio”. Estos no entendieron la necesidad de simplificar la expresión, y sólo lo hicieron ante la insistencia del profesor. De aquellos que contestaron “uno” cabe destacar los que “sumaron la expresión 0.5 y 0.5”, puesto que casi ninguno pensó en “multiplicar 0.5 por dos”. Con este ejemplo podemos comprobar que había estudiantes que registraban “un medio”, en caja negra, como una fracción y otros como una expresión decimal finita. Es claro que emplearon distinta caja negra operacional para sumar fracciones o sumar números decimales, pero la caja de simplificar no fue activada en numerosas ocasiones. Aquí podríamos invocar el chiste donde el profesor pregunta a un estudiante: Rápido, ¿cuánto es 5 por 3? El estudiante contesta 16. El profesor desecha la respuesta dada y el estudiante le indica debió decir si prefería exactitud en lugar de rapidez.

La respuesta “cero” apareció en algunas ocasiones, con lo que se evidenciaba la falta memorización de expresión oral y el cambio de caja operacional. Parecería que el registro verbal oral no primase al del registro verbal escrito. Quizás esto nos permita entender que lo que asume el estudiante como medio comunicador de Matemáticas. ¿Lo que se pone en la pizarra? ¿Lo que habla el profesor? Quizás el estudiante asuma ¿una mezcla de las dos?, aunque sólo hace falta ver las notas que pudiera tomar para saber acertar en la respuesta.

Errores y errores

¿Qué enseñar? ¿Cómo enseñar? ¿Cuándo enseñar? Estas tres preguntas son las restricciones naturales al problema de optimizar didácticamente la enseñanza de las Matemáticas. Por ello, suponer que existe una mejor forma global de enseñar implica, necesariamente, decidir cómo explicitar cada una de esas restricciones. Es decir, implica clarificar las respuestas. La Administrativa Educativa intenta aclarar esas restricciones con leyes educativa repletas de descriptores de contenidos matemáticos, de aprendizajes, de competencias y otras muchas más consideraciones. Los investigadores en didáctica matemática se centran en lo que avala alguna autoridad académica aludida, y reconocida, en algunas investigaciones y artículos. Sin embargo, el profesor encuentra, en parte, la respuesta a esas restricciones con la adopción de un libro de texto, no por desgana, sino por una supuesta ley del mínimo esfuerzo docente. Reconocemos que un profesor debe tomar decisiones esenciales al enseñar; al menos sobre la forma en la cual presentará los contenidos al estudiante y sobre la forma de favorecer su aprendizaje.

La comunicación matemática no es intuitiva y precisa una extensión añadida al lenguaje natural que deben compartir profesor y estudiante, pero desde cada inicio educativo ocurre que no se comparte todo el lenguaje. Así pues, suponer que la interpretación de lo dicho en el marco de esa extensión es compartida con el estudiante es la fuente de la mayoría de los errores que comete el profesor al enseñar. Por tanto, cierto problema de optimización didáctica matemática consiste en minimizar el número de errores atribuibles al profesor.

Por su parte, el estudiante se encuentra con el lenguaje extendido que aporta el profesor, y debe decidir las restricciones que se auto impone: ¿Qué aprender? ¿Cómo aprender? y ¿Cuándo aprender? Tres preguntas que requieren una respuesta para encontrar una supuesta mejor forma de aprender. El estudiante no es un experto en ese nuevo lenguaje, por tanto, se ve obligado a optar por una postulante ley del mínimo esfuerzo discente en consideración la autoridad académica que representa el profesor. En cierta medida, debe atender al contexto en el cual el profesor sumerge un mensaje matemático para precisar su interpretación personal.

Con el empleo del lenguaje matemático se intenta comunicar ideas sin ambigüedad o sin la ambigüedad que ese mensaje tendría en el lenguaje natural. Este lenguaje contiene una ampliación de signos ajenos al lenguaje natural, por ejemplo; $\in, \int, \sum, \Rightarrow, R \neq \exists$, una ampliación de los signos del alfabeto, por ejemplo; signos del alfabeto griego, una ampliación de palabras, por ejemplo; lím (límite), sup (supremo), $n!$ (número factorial), cero, infinito, algoritmo, combinatorio (número), cardinal, y nuevos significados para palabras del lenguaje natural, como, por ejemplo; derivada, integral, combinación, lineal, irracional. En los mensajes matemáticos se emplea una sintaxis específica que incluso cambia la forma de verbalizar lo escrito sin atenerse al orden lexicográfico del lenguaje natural, por ejemplo; f' (se lee: derivada de f),

$g \circ f$ (se lee: f compuesto con g), $\binom{5}{3}$ (se lee: cinco sobre tres). A su vez la interpretación de lo escrito requiere una experiencia lectora de lo que se denomina “escrito en notación matemática”. Así pues, se entiende que al estudiante deba emplear un periodo prolongado de su vida para entender el lenguaje matemático y comprender lo escrito en él.

Si el profesor comete errores interpretativos o de notación, entonces el estudiante adoptará esos errores sin cuestionarse que él pueda cometer nuevos errores de interpretación. Otro problema de optimización didáctica matemática es minimizar el número de esos errores cometidos por el estudiante; errores generados al asumir los del profesor o generado por sus propias interpretaciones más o menos espontáneas.

En la literatura de Didáctica de las Matemáticas se puede encontrar numerosos trabajos que destacan los errores interpretativos de los estudiantes en su proceso de aprendizaje. Casi siempre se estudia la componente cognitiva del proceso otorgándole a la extensión del lenguaje de una sospechosa transparencia. Como ejemplo podemos citar el siguiente catalogo de errores cometido por los estudiantes.

Errores debido a dificultades de lenguaje...

Errores debido a dificultades para obtener información espacial...

Errores debido a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos...

Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento... ... cinco subtipos: Errores por perseveración... ...Errores de asociación... ...Errores de interferencia... ...Errores de asimilación... ...Errores de transferencia negativa a partir de tareas previas.

Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes. (Radatz, 1980)

En Rico (1999) se recogen otras categorías de errores cometido por estudiantes no universitarios: *De datos mal utilizados. De interpretación incorrecta del lenguaje. De inferencias no válidas lógicamente. De teoremas o de definiciones deformados. De falta de verificación en la solución. Errores técnicos.*

Encontrar trabajos que hagan referencia a los errores relativos al lenguaje específico cometido por el profesor en su proceso de enseñanza es difícil, Por ello, asumimos la clasificación atribuida a una investigación de Orton en Azcárate et al. (1996) para los errores de los profesores: *Errores estructurales* o errores relacionados con los conceptos implicados. *Errores arbitrarios*, o errores producidos por no tener en cuenta todos los datos de una actividad o un problema. *Errores ejecutivos* o errores debido a la manipulación de conceptos incorrecta, aunque son comprendidos.

En general, los errores del profesor relativos al lenguaje matemático empleado son transparentes en la investigación. Se suele suponer que ser profesor, o investigador, otorga la adecuada interpretación de lo escrito en Matemáticas. Pero esto no siempre es así, por ejemplo, al resolver una ecuación cuadrática. También ocurre que el investigador comete errores al interpretar las cuestiones matemáticas, aunque se detecten algunos errores al aprender y al enseñar matemáticas. Un nuevo chiste: Realmente. *¿Por qué no podemos estar juntos?* Le pregunta la raíz cuadrada al número -1. No sé que decirte, *es complejo*.

No podemos olvidar que la lengua natural es un constructo humano vivo que se modifica y regula con el uso atendiendo a algunas reglas gramaticales comúnmente establecidas. Sólo hay que entender, el largo periodo de aprendizaje de su lengua materna de aquel que vive en alguna nación o estado. Para entender y para adquirir la extensión acumulativa del lenguaje matemático se requiere tiempo y no se consigue en poco

tiempo por mucho que se quiera optimizar el tiempo. En la adquisición de esa lengua específica interviene el cambio personal de velocidad de cambiar de algunos significados desde los significados previos. Ese cambio en la comprensión matemática, como en cualquier lengua, depende de dos componentes esenciales: la componente sintáctica de cada expresión. Es decir, de cómo se expresa verbalmente (sintaxis), y la componente semántica o qué significa lo que se verbaliza. Así pues, si se comenten errores entonces existirán dos tipos de errores esenciales: Los errores sintácticos y los errores semánticos. Resulta que la mayoría de los errores presentes en la educación están compuesto de la mezcla de esos dos en un cierto porcentaje que en ocasiones se asumen sin prestar mucha atención. El porcentaje varía según el objeto matemático empleado, aunque existen otro tipo de errores como aquellos relativos a la visualización de objetos matemáticos. Un error persistente, por costumbre, tanto en profesores como en estudiantes es indicar que la unidad compleja es la raíz cuadrada del número -1 ; esa función raíz sólo está definida para valores no negativos.

Como ya hemos dicho, una parte importante de las dificultades que afloran en las primeras asignaturas de Matemáticas de algún grado científico-técnico, se debe a deficiencias lectoras y comprensivas del estudiante y, por lo tanto, de interpretación. Estas deficiencias disminuyen, e incluso anulan, la capacidad argumental empleada por el estudiante al resolver problemas. La escritura incorrecta de los razonamientos llega a ser un problema principal en el aprendizaje que señalamos más adelante. Ponemos un ejemplo, fuera del contexto matemático, que hace visible las dificultades que se producen cuando no se redacta bien: *La palabra “hipopótamo” tiene 10 letras, actualmente tiene 11. ¿Puede explicar esto?* Si esto ocurre con la lengua franca, que no podría aparecer en el lenguaje de las Matemáticas. Sin duda, una redacción correcta para evitar la ambigüedad como en el caso anterior puede ser así: *La palabra “hipopótamo” tiene 10 letras, “actualmente” tiene 11, o la palabra hipopótamo tiene 10 letras y la palabra actualmente tiene 11.*

Postulamos que existen errores puramente sintácticos que generan ideas distintas en el estudiante. Mostraremos situaciones paradigmáticas, del día a día, que hacen ver algunas lagunas del estudiante en relación a los registros semióticos de representación de objetos matemáticos. En realidad, es cómo si el estudiante no supiera con qué objetos matemáticos interactúa. Una falta de representaciones adecuadas imprime un nivel de desconocimiento que se tapa con algunos métodos que son memorizados más o menos. En cierta medida los objetos matemáticos se tratan como a un marciano en un chiste; no existen, nos pueden hacer reír.



Figura 4: Chiste con ideas relativas a objetos inexistentes.

En Matemáticas la cuestión de las deficiencias no es de risa, principalmente por la frecuente falta de imagen referencial de los objetos matemáticos, y en consecuencia la falta de visualización de éstos por los estudiantes en el sentido de Delgado (2009). ¿Nos podemos imaginar una fiesta de todas las funciones elementales pidiéndole a la función exponencial que se integre? Ella contestaría: ¡Para qué! Nada cambiara para mí.

Si bien es cierto que una exposición adecuada de una cuestión matemática requiere una oportuna combinación de conocimientos que deben ser ajustados para conseguir un fin; la exposición de la cuestión. Suele ocurrir que se cataloga de exposición demasiado rigurosa en algún contexto que no se suele aclarar. Sin embargo, la memorización de pasos y escrituras incorrectas suelen producir un adormecimiento de la razón matemática y sus significados. Recordamos que el pinto Francisco de Goya tiene un cuadro en el museo del Prado de Madrid de título: *El sueño de la razón produce monstruos*.

En Matemáticas pueden aparecer unos monstruos matemáticos de los cuales el estudiante no suele ser consciente de su existencia. Algunos de los monstruos tienen mucho que ver con los cardinales de los números naturales y reales aludidos simplemente como infinito; *infinito actual*. En general, se quiebra la intuición al intentar dar el paso de lo finito siguiendo una secuencia sin fin; *infinito potencial*.

Sólo se intenta dar un marco donde entender la existencia de errores y deficiencias que aparecen en cualquier teoría, pues manipulan objetos matemáticos. Más cuando el profesor no suele notificar esas deficiencias al corregir un ejercicio, sobre todo si éste hace interpretación libre de lo que cree que el estudiante quiere decir.

Optimización administrativa

Si bien la educación de los estudiantes es la misión principal de los profesores, no podemos ignorar que esa educación tiene muchas componentes que son revisables día a día por la sociedad donde se produce el fenómeno de enseñar y el fenómeno de aprender. En España, dos ministerios son los que se encargan de esa revisión: El Ministerio de Universidades para la educación universitaria y el Ministerio de Educación, Formación Profesional y Deportes para la enseñanza no universitaria. En última instancia, estos ministerios cuidan del aprovechamiento social de la acción educativa global desarrollando leyes y normas que permita asegurar el aprovechamiento de los recursos dedicados a Educación, si bien, las competencias educativas están transferidas a las distintas Comunidades Autónomas existentes en España. Tanto los ministerios como las consejerías de Educación de las diversas comunidades autónomas expresan sus deseos de que la educación cumpla con el mismo deseo: Optimizar didácticamente suele ser sinónimo de optimizar tanto, el tiempo, como la dedicación y el esfuerzo empleados en Educación.

Se diseñan leyes educativas y planes de estudio que entran en vigor como si nada, sin tener en cuenta que la Educación es un proceso dinámico con su propia inercia ya que intervienen una gran multitud de personas y estas no cambia de un día para otro. Se establecen los horarios educativos que deben regir las acciones didácticas tanto para el profesor como para el estudiante para favorecer el desarrollo social del estudiante. Se aportan los medios económicos que consideran adecuados para que la maquinaria educativa funcione o que cambie.

Visto desde un marco general, macroscópico, no se puede entender el motivo por el cual un sistema educativo puede tener algunos resultados deficientes. Sin embargo, no podemos olvidar que la enseñanza y el aprendizaje reales se producen en un entorno local y microscópico; el aula. El aula dónde la ley no llega salvo marcando una retahíla de cuestiones administrativas de obligado cumplimiento para profesor. Desde este punto de vista local, cabe destacar a los actores: el profesor y el estudiante, sin entrar en el número de profesores ni en el número de estudiantes. En este entorno, es el profesor el que recibe el encargo de optimizar el tiempo, la dedicación y los recursos. Si no se produce esa optimización múltiple, se le achaca cierta deficiencia en su profesionalidad, puesto no se puede achacar a los estudiantes que están en el aula para formarse. El mensaje global puede parecer perfecto, pero el proceso de optimización no es fácil de conseguir, por ello, emerge un grito del profesor que no cuenta en las estadísticas educativas: *No me digas sólo qué es lo que hay que hacer, dame un método claro para hacerlo.*

...es necesario considerar, ante todo, como los criterios más importantes de lo óptimo en el proceso de enseñanza... : la efectividad, la calidad de los problemas docente educativos así como la optimización del tiempo y el gasto de energía de los pedagogos y alumnos, en la solución de las tareas". (Babanski, 1982)

... la optimización del proceso de enseñanza-aprendizaje como la dirección que se organiza sobre la base del control integral de los principios enseñanza, formas y métodos, de sus condiciones internas y externas, con el objetivo de lograr su funcionamiento más efectivo, en los límites de lo óptimo, es decir que permita obtener los mejores resultados posibles con el tiempo, esfuerzos y mínimamente gastados por los alumnos y profesores. (Portela, 1999)

Leyes de la Dinámica Didáctica

Postulamos que en la Enseñanza de las Matemáticas rigen unas leyes que permite interpretar errores semánticos mediante la constatación de la existencia de errores sintácticos.

Postulado de Inercia: Una persona mantiene sus saberes, sus representaciones mentales y sus convicciones si no se enfrenta a una actividad; didáctica o no, que los ponga en duda.

No podemos pensar que un estudiante al que se le ha inculcado que π es 3.1416 durante toda la Enseñanza Primaria y la Secundaria, admita sin más el cambio de π como número irracional transcendente; $\pi \in R - Q$. Sin duda, en el paso a la universidad ese estudiante entenderá que π sea 3.14192653589793 que es lo que le muestra una calculadora al pulsar la tecla π . Ahora bien, ¿algún profesor le demuestra que se trata de un número no racional?

Wikipedia: *El número π es la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro en geometría euclidiana. Es un número irracional... El valor numérico de π , truncado a sus primeras cifras, es el siguiente: 3.14192653589793238462 ... El matemático griego Arquímedes (siglo III a. C.) fue capaz de determinar el valor de π entre el intervalo comprendido por $3 \frac{10}{71}$, como valor mínimo, y $3 \frac{1}{7}$, como valor máximo... Alrededor del año 20 d. C., el arquitecto e ingeniero romano Vitruvio calcula π como el valor fraccionario $\frac{25}{8}$ midiendo la distancia recorrida en una revolución por una rueda de diámetro conocido. En el siglo II, Claudio Ptolomeo proporciona un valor aproximado $\frac{377}{120}$ por aproximaciones...*

Ponemos un **primer ejemplo** de inercia (matemático-social), en relación a la confusión entre Cantidad, Ordinal y Fracción. Es muy frecuente entre comunicadores televisivos y políticos, también, aparece con algunos profesores incluso universitarios. La expresión escrita “XXXI Jornada A” se puede leer como

“Treinta y una Jornada A”, sin embargo, lo leen como “Treintaunava Jornada A”. Es decir, se confunde la cantidad, cardinal finito o número cardinal finito, con la fracción $1/31$. También, se puede escribir “31ª Jornada A” que se lee como “Trigésimo primera Jornada A”. Es decir, se lee como Ordinal: número ordinal. Es posible escribirlo como “Trigésimoprimera Jornada A” pero lo escriben mal con la expresión “31 Jornada A” para leerlo como se lee como “XXXI Jornada A”.

¿Qué hacer para evitar esto con los números ordinales? La respuesta es clara: Concientizar al estudiante de lo difundido que está este error entre la población. Para ello, se propone una actividad: El estudiante solicitará a 10 personas de la calle que lean las expresiones “31ª Jornada A” y “XXXI Jornada A”. Anotará si la lectura es correcta o no, y preguntará si las dos expresiones son lo mismo o no. La actividad continúa con el profesor recopilando los datos y dirigiendo una puesta en común. Al afrontar esta actividad el estudiante sabe que la lengua es un elemento vivo que se ajusta con el uso, pero este hecho no impide que se cuide con reglas.

Ponemos un *segundo ejemplo* de inercia (matemático-educativa), en relación a la unidad imaginaria de los números complejos. Se suele usar una definición incorrecta de la unidad imaginaria y aplicarle una operatoria fuera de contexto y un abuso de la función real raíz cuadrada. Es un error muy difundido y suele aparecer en explicaciones del profesor y en los libros. El error sintáctico consiste en escribir la expresión “ $i = \sqrt{-1}$ “. Es claro que la función raíz cuadrada está definida para números reales positivos. Así pues, la expresión carece de sentido tanto en el mundo real como en el mundo complejo, pues la raíz cuadrada no es una función es una relación entre complejos, dado que existen dos raíces cuadradas para todo número complejo distinto de cero. Además, en este error encuentra una justificación en una supuesta simplicidad operatoria como en el siguiente problema: Supuesto que $z \in \mathbb{C}$ resolver la ecuación $z^2 + 4 = 0$. Algunas veces se escribe $z^2 = -4$ y desde aquí se hace todo mal:

$$z = \pm\sqrt{-4} \rightarrow z = \pm 2\sqrt{-1} \rightarrow z = \pm 2i$$

La unidad imaginaria $i \in \mathbb{C}$ no se define como tal, puesto lo que se define es su cuadrado $i^2 = -1$. De esta forma los números complejos son un cuerpo algebraico extensión de los números reales, $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$, pero no es un cuerpo ordenado extensión de \mathbb{R} ; no hay orden compatible con las operaciones en \mathbb{C} . Los pasos adecuados para la ecuación anterior son:

$$z^2 = -4 \Leftrightarrow z^2 = 4i^2 \Leftrightarrow z^2 = (2i)^2 \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = -2i \\ z_2 = 2i \end{matrix}$$

Es evidente que si se quiere erradicar este tipo de error el profesor debe seguir una estrategia expositiva acorde a lo escrito en la última cadena de igualdades, desechando las penúltimas igualdades. De esta forma el estudiante entenderá que ciertas expresiones no son correctas.

Ponemos un *tercer ejemplo* de inercia (memorística-educativa), relativo a el abuso de reglas nemotécnicas que son asumidas por el estudiante como igualdades matemáticas. En este caso no referimos a la resolución de la ecuación de segundo grado:

$$Az^2 + Bz + C = 0 \Rightarrow z = \frac{-B \pm \xi}{2A} z \in C$$

donde que ξ es una de las raíces del discriminante $B^2 - 4AC$ en esta regla nemotécnica para la resolución de una ecuación cuadrática en C . En el caso real sólo se consideran discriminantes no negativos, $B^2 - 4AC \geq 0$, puesto que el caso de discriminante negativo se cae en el campo complejo. En el caso real sólo hay una única raíz del discriminante; $\sqrt{B^2 - 4AC}$ y la regla nemotécnica se expresa como:

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \Rightarrow x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} x \in R$$

En ambas reglas aparece un símbolo doble, \pm , que es un simple recordatorio de la forma de las soluciones. Usar ese símbolo es por comodidad sintáctica y una práctica editorial usual que oculta dos igualdades matemáticas. Una regla nemotécnica puede no ser una expresión matemática bien formada, por ello, el profesor debe estar muy atento de que no se genere el error de interpretación del estudiante. Por ejemplo, al resolver la ecuación $x^2 - 4 = 0$, se suele dar los pasos siguientes: $x^2 = 4$ y $x = \pm 2$. En general, esto es dado por correcto por parte del profesor, hasta que se encuentra con estudiantes que dice que la raíz cuadrada de 4 es 2 y -2. En ese momento la función raíz cuadrada deja de estar bien definida para esos estudiantes, ya que $\sqrt{4} = 2$. Luego, conviene escribir por separado, $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$ las dos soluciones de $x^2 - 4 = 0$. También se puede aplicar un razonamiento similar al ya se ha dado con los pasos:

$$x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 2^2 \rightarrow \begin{matrix} x = -2 \\ x = 2 \end{matrix}$$

Postulado de la Dinámica Didáctica: El esfuerzo en el cambio de conocimiento es directamente proporcional a la variación de la velocidad de aprendizaje de una persona. Es decir, de lo acelerado de su aprendizaje eficaz. En general, la velocidad de aprendizaje se contrasta con la capacidad de relacionar unos objetos matemáticos con otros objetos, mientras que la constante de proporcionalidad se corresponde con la cantidad de conocimiento acumulado y relacionado. Esa constante de proporcionalidad puede variar después de un prolongado periodo de tiempo formativo. Podemos imaginar el esfuerzo que debe hacer un estudiante que emplea el triángulo rectángulo la figura 5 y debe pasar de la formulación del teorema de Pitágoras a relacionar este con las razones trigonométricas para asegurar lo certero de la expresión “ $b = c \cdot \cos A$ ”.

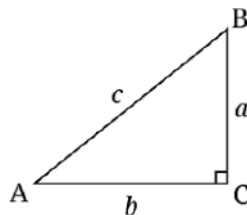


Figura 5. Triángulo rectángulo con ángulos y lados.

Ponemos un *primer ejemplo* de dinámica (método-educativa), en relación a esfuerzo comprensivo de resolución de un sistema de ecuaciones lineales compatible indeterminado, por no mantener una misma lógica sintáctica en la resolución. Al fin y al cabo, los sistemas que se saben resolver son los Sistemas Compatibles Determinado, por ello empleamos la misma estrategia resolutoria en los Sistemas Compatibles Indeterminados. Los sistemas de ecuaciones lineales que son resolubles son los sistemas de Cramer (SCD) mediante regla de Cramer o el método de Gauss o alguno similar.

En la Figura 6 se pueda apreciar una forma muy tradicional de la resolución de un sistema compatible indeterminado. El abuso de esta nomenclatura no deja ver los tres números que deben tomar las incógnitas para formar una solución. La última expresión es interpretable, pero no tanto para los estudiantes como para el profesor, pues las letras y y z hacen de incógnitas y de número, y esto hace duplicar los significados.

$$\{x + y - z = 3\} \equiv \{x = -y + z + 3\} \equiv \begin{cases} x = -y + z + 3 \\ y = y \\ z = z \end{cases}$$

Figura 6. Ejemplo de resolución tradicional de un sistema compatible indeterminado.

El profesor debe explicar que resolver el sistema es equivalente a resolver toda una familia paramétrica de sistemas compatibles determinados como los que se muestra en la Figura 7, obteniéndose todas, y expresándolas mediante un conjunto de soluciones en función de dos parámetros.

$$\{x + y - z = 3\} = \left\{ \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 3 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\} \right.$$

$$\left. \begin{cases} x = 3 - \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right.$$

Figura 7. Ejemplo de resolución de un sistema compatible indeterminado.

Ponemos un *segundo ejemplo* de dinámica (educativa), en relación a la ausencia de reducción al absurdo y un abuso del significado de lo que es que dos sistemas sean equivalentes. Unos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes si tienen las mismas soluciones. Nos referimos a expresiones como la de la Figura 8 en relación a un sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 7 \end{array} \right)_{S_1} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array} \right)_{S_2} \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)_{S_3}$$

Figura 8. Inadecuada utilización de la equivalencia de dos sistemas.

Es normal que tanto profesores como estudiantes escriban expresiones similares a la hora de estudiar un sistema de ecuaciones lineales. Lo que ocurre es que, aunque el profesor lo diga, al estudiante se le escapa el proceso de reducción al absurdo que debe hacerse. El profesor da por bueno esta forma de escribir, pues interpreta que el estudiante sabe lo que hace, pero realmente no es así. El estudiante casi nunca razona de la siguiente forma: Si S_1 fuera compatible entonces los sistemas S_2 y S_3 serían compatibles. Pero S_3 es un sistema incompatible, luego S_1 no puede ser compatible; es incompatible.

Ponemos un *tercer ejemplo* de dinámica (educativa), en relación a un proceso de ritmo y sintaxis inadecuado en relación al teorema de Rouché-Frobenius en el que suelen caer los estudiantes y que los profesores no suelen corregir la forma de escribir, pues interpretan que el estudiante sabe lo que hace. En el caso de intentar estudiar el sistema de la Figura 9 muchos estudiantes redactan lo que aparece en la figura 10 como primeros pasos para determinar el rango de la matriz de coeficiente. Al ser una matriz cuadrada determinan el determinante que es a^2 . Sin embargo, indican con un signo = que es cero.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1+a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1+a & 0 \end{array} \right)$$

Figura 9. Representación de un sistema de ecuaciones lineales.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{vmatrix} = \dots a^2 = 0 \rightarrow a = 0$$

Figura 10. Error sintáctico en el cálculo del rango de la matriz de coeficientes.

Este error se mantiene incluso cuando intentan determinar el rango de la matriz ampliada escribiendo una expresión de determinante de una matriz no cuadrada, $|A| = \dots$, lo cual carece de sentido. En cierta medida esos estudiantes emplean el signo = como si se tratara del signo ;.

El profesor debe realizar una marcada defensa de separar los pasos que deben dar los estudiantes e indicar lo incorrecto de esa sintaxis. Debe hacer entender que la sintaxis correcta es una barrera para evitar una interpretación semántica errónea. Esta no es una simple cuestión de formalismo.

A la pregunta: ¿Qué hacer para evitar estos errores con los sistemas de ecuaciones lineales? La respuesta es conseguir concienciar al estudiante lo difundido que está este error entre sus compañeros. Se propone una tarea para el estudiante que consistente en señalar esos errores en cinco exámenes anónimos de compañeros de aula que previamente han sido revisados por el profesor con el objetivo que los descubran en otros y no sólo en él. Los datos que aportará al profesor para que este haga una puesta en común corresponderán a lo anotado sobre el tipo de error y frecuencia.

Postulado de la acción y la reacción: A cada cambio nuevo de conocimiento se le opone una reacción del conocimiento atesorado con anterioridad. Podemos pensar en ese estudiante que ha trabajado en Geometría del espacio con vectores libres y con sus coordenadas relativas a un sistema de referencia ortonormal. En

el momento que se le introduce en el espacio vectorial de las ternas ordenadas de números reales, $(a, b, c) \in R^3$, intentará asociar las ternas ordenadas a vectores libres del espacio, incluso puede llegar a pensar que los elementos de R^4 no tiene sentido geométrico alguno. Sin duda, los conocimientos anteriores son los que impiden la ampliación de conocimiento matemático, y estos deben ser contrarrestados con actividades en las que no responden.

Ponemos un **primer ejemplo** de acción-reacción (operatoria-educativa), en relación al uso indebido de la simplificación de fracciones cuando se trata con funciones. Este error se produce debido a que el estudiante interioriza que disponer de una función real basta con disponer de una fórmula relacionada a una o más variables. No reconoce que esa posible expresión está sujeta a un dominio, ya que entiende para él, el dominio lo interpreta como un tipo de problema que debe resolver. En muchos casos el profesor interpone la fórmula sin explicitar el dominio y éste queda definido, implícitamente, como el mayor conjunto donde esa fórmula tiene sentido.

Al estudiar la función de fórmula $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$, el estudiante sustituye esta expresión por $f(x) = \frac{1}{x-1}$ debido a que al trabajar con la fracción polinómica $\frac{x+1}{x^2-1}$ tiene a la fracción $\frac{1}{x-1}$ como producto de la simplificación; $\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x-1}$. Ese estudiante no interpreta el dominio de una función como esencia de esa función. Así pues para él, es transparente que el dominio $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ es $R - \{-1, 1\}$ mientras que el dominio de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es $R - \{1\}$, y por tanto, el registro gráfico de ambas funciones es prácticamente igual salvo para $x = -1$. Además, este tipo de error queda reforzado al no interpretar adecuadamente el estudio del límite de ambas funciones en el punto -1;

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x-1} = \frac{-1}{2}$$

ya que no entiende que el valor del dicho límite compete al estudio de las funciones en un entorno perforado de -1.

Ponemos un **segundo ejemplo** de acción-reacción (educativa), esta relacionado con la utilización del registro tabular de una función. En general, el estudiante interpreta que disponer de una tabla de valores de una función es muy significativo, puesto que desde su inicio con funciones se familiarizó con construir la gráfica uniendo los puntos del plano relativos a la tabla. Este error se refuerza al emplear aplicaciones de ordenador que incorpora capacidades gráficas y muestran una ventana con una vista parcial de la gráfica de una función. Ahora bien, lo que grafica el ordenador no se distingue por debajo de 0.01cm o de un pixel. Es decir, una persona no tiene suficiente agudeza visual para detectar el conjunto de pixel y observa cierta continuidad en pantalla. Unas tablas de valores como los de la Figura 11 de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y otras, como la de la Figura 12 de la función $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{5000-x}$ no tienen casi ninguna diferencia, tanto si se consideran tres dígitos decimales como si se consideran más. En cualquier caso, el ordenador presenta el mismo conjunto de pixel para las dos funciones. Es claro que con esas tablas podría idearse la primera

función, pero nunca la segunda, puesto que esas tablas no se focalizan en aquellos puntos donde las dos deben ser muy diferentes.

0,5	2,000	0,5	2	0,5	2,00020002
1	1,000	1	1	1	1,00020004
1,5	0,667	1,5	0,66666667	1,5	0,66686673
2	0,500	2	0,5	2	0,50020008
2,5	0,400	2,5	0,4	2,5	0,4002001
3	0,333	3	0,33333333	3	0,33353345
3,5	0,286	3,5	0,28571429	3,5	0,28591443
4	0,250	4	0,25	4	0,25020016
4,5	0,222	4,5	0,22222222	4,5	0,22242224
5	0,200	5	0,2	5	0,2002002
5,5	0,182	5,5	0,18181818	5,5	0,1820184
6	0,167	6	0,16666667	6	0,16686691
6,5	0,154	6,5	0,15384615	6,5	0,15404641
7	0,143	7	0,14285714	7	0,14305742
7,5	0,133	7,5	0,13333333	7,5	0,13353363
8	0,125	8	0,125	8	0,12520032
8,5	0,118	8,5	0,11764706	8,5	0,1178474
9	0,111	9	0,11111111	9	0,11131147
9,5	0,105	9,5	0,10526316	9,5	0,10546354
10	0,100	10	0,1	10	0,1002004
10,5	0,095	10,5	0,0952381	10,5	0,09543852
11	0,091	11	0,09090909	11	0,09110953
11,5	0,087	11,5	0,08695652	11,5	0,08715698
12	0,083	12	0,08333333	12	0,08353381
12,5	0,080	12,5	0,08	12,5	0,0802005
13	0,077	13	0,07692308	13	0,0771236
13,5	0,074	13,5	0,07407407	13,5	0,07427462
14	0,071	14	0,07142857	14	0,07162913
14,5	0,069	14,5	0,06896552	14,5	0,0691661
15	0,067	15	0,06666667	15	0,06686727
15,5	0,065	15,5	0,06451613	15,5	0,06471675

Figura 11. Tablas de $f(x) = \frac{1}{x}$ Figura 12. Tablas de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{5000-x}$

Ponemos un *tercer ejemplo* de acción-reacción (educativa) en relación al cálculo de límites similares a los mostrados en el segundo ejemplo. En general, se valora sólo que obtengan el resultado, sin atender a lo que se escribe, y esto hace habitual que en el estudio del límite de la función $f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$ un estudiante escriba la siguiente expresión:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

Ahora bien, resulta que ninguno de los tres límites escritos existe;

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}; \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}; \nexists \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1}$$

En este caso, la reacción es tratar algebraicamente la determinación del límite como se aprendió inicialmente, pero sin tener en cuenta las propiedades algebraicas de estos. Una simple alusión al absurdo resuelve la dificultad. Si existiese el primer límite, entonces al aplicar el uso de las propiedades algebraicas indicaría que la cadena de igualdades es correcta. Ahora bien, el último límite no existe puesto que el límite por la izquierda es $-\infty$ y el de por la derecha es ∞ , así pues, los otros dos no existen.



Figura 13. Chiste sobre la acción-reacción.

¿Que hacer para evitar estas reacciones a un nuevo conocimiento? En este aspecto nos queda concientizar al estudiante acerca de lo diferente que es el nuevo conocimiento y que no puede esperar que el conocimiento nuevo se corresponda con una generalización de algún conocimiento previo. Al estudiante se le puede proponer la tarea de señalar esos nuevos conocimientos en texto anónimos revisados por el profesor. El estudiante debe anotar el tipo de conocimiento nuevo y el posible conocimiento previo que deja de ser operativo. Al profesor le queda la tarea de recopilar los datos de los estudiantes y proponer una puesta en común.

Conclusiones con comentarios

Detectar este tipo de errores de índole sintáctica frecuentes en el proceso educativo de las Matemáticas como supuesta evidencia de las respuestas a un cuestionario es simplemente una formalidad que en mi caso es innecesario por la captación de datos a lo largo de mi profesión docente. Ahora bien, cualquier investigador puede refutar la existencia de tales errores gestionando un formulario para estudiantes y estudiar sus causas.

Algunos errores sintácticos son cometidos por profesores en su afán de minimizar el texto escrito en pizarra o en transparencia. Sin embargo, el estudiante asume dicha expresión como verdad pues proviene de la autoridad académica próxima. Algunos errores se deben a unos usos incorrectos bien conocidos. Por ejemplo, se dice que $\ln x = -\infty$ que es erróneo puesto que la función logaritmo no está definida en 0. Lo que se quiere decir:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$$

También, se dice $\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} = \infty$ que es erróneo puesto que la función no está definida $\frac{\pi}{2}$. Lo que se quiere decir:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \ln x = \infty \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \ln x = -\infty$$

Ahora bien, el estudiante no asume el significado real y almacena como verdad esos “valores” de las funciones anteriores, es decir, se ha producido dos errores semánticos que son difíciles de erradicar. Esos errores semánticos casi siempre aparecen asociados a unos errores sintácticos y estos a su vez son regidos

por las tres leyes indicadas en este trabajo, una de inercia, otra de dinámica y otra de acción y reacción en relación al esfuerzo que debe hacer una persona para adquirir un cierto conocimiento matemático.

Bibliografía

Babanski, Y. K. (1982). *Optimización del proceso de enseñanza*. La Habana: Pueblo y Educación.

Delgado Pineda, M. (2009). *Objetos matemáticos dentro del marco de una Matemática visual*. Memorias del Simposio de Educación Matemática SEM, Edumat, 2009 (Chivilcoy) Argentina

Delgado Pineda, M. (2016). *Registros para una función real cualquiera de variable real*. El Cálculo y su Enseñanza, 6, pp. 1-28. México.

Duval, R. (1999): *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis issues for learning*. Educational Resources Information Center (ERIC).

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015). *Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. En, G. D'Amore y M. I. Fandiño Pinilla (Comp.), Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica (pp. 249-269). Universidad de la Sabana (Bogotá, Colombia).

Hiebert, J. S., & Grouws, D. A. (2007). *The effects of classroom mathematics teaching on students' learning*. En J. F. K. Lester (Ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 371-404). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Hitt, F. (2003). *Le caractère fonctionnel des représentations*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8, 255-271.

Hitt F. (2006). *Students' functional representations and conceptions in the construction of mathematical concepts. An example: The concept of limit*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11, 253- 268.

Hitt, F. (2013). *Théorie de l'activité, interactionnisme et socioconstructivisme. Quel cadre théorique autour des représentations dans la construction des connaissances mathématiques?* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 18, 9-27.

Hitt, F. y Quiroz, S. (2019). *Formation et evolution des représentations fonctionnelles-spontanees a travers un apprentissage socioculturel*. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 24, 75-106.

Portela R. (1999) *Tendencias de la didáctica y optimización del proceso enseñanza aprendizaje*. Congreso Internacional Pedagogía, 1999

RAE. Diccionario de la Real Academia Española y de la Asociación de Academias de la Lengua Española. <https://dle.rae.es/>

Radatz, H. (1980). Student's Errors in the Mathematis Learning Process: A Survey. For the Learning of Mathematics. Vol 1 (1)

Rico, L. (1999). *Los Organizadores del Currículo de Matemáticas*. En Rico, L. y otros. La educación matemática en la Enseñanza Secundaria. Erre Eme S.A. Buenos Aires.

(Des)haciendo matemática.

Aportes para el estudiar del conocimiento matemático para enseñar

Gabriel R. SOTO

Departamento de Química, Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud

Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco

gsoto@unpata.edu.ar

Resumen

La docencia se caracteriza por la constante toma de decisiones respecto a qué y cómo enseñar en contextos sociales dinámicos. El conocimiento matemático para enseñar es un conjunto de saberes profesionales que puede caracterizarse a partir de las discontinuidades que existen entre la matemática académica (MA) y la matemática escolar (ME). En esta conferencia presentaremos resultados del trabajo que venimos llevando adelante en la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, basados en la identificación de conexiones entre la MA y la ME mediante procesos de elementalización, y del análisis del CME con el modelo MTSK, puesto en acción por docentes en comunidades de práctica profesional.

Palabras clave: Conocimiento matemático para enseñar. Elementalización. Modelo MTSK.
Comunidades de práctica profesional.

¿Cuánta matemática tiene que saber quién enseña matemática?

Esta pregunta es una de las más discutidas en el ámbito de la formación inicial de profesores de matemática para el nivel secundario. El sentido de cantidad de esta pregunta no sólo es la base de la permanente inquietud de docentes en ejercicio para enfrentar los desafíos que la enseñanza de la matemática nos propone hoy, sino que es el reflejo del alto porcentaje de horas destinadas a la formación disciplinar. Esta situación es justificada por la necesidad de no sólo conocer definiciones y conceptos sino que además es preciso comprender los principios organizativos y estructurales del campo matemático como así también qué ideas o conceptos son centrales en la disciplina y cuáles son secundarios (Klein, 2016). Sin embargo, aprender más matemática no siempre se traduce en buenas prácticas docentes (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Aprender matemática para enseñar usualmente refiere a la construcción de saberes específicos para dicha tarea, que denominamos *conocimiento matemático para enseñar* (CME), que se basa en la doble discontinuidad entre la matemática que se enseña en la educación obligatoria y la matemática para la formación docente (Klein, 2016, pág. 2). La primera ocurre durante la transición entre la escolarización obligatoria y la formación inicial docente, y está asociada a la relación entre la *matemática escolar* (ME) y la *matemática académica* (MA) (Schoenfeld, 2020). La MA se define como un conjunto de saberes asociados a la construcción del campo científico producido por matemáticos y reconocido como tal. La ME no sólo se define como un campo de saberes disciplinares coherente basado en los conceptos, las conexiones entre ellos y sus posibles generalizaciones sino que también es un producto de la historia de las instituciones escolares en donde se la enseña, atravesada por las características políticas, económicas y socioculturales que sostienen a dichas instituciones (David et al., 2013). Esto provoca la segunda discontinuidad, que tiene lugar durante la transición de la formación inicial docente y a posterior inserción en el ámbito profesional, pues el conocimiento matemático alrededor de la ME construido por docentes en formación y en ejercicio difiere significativamente de la MA (Soto et al., 2017).

En consecuencia, estas discontinuidades se pueden pensar como transiciones críticas que involucran cambios en los puntos de vista respecto a las ideas y concepciones de la matemática de quienes las enfrenten, como así también del contexto y los grupos en donde se desarrolla la matemática para enseñar (Gueudet et al., 2016). Para avanzar en el análisis de los efectos de estas transiciones en la construcción del CME, vamos a presentar algunos resultados de investigaciones que venimos desarrollando en la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, con el

objetivo de identificar oportunidades para suavizar estas discontinuidades, y así aportar al campo de la formación profesional de docentes para la enseñanza de la matemática obligatoria.

¡Elemental no es sinónimo de fácil!

A principios del siglo XX, Felix Klein identificó discontinuidades en la construcción del CME para la formación docente en Alemania (Klein, 2016). Esta idea ha influido en las discusiones sobre la formación de profesores de matemática en todo el mundo, en particular en la creación de la Comisión Internacional para la Instrucción Matemática (ICMI) en 1908. Para F. Klein, la matemática es una actividad que evoluciona a través de un proceso de *elementarización*, definido como la exposición conceptual de la esencia epistemológica de una idea matemática que se vuelve base para la construcción de nuevas ideas y conceptos matemáticos. Este proceso continuo de elementarización de la matemática sirve para visibilizar conexiones entre la ME y la MA (Soto et al., 2019b), mediante la identificación de *ideas fundamentales* tales como algoritmos, aproximaciones, y de *ideas básicas* como los sentidos de la división (Scheiner y Bosch, 2023).

Para ello es fundamental que quienes tienen a su cargo la formación de docentes de matemática no sólo tengan en cuenta el valor formativo de esta disciplina, sino también los temas de los que es necesario discutir en cada ciclo de la enseñanza y de la carrera profesional. Los maestros y profesores en su tarea profesional no tienen que crear matemática pero tienen que adoptar el hábito mental de los matemáticos: hacer buenas preguntas, encontrar soluciones y analizar problemas desde diferentes perspectivas (Carrillo et al., 2018). En tal sentido, compartimos las palabras de Luis Santaló (1990):

El problema radica en la selección de la matemática para la educación de quienes no tienen interés particular en ella y sólo la aceptan como una necesidad que les ayuda a desempeñar mejor sus ocupaciones y entender mejor el sostén básico de las mismas (pág. 3).

A continuación, presentamos algunas actividades de formación desarrolladas por nuestro grupo de investigación.

Una idea básica que surge de la elementarización es el sentido de reparto equitativo de la división entre números enteros. Esto es, si a y b son números enteros, la cuenta

$a:b$ representa el problema ¿cuántas veces entra b en a ?

que permite generalizar la división al campo de los números fraccionarios. Y así obtener una explicación a la pregunta “¿Por qué para dividir fracciones se multiplica cruzado?” (Soto, 2015).

El algoritmo de Euclides es una idea fundamental desde el punto de vista de la elementarización para la ME, pues permite mostrar que la *regla de los signos* vale para el producto de números enteros, pero no para la división de números enteros. Esto se verifica mediante los siguientes ejemplos (Soto et al., 2020)

25:6 (25):6 25:(-6) (-25):(-6)

Otra idea fundamental es la simetría que nos sirve para establecer conexiones entre objetos de la geometría euclidiana¹. La mediatriz de un segmento AB , además de determinar a todos los triángulos que la tienen como eje de simetría, se puede definir como el conjunto de puntos que equidistan de los puntos distintos, A y B simultáneamente. Si lo escribimos en términos de problema, se lee

Dados los puntos A y B , determinar el conjunto de puntos C , tales que $d(A,C)=d(B,C)$. O equivalentemente, determinar el conjunto de puntos C , tales que la razón entre $d(A,C)$ y $d(B,C)$ sea 1.

¹ Para un desarrollo exhaustivo de esta idea, ver Soto (2013).

Ahora bien, dado que modificar hipótesis es una práctica matemática (Carrillo et al., 2018) que permite definir nuevos problemas que a la vez dan lugar al desarrollo de nuevos resultados, como es el caso del Teorema de Euler: *caras más vértices es igual a aristas más dos* (Lakatos, 1976), uno puede pensar en el siguiente problema asociado

Determinar el conjunto de puntos C , tales que la razón entre $d(A,C)$ y $d(B,C)$ sea distinta de 1.

La solución de este problema es una circunferencia. Si volvemos a modificar las condiciones del problema como

Determinar el conjuntos de puntos C , que satisfacen $d(l,C)/d(B,C)=e$, donde l es una recta que no contiene a B , y e es un número real positivo².

Es posible verificar que las soluciones de este problema determinan una parábola, una hipérbola o una elipse, dependiendo si, e es igual a 1, es menor que 1 o mayor a 1, respectivamente.

¡La práctica hace al maestro!

Existe un proceso de transformación de la MA en formas adecuadas para enseñar: el conocimiento didáctico del contenido (Shulman, 1986). Esta adecuación de la MA, situada en la transición de la formación inicial a la práctica profesional, es el resultado de la mixtura entre la matemática y la didáctica que emerge como resultado de la experiencia profesional docente. Este proceso transformador de la MA sucede usualmente de modo independiente a las decisiones normativas curriculares, y que muchas veces es propia de cada comunidad escolar. El modelo MTSK, basado en las ideas de Shulman, y desarrollado por Carrillo y otros (Carrillo et al., 2018), es un constructo teórico que caracteriza el conocimiento que pone en juego quien enseña matemática, que incluye la tarea de enseñar, como así también actividades profesionales fuera del aula. Este modelo define dos dominios principales del conocimiento puesto en acción por docentes de matemática: el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido, cada uno de los cuales se subdivide en tres categorías (ver Figura 1, panel izquierdo). El conocimiento matemático abarca el conocimiento docente de los tópicos/temas de matemática (KoT, por sus siglas en inglés), cómo se entienden y enseñan; el conocimiento de las estructuras (KSM, por sus siglas en inglés), se refiere a las relaciones que se establecen entre los tópicos que se enseñan; y el conocimiento de las prácticas matemáticas (KPM, por sus siglas en inglés), se relaciona con el tipo de trabajo matemático que realizan quienes enseñan matemática. Asimismo, en lo que refiere al conocimiento didáctico del contenido, el modelo MTSK considera tres subdominios: el conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática (KFLM, por sus siglas en inglés), referido al conocimiento sobre cómo se piensan y construyen conceptos e ideas matemáticas; el conocimiento de la enseñanza de la matemática (KTM, por sus siglas en inglés), se relaciona con el conocimiento individual o institucional de los paradigmas (teorías) de enseñanza de la matemática; y el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS, por sus siglas en inglés), que se refiere al conocimiento del currículum, los objetivos de aprendizaje y la promoción en los diferentes niveles educativos. Además, dado que las creencias sobre la matemática y su enseñanza influyen constantemente en la práctica docente, el modelo MTSK también incluye una dimensión de creencias que atraviesa todos los subdominios (Figura 1, panel izquierdo).

2 Una discusión interesante es ¿por qué e tiene que ser positivo?

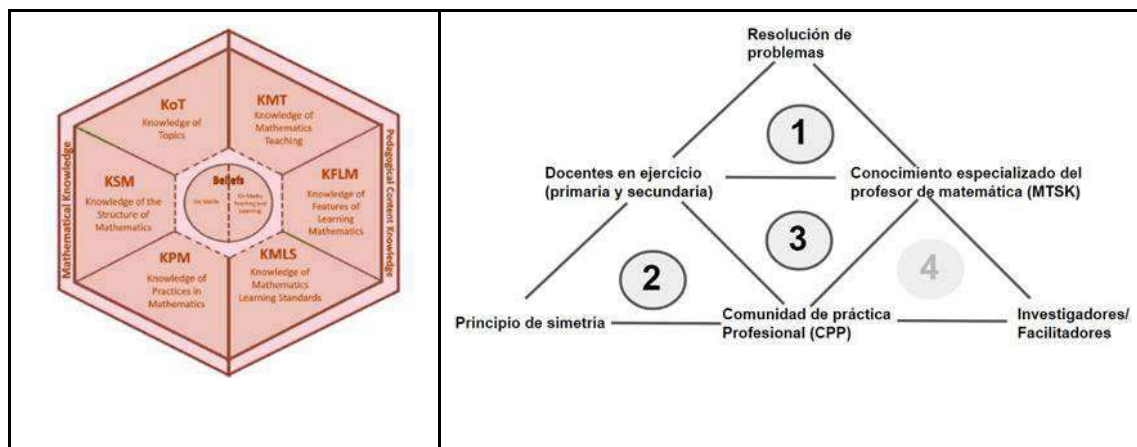


Figura 1. Panel izquierdo. Modelo MTSK, obtenido de Carrillo et al. (2018). Panel derecho. Conceptualización de las actividades a desarrollar en el dispositivo de desarrollo profesional (Soto et al., 2023).

Un ejemplo de esta transformación de la MA para enseñar, y que hemos analizado con el modelo MTSK, es la búsqueda de soluciones al siguiente problema, propuesto en el contexto de un taller de formación docente:

Encontrar un número que dividido por 2 tenga resto 1, que dividido por 3 tenga resto 2, que dividido por 4 tenga resto 3, que dividido por 5 tenga resto cuatro y que dividido por 6 tenga resto 5.

Durante la resolución del problema, se suscitó el siguiente diálogo entre una docente de primaria (DC) y uno de los facilitadores (DR) respecto al significado de los criterios de divisibilidad y sus posibles usos.

DR: ¿Por qué usaron criterios de divisibilidad? DC: Porque lo usamos para hacer la división exacta. DR: Pero con 59, ¿no hay división exacta! ¿Por qué se pueden usar los criterios de divisibilidad?

Esta docente, a partir de la búsqueda de números que satisficiera las condiciones del problema (dimensión KPM), encontraron en los criterios de divisibilidad una herramienta que tornó esta búsqueda más eficiente. Más aún, la discusión respecto a la unicidad de la solución movilizó saberes asociados a la dimensión KSM (Soto et al., 2023).

Otro problema que siempre proponemos en nuestros talleres de desarrollo profesional es el siguiente problema:

¿Qué oferta conviene más, 4 por 3 o 3 por 2?

A modo de ejemplo, parafraseamos el relato en primera persona de una docente que lo implementó en uno de sus grupos de alumnos que transcurrían su octavo año de escolaridad básica:

Cuando les propuse este problema a mis alumnos, me sorprendí que, a pesar de haber enseñado “Regla de Tres”, durante un largo rato no sabían para dónde disparar [y no la usaban!].… les propuse pensar en un artículo para comprar, por ejemplo una botella de gaseosa... ¡Y seguían sin saber qué hacer!... entonces, pensé ponerle precio a la gaseosa [\$100]. Después de un rato sin poder avanzar les pregunté qué pasaría si tienen que comprar gaseosas para una fiesta. Y ahí arrancaron... ¡Y lo resolvieron sin usar Regla de Tres!

En este caso, la docente, a pesar de saber que la proporcionalidad directa sirve para resolver el problema, guió a sus estudiantes en función de las habilidades e intereses que sus estudiantes ponían en juego.

¿No sé! ¿A vos qué te parece? ¿Por qué?

Las discontinuidades en la construcción del CME también pueden ser explicadas a través de las características de las instituciones en donde se desarrollan la MA y la ME: la primera vive en las instituciones educativas de nivel superior, mientras que la segunda lo hace en cada institución escolar. Esto implica que siempre existirán tensiones cuando los saberes construidos en una institución dada, se trasladan a otra. Esta confrontación de saberes con raíces institucionales distintas permite identificar oportunidades para caracterizarlos, en función de las diferencias y tensiones que emergen cuando se ponen en juego simultáneamente, y que sirven como recurso para el desarrollo profesional docente (Brodie, 2020). Esta caracterización debe ocurrir en espacios diferenciados del aula, pues en el momento que se enseña se trabaja para otro y no hay tiempo ni espacio para la reflexión. Es así que las comunidades de práctica surgen como ambientes naturales para indagar sobre la construcción del CME, pues tienen a la práctica docente como fuente de coherencia y cohesión, y se sostienen en el tiempo a través del compromiso mutuo de los participantes, la negociación de objetivos comunes y el desarrollo de recursos compartidos para dar significado a los aprendizajes que ocurren en dicha comunidad (Goos, 2020). En estos espacios los saberes emergentes siempre se construyen y se modifican en la acción, suponiendo entonces un estado permanente de aprendizaje, poniendo a sus integrantes en posición de poder desafiar el statu quo tanto en la escuela como en la formación (Fiorentini, 2013). Más aún, una *comunidad de aprendizaje profesional* (PLC, por sus siglas en inglés) es una comunidad de práctica en la que el aprendizaje profesional permite el empoderamiento profesional de sus integrantes: adquieren seguridad y competencia en el uso del CME, y lo utilizan para justificar sus decisiones profesionales (Brodie, 2020).

La PLC (*Des*)*haciendo matemática de sexto a primero ESB* (Soto et al., 2020) fue creada a partir de una iniciativa conjunta de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco y la Supervisión Técnica Seccional Región VI Educación Primaria del Ministerio de Educación Provincia del Chubut. El contexto de esta PLC es favorecer la transición entre el nivel primario y secundario, y su foco está puesto en el diseño e implementación de actividades que ayuden a los estudiantes a transitar suavemente el cambio de nivel educativo. Esta PLC se transformó en un laboratorio para indagar cómo las discontinuidades en la construcción del CME inciden en lo que aprenden los docentes de la práctica.

Para la organización y análisis de la información recolectada, hemos utilizado la conceptualización de la teoría de sistemas de actividad (Engrenstrom, 2001), para diferenciar las tareas desarrolladas durante la implementación del dispositivo (ver panel derecho, Figura 1). En este esquema, nuestro objeto de estudio promueve la actividad de los sujetos intervinientes (docentes que forman parte de la comunidad de práctica profesional). Esta actividad está mediada por la resolución de problemas (artefactos/instrumentos) que se realiza en una comunidad de práctica profesional, reglada por el principio de simetría (reglas/normas) y facilitada/moderada por los investigadores de la PLC. En esta configuración identificamos cuatro triángulos como fuentes de información, que sirven para construir los datos para su posterior análisis (ver panel derecho de la Figura 1). El triángulo 1, llamado de producción, es fuente de información respecto a las dimensiones del conocimiento matemático que las y los docentes intervinientes ponen en juego durante la resolución de problemas. El triángulo 2, llamado de intercambio, proporciona datos respecto a las creencias puestas de manifiesto respecto al conocimiento matemático y su enseñanza que las y los docentes intervinientes ponen en juego durante la reflexión acerca de la resolución de problemas realizada. El triángulo 3, llamado de consumo, será útil para informar sobre las dimensiones del conocimiento pedagógico del contenido matemático puestas de manifiesto en la elaboración del cuaderno de observaciones y la correspondiente presentación de los resultados de la implementación. Por último, el triángulo 4, asociado a la distribución de las tareas durante la actividad, mediada principalmente por los facilitadores o investigadores que participan de la PLC.

Uno de los resultados obtenidos, a partir del análisis de los datos, está relacionado con las tensiones entre las dimensiones KPM y KTM del modelo MTSK (Soto et al., 2023). La aparición de dos resoluciones distintas para el problema

Representar gráficamente la operación $4/9 \times 3$,

En las que se observó una representación asociada al resultado de la cuenta ($12/9$) y otra asociada a la operación ($4/9 + 4/9 + 4/9$), se constituyó en un indicador de las diferencias entre las prácticas matemáticas (KPM) que se ponen en juego en la escuela primaria y secundaria. A partir de la reflexión conjunta alrededor de las distintas representaciones surgidas, se diseñaron colaborativamente tres problemas para implementar ver (triángulo 3, Figura 1, panel derecho), cuyo objetivo era analizar qué representaciones aparecían en las producciones de estudiantes en el aula:

*Una fábrica tiene tres tanques de agua. De cada uno se consume $4/9$ de su capacidad por día.
¿Cuánto se consume en total diariamente?*

Una fábrica tiene un tanque de agua que consume $4/9$ de su capacidad diariamente. ¿Cuánto se consume por tres días?

Una fábrica tiene un tanque de agua que consume $\frac{4}{9}$ de su capacidad diariamente. ¿En cuántos días se vaciará?

El análisis de las producciones de los estudiantes de los docentes participantes (tanto de secundaria como de primaria) puso en evidencia que el sentido de la multiplicación como sumas repetidas, dominante en la escuela primaria, prevalece sobre otros sentidos de la multiplicación como el asociado al área de rectángulos o la de árboles. Esto llevó a los docentes de nivel secundario a reflexionar sobre sus prácticas, debido a que el sentido geométrico de la multiplicación (asociado a áreas de rectángulos) no aparecía en las producciones de sus estudiantes.

Comentarios finales

En esta conferencia hemos presentado algunos trabajos vinculados a la incidencia de la doble discontinuidad entre la MA y la ME en la construcción del CME. Estos trabajos se basan en el proceso de elementalización, propuesto por Klein a principios del S. XX, mediante el cual se identifican ideas básicas y fundamentales en la construcción de la MA, que permiten visibilizar oportunidades para establecer relaciones entre ella y la ME, transformándose en poderosas herramientas de formación. Otras maneras de identificar estas ideas básicas o fundamentales para salvar estas discontinuidades en la construcción del CME son las prácticas matemáticas pedagógicas (Wasserman, 2023) o el uso de implicaciones y cuantificadores (Carena, 2023), que si bien no han sido desarrolladas en esta conferencia, consideramos que son muy potentes para establecer relaciones entre la MA y ME. Por otro lado, este proceso de elementalización ofrece solidez al momento de pensar el contexto de la formación disciplinar para futuros docentes de matemática.

El modelo MTSK para analizar las características del CME, nos ha permitido identificar los procesos de transformación de la MA que emergen de la práctica, poniendo en tensión la MA con la ME a través de las dimensiones de análisis del modelo. En particular, este modelo nos ha permitido visibilizar cómo las creencias acerca de la matemática y su enseñanza inciden en la construcción del CME.

Las formas de análisis del CME presentadas son herramientas de desarrollo profesional que ofrecen respuestas “situadas” a la demanda permanente de aprender más matemática por parte de los docentes, que posibilitan la identificación de elementos críticos que inciden en la construcción del CME y que dan sentido y significado a la identidad profesional docente.

A modo de cierre, queremos enfatizar que los cambios en las prácticas se producen cuando los docentes se involucran activamente en la tarea. La participación activa en las comunidades de práctica permite que los saberes emergentes se construyan y se modifiquen en la acción. El dispositivo *(Des)Haciendo matemática desde sexto a primero ESB* se ha consolidado como una PLC, cuyo origen proviene de decisiones ministeriales y su foco inicialmente se ubicó en el diseño y desarrollo de innovaciones educativas asociadas a la transición que los estudiantes experimentan desde el nivel primario al secundario. La heterogeneidad institucional presente en esta comunidad de práctica es una característica de las *comunidades de frontera* (Fiorentini, 2013) y ha posibilitado la sustentabilidad del dispositivo, pues el contexto de “estar en el borde” facilita que las decisiones respecto a los objetivos, foco y metodología de trabajo se negocien dentro de la misma comunidad. Esta continuidad tiene la ventaja de dotar a la comunidad de autonomía e independencia de los sistemas burocráticos en los que está inmersa, lo que es fundamental pues el foco del trabajo colaborativo del colectivo profesional es de naturaleza transitoria. Esto es, las respuestas que emergen en una PLC están condicionadas por el contexto (temporal, espacial, social, político y económico) en el cual aparecieron las preguntas. La pregunta y repregunta *¿No sé! ¿A vos qué te parece? ¿por qué?* promovió el intercambio profesional en el cual todos tenían derecho a expresar sus opiniones en un ambiente seguro y confiable para la construcción del conocimiento para enseñar.

Agradecimientos

Parte de los resultados presentados fueron financiados a través de la Secretaría de Ciencia y Técnica de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. Quiero mencionar a Mónica González, Cintia Negrette, Eliana Gómez, Luciana Díaz, María de Gracia Mendonça, Laura Carrasco, Laura Espinoza, Gabriela Rodríguez, Federico Dibez, Ignacio Viltes, Noelia Acosta, Nicole Villegas, Aldana Figueroa con quienes hemos desarrollado en diferentes momentos parte de los resultados que presentamos hoy. Y también quiero agradecer profundamente a estudiantes del Profesorado en Matemática de la UNPSJB, y a los docentes que desde hace mucho tiempo se acercan con preguntas y cuestiones de la práctica que nos estimulan a seguir reflexionando colaborativamente, acerca de nuestra apasionante profesión. El autor de este trabajo pertenece a la Red Iberoamericana MTSK.

Referencias Bibliográficas

- Brodie, K. (2020) *Resources for and From Collaboration: A Conceptual Framework*. En H. Borko y D. Potari (Eds.) *The twenty fifth ICMI Study. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups*, pp. 37-38. Lisboa, Portugal.
- Carena, M. (2023). *Sobre justificaciones en matemática: cuantificadores, implicaciones y equivalencias*. *Revista De Educación Matemática*, 38(2), pp. 31–47.
- Carrillo-Yañez, J., Climent, C., Montes, M., Contreras, L.C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, R., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M.C. (2018) *The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, DOI: 10.1080/14794802.2018.1479981.
- David, M.M., Moreira, P. y Tomaz, V. (2013) *Matemática escolar, matemática acadêmica e matemática do cotidiano: uma teia de relações sob investigação*. *Acta Scientiae*, 15(1), pp. 42-60.
- Fiorentini, D. (2013) *Learning and professional development of the mathematics teacher in research communities*. *Journal of Education*, 1(3), pp. 152-181
- González, M., y Soto, G. (2019) *La construcción del conocimiento matemático para enseñar en la formación del profesorado*. En N. Sgreccia & otros (Eds) *Memorias Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios de Matemática*, pp. 76-88. Rosario, Santa Fé.
- Goos, M. (2020). *Communities of Practice in Mathematics Teacher Education*. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. Second Edition (pp. 107-110). Springer Nature.
- Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A.A., Nam Kwon, O. y Verschaffel, L. (2016) *Transitions in Mathematics Education*. En G. Kaizer (Ed.) *ICME-13 Topical Surveys*, Springer Nature: Suiza.
- Klein, F. (2016). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint. Part I: Arithmetic, Algebra, Analysis. Part II: Geometry. Part III: Precision Mathematics and Approximation Mathematics*. Springer-Verlag, Germany: Berlin.
- Laborde, C. (2007). *Towards theoretical foundations of mathematics education*. *ZDM Mathematics Education* 39, pp.137-144.
- Lakatos, I. (1976) *Proofs and refutations*. Cambridge University Press, Inglaterra: Cambridge.
- Santaló, L. (1990) *Matemática para no matemáticos*. En García, Mercedes (Ed.), *I Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, pp. 1-12.
- Scheiner, T. y Bosch, M. (2023) *On the relationship between school mathematics and university mathematics: a comparison of three approaches*. *ZDM*, 55, pp. 767–778
- Schoenfeld, A., y Kilpatrick, J. (2008) *Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics*. En T. Wood (Ed. Series) y D. Tirosh (Ed. Vol) *International handbook of mathematics teacher education*, Vol. 2, pp. 321-352.
- Schoenfeld, A. (2020) *Classroom Addressing Horizontal and Vertical Gaps in Educational Systems*. *European Review*, pp. 1-17. Academia Europaea.
- Shulman, L. (1986) *Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching*. *Educational Researcher*, 15(2), pp. 4-14.
- Soto, G. (2015) *Matemática para enseñar o para enseñar: el caso de las fracciones*. En R. Patrick y A. Ruiz (Eds) *Educación Matemática en las Américas. Volumen 3: Formación Continua*, pp. 341-350. República Dominicana: Comité Interamericano de Educación Matemática.
- Soto, G., Villagra, N. y Correa, F. (2017) *La importancia de las relaciones en la práctica profesional docente. Un estudio de casos*. *Yupana*, 11, pp. 75-85.
- Soto, G., Negrette, C. y Díaz, A.L. (2019a) *Matemática a enseñar o para enseñar: el caso del cálculo de áreas de figuras planas* *Revista Suma*, 91, pp. 9-14.
- Soto, G., Negrette, C., Díaz, A.L. y Mendonca, M. (2019b) *¿Cuánta matemática tiene que saber un profesor de matemática?* En N. Sgreccia & otros (Eds) *Memorias Primeras Jornadas de Práctica Profesional Docente en Profesorados Universitarios de Matemática*, pp. 203-216. Rosario, Santa Fé.
- Soto, G., Negrette, C., Díaz, A.L., y Gómez, E. (2020) *I Don't Know! What Do You Think? Why? Collaborative Work Between Primary and Secondary School Teachers*. En H. Borko y D. Potari (Eds.) *The Twenty-Fifth ICMI Study. Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups*. pp. 420-426. Lisboa, Portugal.

Soto, G., Díaz, A.L., Gómez, E., Negrette, C., Carrasco, L., Espinoza, E. y Rodríguez, G. (2023) *(Des)haciendo matemática. La colaboración al servicio del desarrollo del conocimiento matemático para enseñar*. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.) *Actas VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, pp. 39-46. Valparaíso, Chile.

Wasserman, N. (2023) *Strengthening the role of practice in mathematics teacher education: opportunities for university mathematics courses*. En R. Delgado-Rebolledo y D. Zakaryan (Eds.) *Actas VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*, pp. 20-30. Valparaíso, Chile.

Innovación como resultado de investigación de la visión etnomatemática de Ubiratán D'Ambrosio

José Alfredo CASTELLANOS SUÁREZ ⁽¹⁾
Luis Tonatiuh CASTELLANOS SERRANO ⁽¹⁾
Ana Luisa ESTRADA ESQUIVEL ⁽²⁾

(1) Universidad Autónoma Chapingo, México
(2) Universidad Tecnocientífica del Pacífico, México

Resumen

Se atribuye a Ubiratán D'Ambrosio el aporte a la educación matemática, pero esto es parte de sus contribuciones, su innovación principal es proponer y ofrecer una teoría de conocimiento, basada en la etnomatemática. Se tiene como objetivo el explicar los aspectos nodales de innovación de los planteamientos elaborados por D'Ambrosio. Para ello se recurre a los conceptos de espacio y tiempo. Fue preciso conocer parte de su obra, sobre todo divulgada en conferencias, recurriendo al método analítico. Ya que deconstruyendo de lo general a lo particular y luego a la inversa, fue posible entender la importancia del aspecto sociocultural de la confección y configuración de la matemática (que denominó Etnomatemática; *etno* por los aspectos transculturales y transtemporales). De sus conceptos, su método (Ciclo de Conocimiento, consistente en la generación de nuevo conocimiento, para ser organizado intelectual y socialmente, para ser transmitido y difundido), su metodología (Sistema Cultural de Conocimiento de tres etapas) y su propuesta teórica que equivale tanto a llevarlo a la práctica y a su divulgación. Su teoría ahora es puesta a la crítica de la comunidad científica. Su trayectoria académica está plagada de reconocimientos -sobre todo- internacionales, pero también de formar instancias que hicieran posibles sus ideas.

Palabras clave: Etnomatemática. Ciclo de Conocimiento. Sistema Cultural de Conocimiento. Ubiratán D'Ambrosio.

Introducción

Ubiratán D'Ambrosio nacido en Brasil el 8 de mayo de 1832 y fallecido el 12 de mayo de 2021 a los 89 años, es uno de los matemáticos señeros, dedicado al entendimiento, a la comprensión y a la enseñanza de la matemática no sólo como disciplina, sino como parte del todo, de la complejidad, de transdisciplina, de la transculturalidad y el necesario acompañamiento de la transtemporalidad, un condimento esencial. Compartiendo ciertas ideas con Paulo Freire, va en busca de articular culturas y sociedades en espacio y tiempo, para poder quebrar el imperio y el monopolio del conocimiento disciplinario y colonialista. Con la idea de rescatar antiguas culturas, con ayuda de la hermenéutica y el empleo de la Historia Oral, empuja a aflorar la elaboración de ideas aritméticas y geométricas en cualquier espacio humano, de cualquier región y temporalidad, tan valiosas por su sencillez pero que resultan sustantivas, tanto como las elaboradas que van tras soluciones técnicas particulares, si bien ambas responden a problemas complejos.

Se recurre al método analítico a fin de deconstruir los planteamientos de Ubiratán para llevarlos a procesos de concreción, de lo general a lo concreto. El objetivo de este trabajo radica en explicar los puntos nodales de innovación de los planteamientos etnomatemáticos por parte de D'Ambrosio. El punto central de flexión radica en el *espacio y el tiempo*, no en el sentido einsteniano, sino cuántico, en complejidad. Para esto se precisa establecer su labor en apoyo a programas de estudios en posgrado en Estados Unidos en lo tocante al *Cálculo de Variaciones* y la *Teoría de la Medida*, actividad que le refuerza lo que ya le merodeaba en la mente, ya que los valores de cierto funcional se minimizan o maximizan en un determinado espacio que puede ser lineal o curvo, conforme al cálculo de las variaciones; en tanto que los conceptos de longitud, área y volumen de la teoría de la medida, tienen que compartir la interdisciplina para brindar ocasión a la geometría, la probabilidad y la estadística. En ambos casos era preciso entender la función de los números. Ubiratán se dio a la tarea de conocer cómo se formaron los números (naturales, racionales, irracionales...) y para ello tuvo que recurrir a la Filosofía de la Historia (la historia disciplinar) y a la Historia misma para conocer el soporte sociocultural de la elaboración matemática, pues sin cultura no hay matemática, pero esta cultura no viene sólo del homo sapiens sino desde sus antecesores homínidos. Para explicar, no sólo bastaba la palabra y quien la dijo primero, sino se dedicó a la construcción conceptual y etimológico de lo que adquirió carta de identidad como etnomatemática, ya que de ahí manan los conceptos.

Para comprender hubo que hacer historia, estableciendo a los sujetos de creación, que se encuentra ciertamente en personajes, pero ante todo en el medio social, es necesario recurrir a la teología, curioso pero el papel del mito resulta fundamental. Entonces es un compartimiento de la arqueología, la antropología, la etnografía, la sociología, la geografía, la historia, la matemática, de ahí su carácter transdisciplinario, sin aislar culturas sino correlacionando con ellas, pues nada serían los griegos sin el saber de los sumerios, babilonios y egipcios; qué serían de las aportaciones de fines del medioevo y del renacimiento sin los árabes. ¡Qué sería del conocimiento matemático contemporáneo sin el "0" de los hindúes de principios de la era, sin el todavía más antiguo cero de los mayas!

De modo que a través del tiempo y el papel de la aritmética y del espacio que juguetea con los entendimientos geométricos figurativos, es que puede establecer y proponer la metodología y las técnicas para arribar al conocimiento más profundo, pero a la vez más simple de las matemáticas. Que se trata de que la gente se interese y haga la matemática, la comprenda y eso es la pedagogía que emplaza Ubiratán. La socialización implica una mayor proyección de la matemática misma.

El planteamiento explicativo consiste en que a través de la etnomatemática confecciona una propuesta de teoría científica, siguiendo los pasos del método científico, con nuevas modalidades como son la complejidad, la transdisciplina, la transculturalidad y la transtemporalidad.

El alcance historiográfico de su obra es más de carácter biográfico en materia de logros académicos y reconocimientos institucionales; o bien, de carácter periodístico para hurgar sus opiniones en la materia, como sucede en la entrevista que realiza Hilbert Blanco, en la que D'Ambrosio expone sus puntos de vista en cuestión etnomatemática. Se comienzan a explorar sus contenidos teórico conceptuales para exponerlos más que explicarlos, tal sucede con Milton Rosa y Daniel Clark, que tratan sobre el sentido de la etnomatemática. A raíz del deceso del eminente matemático, es que Patrick Scott comienza a reflexionar sobre los aspectos centrales

de los aportes de Ubiratán, que lo centra en los componentes sociales y culturales que debe tener el trabajo matemático, para lograr explicar mejor sus alcances. Por ello es que se ha recurrido a las explicaciones que el mismo autor ofrece acerca de su obra; así ocurre con un artículo escrito en 2014. Sobre todo, en un video difundido por la Universidad Antonio Nariño, de Medellín, Colombia, en el que ofreció una conferencia que resultó magistral en la que expuso su sistema de una manera completa (que debe de transcribirse y publicarse). Cuatro meses después falleció, dejando este legado tan importante a través de su discurso en viva voz.

Perfil y trayectoria de Ubiratán

A la edad de 40 años, cumplidos en 1972, la vida de Ubiratán D'Ambrosio dio un vuelco en lo tocante a su formación profesional. Empezó sus estudios profesionales en su ciudad natal de Sao Paulo y logró graduarse como Licenciado y Profesor en Matemática en la Universidad de Sao Paulo, en los años 1954 y 1955. Ocho años después alcanzó el doctorado en Matemáticas, en la Escuela de Ingeniería de San Carlos, en la misma institución paulista. Fue becario en el Instituto di Matematica dell'UNiversità do Genova en los años 1960-1961. De 1964 a 1965 realizó sus estudios posdoctorales en el Departamento de Matemáticas de la Brown University, de Providence, Richmond, en Estados Unidos.¹

Tan pronto terminó sus estudios, en 1965 fungió como Profesor Asistente de Matemática en la Mathematics State University, de Nueva York, Búfalo, en Estados Unidos. Continuó laborando de 1968 a 1972 en la University of Rhode Island, en Nueva Inglaterra, primero como Profesor Asociado y luego como Director de Graduate Studies. En los programas de posgrado se dedicó al *cálculo de las variaciones*. Marcos Valle (2020, p. 1) explica que tal cálculo de variaciones propone establecer “las funciones que minimizan o maximizan el valor de cierto funcional definido sobre un determinado espacio. Problemas como hallar el camino de menor longitud que une dos puntos de una determinada superficie o encontrar la curva cerrada de una longitud dada que encierra el área máxima puedan ser resueltos usando el cálculo de variaciones.” D'Ambrosio también enseñaba la Teoría de la Medida bajo enfoque interdisciplinario, que generaliza los conceptos de longitud, área y volumen, correlacionando con la geometría, motivando a que se asigne un número a cada subconjunto (como medida), de manera que las medidas, las funciones medibles y la integración, resulten centrales en la geometría, la probabilidad y la estadística (Sabina de Lis, 2013, p. X). Es necesario entender lo lejos que se hallaba -académicamente hablando- de lo que en futuro sería actividad central cuando decidió dar un salto cuántico a su desenvolvimiento profesional.

Por eso el año de 1972 marcó un hito personal pues bien pudo haberse quedado a trabajar en Estados Unidos en cuestiones de matemática disciplinaria; no obstante, tomó la decisión de regresar a su país y emprender un nuevo derrotero basado en la educación matemática. Esta decisión contrastaba con la búsqueda de funciones para minimizar o maximizar los valores, de modo que las funciones fueran correlacionadas en subconjuntos que permitieran desarrollar la geometría, la probabilidad y la estadística.

¹ https://es.wikipedia.org/wiki/Ubiratan_D_27Ambrosio. Consulta; 7 de abril de 2024

El quehacer interdisciplinario le motivó a trabajar en la lógica matemática, la lingüística computacional y la inteligencia artificial, ya estando en la Universidad Estatal de Campinas, Brasil, fungió como Director del Instituto de Matemáticas, Estadística y Ciencias de la Computación. Ahí emanó la idea de generar la Maestría en la Enseñanza de Ciencias y Matemáticas.

Comenzó su participación en organismos académicos, se le nomina Vicepresidente Interamericano de Educación Matemática. Algo notable es que de fines de la década de los setentas a principios de los ochentas ayudó a fundar la Unión Matemática Africana, empujando a la generación de conocimiento al forjar la Sociedad Africana para el avance de la Ciencia. Al poco tiempo fue nominado Presidente de las Relaciones entre la Historia y Pedagogía de las Matemáticas, que denota el interés por los elementos culturales subyacentes en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en comunidades ágrafas y de poco desarrollo cultural, fomentando la investigación en los conocimientos matemáticos en distintos tipos de sociedades, culturas y en diferentes épocas históricas. En 1984 empezó a manejar las matemáticas como concepto holístico al juzgar que se relacionaban con la sociedad y la cultura general, al considerar cómo debía de articularse en un plan de estudios (Scott, 2021, p. 287).

El primer Congreso Internacional de Etnomatemáticas tuvo verificativo en Granada, España, en 1998. Con periodicidad cuatrianual han seguido desarrollándose los demás Congresos.

El impacto por la pedagogía y conocimiento matemático de orden cultural se expande y en 1985 es cofundador del Grupo Internacional sobre la Etnomatemática. Gracias a sus contribuciones a la Historia de las Matemáticas, en 2001 el Comité Internacional de Historia de las matemáticas le honra con el premio Kenneth O. May. Su aporte en materia de innovación en la educación matemática como campo de investigación, le vale el máximo galardón otorgado al gremio matemático, en 2005 recibe la Medalla Félix Klein (Rosa y Clark, 2021, p. 285).

Ante la pregunta que le formuló Blanco (2008, p. 22) durante la entrevista que le hizo en 2004, respecto a que si la etnomatemática formaba parte de la educación matemática. Ubiratán le respondió que es una manera de hacer educación matemática, ya que ésta es...

...la preparación de generaciones, sea adultos, pero en general educación de menores, es la preparación para que aquellos que tengan un sentido de ciudadanía, de vivir en sociedad y al mismo tiempo desarrolle su creatividad...con ojos que miran distintos ambientes culturales. El trabajo no es pasar al alumno las teorías matemáticas existentes, que están congeladas en los libros para que él las repita, ¡No! Debe ser una práctica, una cosa viva, hacer matemática dentro de las necesidades ambientales, sociales, culturales, etcétera. Y dar espacio para la imaginación para la creatividad, entonces utiliza mucha literatura, juegos, cinema, todo eso, para ver en ellos componentes matemáticos, la lectura de periódicos, por ejemplo, todos los días deben de leer un periódico e identificar los componentes matemáticos del periódico, eso es muy rico. (Blanco, 2008, p. 22)

Noción Etnomatemática

Ubiratán murió el 12 de mayo del 2021, representando una gran pérdida al conocimiento científico. Si bien 4 meses antes de su deceso, en el mes de febrero, había presentado una conferencia en el XI Simposio Internacional de Matemática, en la Universidad Antonio Nariño, en Medellín, Colombia, avocándose a explicar

cómo es que llegó a la noción de etnomatemática y en qué consistía (D'Ambrosio, 2021, <https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA>).

A través de reflexiones de tipo ontológico y epistemológico, se parte de cuestionar el proceso mediante el cual se construye una forma de conocimiento que es común a todas las culturas y a todas las sociedades. Son tan importantes estos tipos de conocimientos, que sustancialmente son distintos y les distinguen de otros animales, que es lo que denomina etnomatemática. No se trata solamente de abordar el factor pedagógico, enfoca de tal manera las cosas que no se detiene en la enseñanza de la matemática. Hilbert Blanco saca tales conclusiones en una entrevista realizada en 2004 durante el VI Congreso de Historia de la ciencia y la Tecnología, celebrado en Buenos Aires, Argentina (Blanco, 2008, p. 21).

En realidad, a Ubiratán le preocupaba algo más de fondo: la **ubicación espacio-temporal**. No era exclusivo del homo sapiens, es algo que se iba gestando desde los homínidos, que no sólo toman lo que hay como tal, sino que buscaban el cómo hacer (antes de explicar el cómo se hace). Interesaba el cómo era el mundo, el planeta...el cosmos.

Eso sólo se puede lograr a través de contar (narrar), del *mitar* (de mito), del *contar explicando*, de las mitologías, que son las primarias explicaciones dadas de manera conveniente. Entonces se recurre a las nociones matemáticas, a fin de buscar verdades universales, verdades palmarias, tal como suena, tangible como la palma de la mano. Eso es lo que busca Ubiratán D'Ambrosio, son la ontología y la epistemología. Explicar cómo es que el hombre antiguo ubicaba el tiempo y el espacio para establecer las diversas etapas de su historicidad, de cuando dispone de herramientas para lograr su propia ubicuidad que lo pone como sujeto de la y de su historicidad. Ahora es menester establecer dichas etapas, de los momentos de sus logros, para ser sujeto ontológico.

Cantidad y Cualidad

La matemática es cualitativa, pues parte de la cualidad humana al formar parte de los cuerpos de conocimiento, que tienen como referencial las prácticas tanto cualitativas como cuantitativas, por separado o imbricadas. Es el caso -digamos- de las comparaciones, la ordenación, la clasificación, las inferencias, los códigos de medidas, los pesos y las cantidades (primero en números, luego en otros valores).

Se trata de conocimientos acumulados por miles de generaciones, que parten de sus respectivos ambientes naturales y culturales. Por ello es que la *Etnomatemática es propia de una cultura*, no es posible hablar de la Matemática de una cultura.

Entonces Ubiratán recupera el verdadero origen de Mathema, de la Matemática, se trata de *Arte*, porque es invención. Los artesanos y agricultores, por mencionar algunas de las actividades más importantes, pero bien se puede incluir al clero y a la burocracia contable-administrativa que determinan las tributaciones, todos ellos hacen matemáticas alternativas. En ciertas sociedades también se puede incluir al cotidiano popular, en los mercados y las ferias, en las percepciones e ingresos de trabajadores y obreros.

El *Ciclo del Conocimiento* es el fundamento teórico que parte de un principio básico, el conocimiento no es fijo y está sujeto a una dinámica en la que la realidad y el conocimiento mismo brindan los elementos que ofrecen instrumentos intelectuales y materiales para que el conocimiento mismo sea renovado en cada momento y en

cada generación, permitiendo inventar. Para ello se formula un programa de investigación a fin de que de forma integrada se genere investigación: a) la generación y producción de nuevo conocimiento, b) que este mismo sea organizado intelectual y socialmente, para que, c) sea transmitido y difundido (D'Ambrosio, 2014, p. 101). Entonces caracteriza la metodología de investigación como de las tres etapas:

1. Pasar de prácticas ocasionales (ad hoc), de momento o casuísticas, de la cotidianidad, de coyuntura, a métodos que sean propios de la evolución del homo y de cada individuo

2. Las explicaciones son necesarias, pero deben de propender a la formación de métodos y a la elaboración de teorías.

3. Entonces se está en condiciones de pasar de la teoría a la invención y la innovación, ya que parte de las ciencias y de las predicciones.

Ubiratán fue más atrevido y visionario al proponer el fomento de la ficción, ya que daba rienda suelta al pensamiento y éste a la invención, haciendo preciso recurrir al ensayo. Entonces echa mano de la ficción empleando la metáfora, que la narrativa sirviera para nutrir el conocimiento, comportándose libre a la subordinación de valores y al rigor de la precisión. Así, la ficción impulsa el conocimiento como respuesta a estímulos complejos que provienen de la sociedad.

Sistemas de Conocimiento Cultural

La empresa de que una ciencia se reflexione a sí misma se denomina Filosofía de la Ciencia (como uno de los cuatro componentes de la Filosofía), al realizar sus antecedentes tiene que recurrir a la Historia. Entre ambas se ocupan de los cuerpos de conocimiento que fluyen para enriquecer los sistemas de conocimiento, que se expresan -a lo largo del tiempo- en las maneras de hacer los distintos y diferentes ambientes naturales y culturales. Por ello es que los sistemas de explicación y las maneras de hacer están en constante transformación, máxime que el encuentro de culturas propulsa los cambios.

Estas ideas fueron retomadas, fortalecidas y desarrolladas a partir de Reymond Wilder, quien en 1981 publicó su libro *Matemática como sistema cultural*. Es esta la manera de entender a la **Matemática como Sistema de Conocimiento Cultural**. Entonces es posible entender cómo es que, a partir de rituales, creencias, instrumentos materiales e intelectuales, compartidas por un grupo de personas, como parte de un sistema cultural, se comparten también el lenguaje y el idioma, nutriendo al conocimiento. De esta manera es posible romper la visión disciplinaria y dar nueva comprensión al tratarse de un conocimientos complejo e interdisciplinario. Al respecto nos dice Ubiratán:

Las estrategias intelectuales propias del ser humano para pervivir son: observar, evaluar, comparar, ordenar, organizar, medir, cuantificar, crear representaciones (lo que es igual a modelo), ser curioso y explicar (que es igual a Mathema), inferir, eso es sacar conclusiones (igual a Lógica) (D'Ambrosio, 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA>)

Se sirve de las representaciones que ocurren a nivel individual, acto seguido se socializan, el momento álgido del proceso es la integración como cultura de grupo. Ubiratán considera que las matemáticas y la educación matemática contribuyen a una civilización para todos; en ella no cabe la inequidad ni la intolerancia (Scott, 2021, p. 289).

Entonces vuelve a insistir en la tarea del historiador y del filósofo de la ciencia, ya que el humano busca siempre supervivir, con ello trascender en el espacio y el tiempo, le es consustancial a la naturaleza humana. Así, es posible encontrar la manera de hacer, de buscar y encontrar las explicaciones variadas en las distintas regiones del mundo con cada cultura.

Etimología y epistemología de una invención: Etnomatemática

La palabra Etnomatemática se integra por tres vocablos, que son -a su vez- tres representaciones. Por *etno* se comprende los diversos ambientes de tipo social, cultural, natural, pero también la naturaleza, entendiendo ésta como creación humana. En tanto la palabra *thica*, que procede de *techni* y *technos* (técnica, que parte del ingenio), como constitutivo de apoyo a las ciencias, ante todo a las *Artes*, técnicas, maneras, que es -como ingenio, como ingeniería- parte la matemática (Blanco, 2008, p. 21). *Mathema* como *explicar* (con y como curiosidad) entender, enseñar, manejarse, como procedimiento activo. Entonces propone ser un constitutivo de la teoría del conocimiento, en calidad de epistemología.

Patrik Scott (2021, p. 286) se refirió a Wilbur Mellena, quien aseguraba que había inventado la palabra en 1967 y la propaló en 1971. Ubiratán la empleó durante el Panel “por qué enseñar matemáticas”, durante el Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática, en Karlsruhe, Alemania, en 1976, su disertación fue publicada en 1979. En tal ocasión también sostuvo que hay diversas formas de hacer matemáticas por las diferentes culturas.

Ubiratán ofrece una mayor explicación a sus consideraciones para precisar que las técnicas dan lugar a los espacios de resguardo y de confort, al dar idea del *espacio* donde está (en pos de mejores condiciones y de temperatura, para el confort). Es de esta manera que el homínido y el homo sapiens se aproximan al espacio y su ficción, que los conduce a la geometría, para ser empleada en la satisfacción personal, de la gens, del clan, del grupo.

A la par. usa el *tiempo*, para migrar, recolectar, cazar y cosechar (ya en la modalidad de agricultura). De esta forma se ve compelido a emplear la cronología, entonces diseña y marca imaginativamente el tiempo. Es cuando configura creativamente la astronomía, que le permite crear calendarios, entonces está en posición de desarrollar la aritmética.

Transdisciplina, transcultura y transtemporalidad

Las nociones de Ubiratán D'Ambrosio surgen en un momento en que se combate la limitación propia de la disciplina como conocimiento fragmentado, sin desconocer sus aportes, se busca la necesidad de integrar el conocimiento científico, para ello hay que recurrir a la transdisciplina, pues es la única manera de comprender a los sistemas complejos, ya que se encarnan al enfoque holístico, por permitir la reflexión transdisciplinaria y la transculturalidad. Es el momento que Ubiratán recurre a la ficción, a la metáfora, a la invención, entonces nos ofrece la transtemporalidad, que es ante todo una empresa y una historia humana, una historia humanista, pues comprende a todo el planeta. Realizar investigación no es tarea fácil, ya que se debe de comenzar a identificar, sistematizar, a generar conocimiento, pues detrás de las figuras, los triángulos, los círculos, dice D'Ambrosio, en su forma originaria, subyacen consideraciones de tipo religiosas y, por ende, teológicas

(Blanco, 2021, p. 24). Como el caso de los antiguos altares vedas de los hindúes (1500 a 500 ac.). La intervención de la teología (como parte de la filosofía, de la lógica, de la estética, de la filosofía de la ciencia), de la matemática, de la filosofía, de la cultura, de la historia, de la sociología, la antropología, mueve a crear nuevos conceptos complejos, a moverse en el terreno de la transdisciplina, es que se tiene que recurrir a la transculturalidad para comprender los diversos casos que ayudan a establecer las características particulares y generales, para proponer y fundamentar sus leyes históricas. Todo ratifica la condición humana de la confección matemática como condición cultural.

Ubiratán es atrevido, es innovador. Él distingue la Historia manifiesta, que es producto de las fuentes académicas (archivística, positivista), que se ciñe a los valores dominantes; frente a ello lanza el reto de la Historia latente. Es la historia contenida en la Historia Oral, recuperada gracias a procesos metodológicos y hermenéuticos, ya que es producto de la tradición. De ambas se tiene un registro diferencial, pero sobre todo hay que atender a la Historia latente que se halla resguardada y encarnada en las comunidades.

Es por eso que considera que la Etnomatemática es holística, es transdisciplinar, transcultural y transtemporal.

Conclusiones

Ubiratan D'Ambrosio confecciona a lo largo del tiempo, de sus 49 años restantes de vida, después de 1972, una metodología que se propone enriquecer, flexibilizar, tornando sencillo el conocimiento y manejo matemático, procurando el alcance pedagógico en la población.

Lejos de lo que suponen el emplazamiento no está en la enseñanza matemática, ésta es una vía para facilitar la tarea. Él mismo lo dice: es la investigación. Ello supone un objeto, que es el humano, la humanización, el factor transtemporal, por eso es que diserta sobre el homínido y el homo sapiens, en la manera que recurren al mito y a la ficción como explicación, a la teología como proceso para encontrar la sustantividad del secreto matemático que primero está en los viejos, en los sabios, en el chamán, en los augures (como en Roma antigua), para pasar a los aparatos administrativos, luego a la disertación filosófica y así va sucediendo la aventura humana que posa en los conceptos de espacio y tiempo, como base de las nociones aritméticas y geométricas

Ya con los conceptos es posible armar una teoría y su fundamento es el Ciclo del Conocimiento, que lo considera dialéctico, en dinamismo constante, para su renovación, por eso es indispensable la especulación, la invención. La metodología parte de tres principios: la generación y producción de conocimiento nuevo, que éste se organice intelectual y socialmente para ser transmitido y difundido. Con esto es posible emprender las tres etapas de la investigación: 1) que la cotidianidad y la coyuntura pasen a métodos que reflejen la historicidad de la evolución del homo sapiens y de la sociedad, 2) las explicaciones deben de canalizar a la propuesta de métodos y de teorías (tal como lo ha propuesto a través de sus entrevistas, escritos y conferencias), 3) para ser congruentes con sus planteamientos, es preciso pasar de la teoría a la invención y a la innovación, partiendo de las ciencias y de las predicciones.

Lo único que ha hecho Ubiratan D'Ambrosio es aplicar el método científico y proponer consecuentemente a la comunidad académica y al público sus propuestas, nada menos que una teoría científica. Con una versión renovada de emancipación social.

Referencias Bibliográficas

Borba, Marcelo. 2023. *Conferencia: El legado de Ubiratan D'Ambrosio y la Etnomatemática*. Universidad de Lima. Perú. Agosto de 2023. <https://www.ulima.edu.pe/en/node/25562>

D'Ambrosio, Ubiratan. 2014. Bases conceptuales de Etnomatemática. En: **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**. Vol. 7, N° 2, junio-septiembre de 2014. San Juan de Pasto, Colombia.

Fuentes Blanco Álvarez, Hilbert. 2008. *Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio*. En: **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**. Vol. 1, N° 1, febrero de 2008. San Juan de Pasto, Colombia.

La Etnomatemática como empresa matemática humanista. Conferencia de Ubiratan D'Ambrosio. 2021. Medellín Colombia. Febrero de 2021. <https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA>

Rosa, Milton y Daniel Clark Orey. 2021. *Ubiratan D'Ambrosio: el legado de una vida dedicada a la búsqueda de las matemáticas por la paz*. En: **Educación Matemática**. Vol. 33, N° 2, Agosto de 2021. Universidad de Guadalajara, México.

Sabina de Lis, José C. 2013. **Teoría de la Medida**. Universidad de La Laguna. Tenerife, España. https://josabina.webs ull.es/Teoria%20de%20la%20medida/Curso_Teoria_Medida.pdf

Scott, Patrick. 2021. *La contribución intelectual de Ubiratan D'Ambrosio a las Etnomatemáticas*. En: **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Número Especial. Costa Rica.

Ubiratán D'Ambrosio. https://es.wikipedia.org/wiki/Ubiratan_D%27Ambrosio. Consulta; 7 de abril de 2024.

Valle Miñón, Marcos. 2020. **Introducción al cálculo de variaciones**. España, Universidad de Cantabria. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/20873/Valle%20Mi%C3%B1%C3%B3n%20Marcos.pdf?sequence=1&isAllowed=y#:~:text=EI%20c%C3%A1lculo%20de%20variaciones%20es,valor%20de%20un%20cierto%20funcional>. Consultado el 8 de abril de 2024.

El diseño de tareas de modelización con inteligencia artificial

Marcel D. POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Argentina

Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina

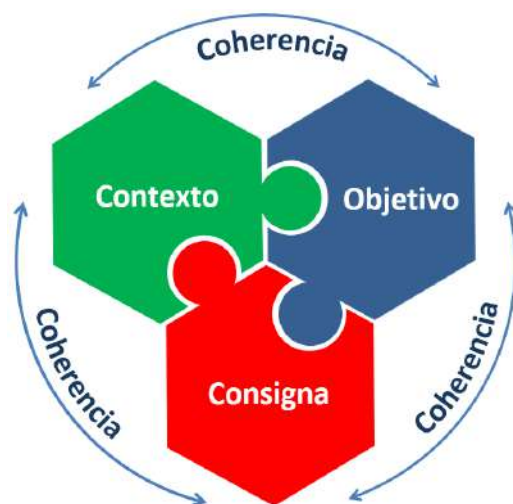
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Resumen

En esta conferencia, exploramos la convergencia entre la modelización matemática y la inteligencia artificial como herramientas fundamentales en la formación de ingenieros. Presentamos ejemplos que ilustran cómo estas disciplinas pueden enriquecer la educación en ingeniería, fomentando el desarrollo de competencias tanto generales como específicas. Además, demostramos cómo la modelización matemática y la inteligencia artificial se combinan eficazmente para diseñar tareas pedagógicas que fortalecen las habilidades matemáticas y promueven la comprensión de lectura y la escritura académica, habilidades cruciales para los futuros ingenieros. Finalmente, abordamos la forma en que la inteligencia artificial puede asistir a los profesores en la creación de problemas y proyectos de modelización matemática de alta calidad, incluyendo la definición de etapas, puntos críticos y rúbricas de evaluación. En esta etapa, subrayamos cómo la sinergia entre la modelización matemática y la inteligencia artificial enriquece la formación de ingenieros, preparándolos para enfrentar desafíos complejos en un mundo impulsado por la tecnología.

Introducción

La resolución de problemas es una habilidad fundamental en el aprendizaje de las matemáticas aplicadas. Para lograr un enfoque efectivo en la enseñanza de la resolución de problemas, es crucial formular una buena tarea. La formulación de toda tarea implica considerar el contexto en el que se desarrolla, establecer objetivos claros de aprendizaje y diseñar una consigna que esté en consonancia con el objetivo y sea apropiada para el contexto (Rodríguez, Pochulu, Barreiro, Leonian y Marino, 2022).



Es fundamental que exista coherencia entre las partes de una tarea, es decir, que el objetivo esté en armonía con el contexto, que la consigna esté alineada con el objetivo y, además, sea adecuada para el contexto. Si no se logra esta coherencia, puede haber un problema inicial en la formulación de la tarea que requeriría ser corregido.

Por encontrarnos en un contexto educativo, consideramos apropiado utilizar el término consigna en lugar de problema debido a la polisemia que rodea a este último. La palabra problema puede generar confusión, ya que implica tanto una dificultad como un desafío en sí mismo. Para algunos estudiantes, esta consigna puede representar un desafío o un problema a resolver, mientras que para otros puede ser percibida simplemente como un ejercicio con un camino de resolución vislumbrado. De esta manera, el término consigna engloba una amplia gama de actividades que promueven el desarrollo de habilidades y la adquisición de conocimientos, adaptándose a las diferentes necesidades y capacidades de los estudiantes. Entonces, la conformación de una tarea educativa implica la integración de tres elementos esenciales: el contexto, el objetivo planteado por el docente y la consigna en sí misma.

El contexto desempeña un papel fundamental en una tarea educativa, ya que proporciona una descripción detallada que sitúa a los estudiantes en el tipo de trabajo que han estado realizando. Además de considerar sus conocimientos previos y las consignas previas abordadas, el contexto también se refiere al momento en el cual se presenta la tarea, ya sea antes o después de explicar un nuevo tema.

El término contexto puede abarcar no solo el entorno de la consigna, sino también la situación que enmarca la tarea en otros ámbitos, como la resolución de problemas extramatemáticos. En este sentido, el contexto educativo se enfoca en proporcionar una base sólida para el desarrollo de habilidades y la adquisición de conocimientos, permitiendo a los estudiantes comprender la relevancia y la aplicación de lo que están aprendiendo. Además, el contexto puede incluir la modalidad de trabajo propuesta, ya sea individual, grupal o dirigida por el docente, así como una anticipación de los temas que se abordarán en el futuro, brindando una visión general del camino educativo que se recorrerá.

El objetivo planteado por el docente es el objetivo de aprendizaje, es decir, lo que se pretende que los estudiantes aprendan o comiencen a aprender a partir de la clase. Es importante distinguir entre los objetivos y los propósitos del docente. Los propósitos son las metas o intenciones del docente, como fomentar la comunicación entre los estudiantes, pero si no se logran, no tiene consecuencias negativas directas. En cambio, los objetivos son los logros concretos que el docente evaluará y que se espera que los estudiantes alcancen y representan los resultados indispensables que se espera que ellos logren.

Es crucial destacar la pertinencia de la tarea, lo cual puede apoyarse en la inteligencia artificial. La pertinencia implica considerar el contexto específico para el cual se diseñó la actividad. Por ejemplo, una tarea puede ser matemáticamente adecuada, pero carecer de relevancia para el contexto de los estudiantes, como cuando se aplica a carreras o disciplinas distintas. Aquí es donde la inteligencia artificial entra en juego, permitiendo explorar las aplicaciones de los conceptos matemáticos en diversas áreas. Esta herramienta ofrece un amplio abanico de posibilidades como, por ejemplo, el uso de derivadas en ciencias económicas para análisis de costos y márgenes de contribución, optimización de beneficios, evaluación de riesgos y rentabilidad, entre otros. Este enfoque no solo facilita la identificación de aplicaciones prácticas de las matemáticas, sino que también enriquece la pertinencia de las actividades propuestas. Con la capacidad de seleccionar problemas basados en aplicaciones específicas, los estudiantes pueden comprender la utilidad y relevancia de los conceptos matemáticos. Así, se preparan para responder a la pregunta recurrente: *¿Por qué necesitamos aprender esto?*

Desarrollo

En el contexto de la enseñanza de las matemáticas, el diseño de problemas desempeña un papel fundamental en el desarrollo de habilidades y competencias de los estudiantes. Los problemas matemáticos bien diseñados no solo promueven el dominio de conceptos y procedimientos, sino que también fomentan el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la capacidad de resolver situaciones complejas.

Es esencial trascender los ejercicios rutinarios de aplicación de algoritmos y fórmulas, y plantear desafíos que requieran un enfoque cognitivamente exigente por parte de los estudiantes. Los problemas deben ser auténticos, relevantes y estar alineados con los objetivos educativos, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera significativa.

Es común encontrarnos con problemas que, en lugar de potenciar el pensamiento matemático, imponen el uso de nuevas tecnologías o software sin una conexión clara con las competencias matemáticas que se pretenden desarrollar. En estos casos, el enfoque se centra en el dominio del software en lugar de la comprensión de los conceptos matemáticos subyacentes.

Por consiguiente, en el proceso de diseñar actividades educativas, es esencial considerar el contexto específico en el que serán aplicadas. Esto implica reflexionar sobre la pertinencia de la tarea en relación con la carrera o disciplina para la cual se está preparando a los estudiantes. Es posible que ciertas actividades nos resulten atractivas o relevantes debido a nuestra formación previa o experiencia como educadores. Sin embargo, es crucial reconocer que lo que puede ser pertinente para una especialidad, como la geometría o la estadística en el caso de la formación docente, puede no serlo para otras áreas, como la administración de empresas. En este sentido, la pregunta fundamental que debemos plantearnos es: *¿Por qué dedicar tiempo a este tipo de actividades?* Aquí es donde la inteligencia artificial puede ser de gran ayuda, siempre y cuando mantengamos una mente abierta y no nos dejemos llevar por prejuicios obsoletos. Recordemos cómo en el pasado, la introducción de herramientas como la calculadora o la computadora suscitó debates similares sobre su impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Debemos reconocer que el contexto actual es diferente: ahora contamos con recursos tecnológicos avanzados, incluida la inteligencia artificial, que pueden enriquecer significativamente la enseñanza de las matemáticas.

La disponibilidad de estos recursos nos brinda la oportunidad de diseñar actividades más pertinentes y adaptadas a las necesidades de nuestros estudiantes. Por ejemplo, mientras que en programas de matemáticas avanzadas puede ser apropiado profundizar en el análisis matemático de funciones, para otros campos como la administración, es más relevante trabajar con conjuntos de datos y modelos que se aproximen a situaciones reales. Sin embargo, adoptar este enfoque implica desafiar nuestros propios sistemas de creencias arraigados. Debemos superar la noción de las matemáticas como un conjunto estático de reglas y procedimientos a ser enseñados y memorizados, y reconocerlas como una disciplina dinámica que se integra con otras áreas del conocimiento y se adapta a las demandas del mundo contemporáneo.

En este proceso de reevaluación, la inteligencia artificial puede servir como un aliado valioso al proporcionar acceso a una amplia gama de investigaciones y perspectivas sobre la enseñanza de las matemáticas. Al hacer preguntas específicas, como las críticas tradicionales a los métodos de enseñanza o las alternativas innovadoras, la inteligencia artificial puede ofrecer información y análisis que enriquezcan nuestra comprensión y orienten nuestras prácticas pedagógicas hacia un enfoque más efectivo y relevante

para nuestros estudiantes. Al combinar nuestra inteligencia natural con la inteligencia artificial, tenemos la capacidad de transformar la enseñanza de las matemáticas, superando las barreras del pasado y preparando a nuestros estudiantes para enfrentar los desafíos del futuro con confianza y competencia.

Para abordar la brecha entre las matemáticas y otras disciplinas en una carrera específica, es esencial comprender cómo los estudiantes enfrentan la transferencia de conocimientos teóricos a situaciones prácticas. En el ámbito de la educación secundaria, se observan varios desafíos recurrentes que dificultan esta conexión. En primer lugar, se tiende a enfatizar en la memorización de fórmulas y procedimientos, en detrimento de una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. Sin embargo, los enfoques curriculares actuales resaltan la importancia de procesos, comunicación y modelización sobre la simple memorización y repetición.

Otro obstáculo significativo radica en la falta de conexión entre los conceptos matemáticos y la vida cotidiana de los estudiantes. A menudo, las situaciones planteadas en las tareas escolares no reflejan problemas reales, lo que puede generar desinterés y falta de relevancia percibida por parte de los estudiantes. Además, existe una tendencia a enfocarse en la búsqueda rápida de soluciones a problemas, sin dedicar suficiente atención al proceso de resolución y al desarrollo del razonamiento matemático.

Un tercer punto crítico es la escasa atención que se presta a la creatividad y al pensamiento crítico en el aprendizaje de las matemáticas. La enseñanza se centra en la aplicación de algoritmos y procedimientos establecidos, dejando poco espacio para la exploración y la generación de nuevas ideas. Sin embargo, los nuevos enfoques curriculares enfatizan la importancia de plantear problemas y fomentar la resolución creativa de los mismos.

Para abordar estos desafíos, es necesario replantear la forma en que se diseñan las actividades de aprendizaje en matemáticas. Por ejemplo, en lugar de partir de la teoría y luego pasar a la práctica, es más efectivo iniciar con situaciones concretas y relevantes para los estudiantes, y luego explorar los conceptos matemáticos involucrados en esas situaciones. En este sentido, es crucial promover un enfoque más reflexivo y crítico en la resolución de problemas, donde se valore tanto el proceso como el resultado final.

Como se viene señalando, la inteligencia artificial puede desempeñar un papel clave al proporcionar retroalimentación y sugerencias para mejorar el diseño de actividades de aprendizaje en matemáticas. Al analizar y reformular las consignas de las tareas, la inteligencia artificial puede identificar áreas de mejora y proponer enfoques más efectivos y relevantes para los estudiantes. Por ejemplo, al abordar una tarea que implica el análisis de la trayectoria de un chorro de agua, la inteligencia artificial puede sugerir enfoques alternativos que enfatizan el proceso matemático subyacente en lugar del simple uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra. Al reconocer y abordar los desafíos inherentes a la enseñanza de las matemáticas en contextos interdisciplinarios, podemos promover un aprendizaje más significativo y relevante para los estudiantes. La inteligencia artificial ofrece herramientas y recursos valiosos para mejorar el diseño y la implementación de actividades de aprendizaje en matemáticas, y así cerrar la brecha entre la teoría y la práctica en el aula.

Pasemos a una reformulación de una consigna de una tarea. En un texto del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación en Colombia, se plantea un problema sobre Catalina, quien tiene una fábrica de champú artesanal. Para elaborar 1 litro de champú, utiliza 150 cm³ de suavizante. La pregunta es ¿cuántos centímetros cúbicos de suavizante necesitará para elaborar 15 litros de champú?

Debemos cuestionar si este problema refleja una situación real. Realmente, ¿lo único que importa es un solo componente de un producto? ¿En realidad se usa suavizante en un champú en particular? ¿Cuál es el sentido de ofrecer opciones de respuesta múltiples donde no hay procesos de comunicación ni nada más? Una vez más, el énfasis está en la respuesta, nada más.

Si solicitamos a la inteligencia artificial que reformule este problema, nos encontraremos con una versión que plantea el problema de manera más realista y permite a los estudiantes explorar diferentes estrategias para resolverlo. Por ejemplo, podríamos preguntar cuántos champús diarios se podrían producir con una cantidad determinada de suavizante, lo que implicaría fundamentar las respuestas y fomentar la argumentación. La inteligencia artificial puede ayudarnos a mejorar la forma en que diseñamos y planteamos problemas en el aula de matemáticas. Al interactuar con la inteligencia natural, podemos encontrar nuevas formas de abordar los problemas y fomentar un aprendizaje más significativo y

contextualizado para nuestros estudiantes. Entonces, si analizamos qué podríamos hacer, empezariamos por investigar qué contienen los champús caseros, por ejemplo, aquellos de fabricación artesanal. Podríamos examinar uno a base de aloe vera y observar todos los ingredientes que contiene, notando que ninguno de ellos es suavizante. Además, podríamos explorar otras recetas, como la de champú casero de leche de coco, y aprender cómo se elaboran. A partir de aquí, surge la posibilidad de plantear nuevas preguntas con los estudiantes, como qué tipo de envases usar y de qué capacidad, ya sea reciclados o comprados, para envasar el champú. También podríamos indagar sobre las preferencias de los posibles clientes mediante encuestas, lo que nos permitiría ajustar nuestra producción a la demanda y calcular el costo mínimo de producción para asegurar su viabilidad económica. Además, podríamos comparar los beneficios de estos champús caseros con otros disponibles en el mercado, lo que nos llevaría a considerar qué tipo de proyecto podríamos llevar a cabo con los estudiantes.

Partiendo de una experiencia real que tuvimos y empleando el apoyo de la inteligencia artificial, surge otra propuesta de modelización. Teníamos una piscina con árboles plantados alrededor que proyectaban sombra sobre el agua. Esta situación nos lleva a plantear preguntas específicas sobre cómo la sombra de los árboles afectaría la temperatura del agua en la piscina y de qué manera. Podríamos utilizar la inteligencia artificial para evaluar si esta actividad de modelización sobre el impacto de la sombra de los árboles en una piscina es adecuada para estudiantes de secundaria, y en base a sus sugerencias, podríamos modificar y mejorar la actividad. Una vez establecido el marco para la actividad, podríamos proceder a recolectar datos, investigar cómo funciona la sombra y analizar los resultados obtenidos. Los estudiantes podrían realizar mediciones de la altura de los árboles, la ubicación y el tamaño de la piscina, así como investigar y comprender cómo cambia la posición y el tamaño de la sombra a lo largo del día y del año. Luego, podrían realizar observaciones periódicas de la sombra proyectada por los árboles en diferentes momentos del día y en diferentes épocas del año. Con estos datos, podrían modelar el crecimiento de los árboles y analizar cómo la sombra afectará el área de la piscina en diferentes momentos del día y si eso impactará en su uso.

Finalmente, los estudiantes podrían presentar sus conclusiones en forma de informe o video, lo que permitiría evaluar no solo sus habilidades matemáticas, sino también su capacidad para comunicar y argumentar sus resultados. Este enfoque, centrado en la investigación y la resolución de problemas del mundo real, ofrece a los estudiantes una experiencia de aprendizaje significativa y práctica en el aula.

Cambiamos de contexto por un momento y trasladémonos al ámbito de las ciencias económicas. Tomemos como ejemplo el consumo de carne en Argentina, donde podemos analizar el consumo *per cápita* anual de diferentes tipos de carnes. Surge entonces la pregunta de cuál sería el momento óptimo para faenar un animal y maximizar los beneficios. Si consultamos a la inteligencia artificial sobre la viabilidad de esta actividad de modelización para estudiantes de ciencias económicas, nos indica que está alineada con los contenidos de álgebra lineal y cálculo diferencial.

Ahora bien, al abordar este problema, surgen una serie de consideraciones y pasos a seguir. En primer lugar, es necesario seleccionar una raza animal adecuada, considerando que hay distintos tipos de carnes y razas destinadas a cada una. Recopilar datos sobre el crecimiento de estos animales es fundamental para modelar su desarrollo, utilizando herramientas matemáticas como el álgebra lineal y el cálculo diferencial.

Una vez establecido el modelo de crecimiento, podemos analizar las utilidades, teniendo en cuenta factores como el precio del alimento y las variaciones en el precio de venta del animal vivo. La sensibilidad del modelo a estos factores económicos nos lleva a reflexionar sobre la optimización de las utilidades y a considerar distintos escenarios y decisiones a tomar. Es importante también interpretar los resultados obtenidos, discutiendo las implicaciones económicas de faenar el animal en diferentes momentos y otros aspectos relevantes. Además, se puede realizar un análisis comparativo entre los resultados del modelo y estimaciones obtenidas de fuentes externas, teniendo en cuenta la incertidumbre inherente a este tipo de problemas. Este problema de modelización económica, descrito en Pochulu (2018a), proporciona a los estudiantes una oportunidad para aplicar conceptos teóricos a situaciones prácticas, tomar decisiones fundamentadas y desarrollar habilidades analíticas y de resolución de problemas.

Vamos a analizar otro problema para que apreciemos cómo la Inteligencia Artificial puede ayudarnos a mejorar el contexto. Imaginemos que estamos en una clase de matemáticas en la escuela secundaria y queremos abordar una problemática relevante en nuestro entorno, como la enjambrazón de las abejas, que ocurre cuando una colmena experimenta una superpoblación y decide crear una nueva reina. Esta situación

plantea interrogantes específicos sobre cómo afectará la población de abejas en cada colmena y cuál sería la decisión más adecuada para el apicultor. Sin embargo, debemos tener cuidado de no presentar un problema demasiado determinista o poco realista a los estudiantes.

Si consultamos a la Inteligencia Artificial sobre cómo abordar este problema con estudiantes de secundaria, nos sugiere una dinámica poblacional en las colmenas de abejas. En este escenario, un apicultor observa que su colmena está en proceso de enjambrazón, lo que implica la formación de una nueva colmena con una abeja reina joven y la permanencia de la colmena original con una abeja reina vieja. El apicultor debe decidir si dejar ambas colmenas o eliminar una de las reinas. Sin embargo, es importante cuestionar la veracidad de los datos presentados y asegurarnos de que el problema refleje una situación realista y no manipulada para simplificar cálculos matemáticos.

En lugar de ofrecer datos prefabricados, podríamos guiar a los estudiantes en la exploración y recopilación de información sobre la enjambrazón de abejas y su impacto en la producción de miel, como se describe en Pochulu (2018b). Esto les permitiría desarrollar una comprensión más profunda del problema y aplicar conceptos matemáticos como el crecimiento exponencial, el cálculo de poblaciones y la producción de miel para tomar decisiones informadas. Además, podríamos fomentar la representación gráfica de los datos recopilados utilizando herramientas como GeoGebra, lo que ayudaría a los estudiantes a identificar patrones y tendencias en los datos. Esta aproximación más flexible y exploratoria les permitiría a los estudiantes adentrarse en la complejidad del problema y descubrir por sí mismos las implicaciones de sus decisiones. En este sentido, debemos replantear el problema de manera que fomente la exploración activa y el pensamiento crítico de los estudiantes, en lugar de proporcionarles respuestas predefinidas. Esto les permitirá enfrentarse a situaciones más cercanas a la realidad y desarrollar habilidades analíticas y de resolución de genuinos problemas de modelización matemática.

En este enfoque de diseño de tareas, podemos aprovechar la ayuda de la Inteligencia Artificial para generar herramientas de evaluación efectivas. Podemos solicitarle que nos proporcione una rúbrica de evaluación para la tarea específica que estamos diseñando. Por ejemplo, al solicitar una rúbrica para el trabajo sobre la enjambrazón de las abejas, la IA puede sugerir criterios como claridad y organización de la información, precisión en la descripción del fenómeno, profundidad de análisis y calidad de la presentación oral o del video de exposición. Es importante destacar que la flexibilidad de la IA nos permite ajustar los criterios según nuestras necesidades. Si inicialmente solicitamos un informe escrito, pero luego decidimos cambiar a una presentación oral y un video de exposición, la IA puede adaptar los criterios de evaluación en consecuencia.

Reflexiones finales

La integración de la Inteligencia Artificial en el ámbito educativo ha demostrado ser una herramienta invaluable para los docentes en la elaboración de consignas de problemas y rúbricas de evaluación. La IA puede ayudar a agilizar y optimizar este proceso, ofreciendo sugerencias y criterios de evaluación adaptados a las necesidades específicas de los estudiantes y los objetivos de aprendizaje. Sin embargo, es crucial tener ciertos recaudos y cuidados al utilizar la IA en este contexto.

En primer lugar, es importante recordar que la IA es una herramienta complementaria al juicio y la experiencia del docente. Si bien puede ofrecer recomendaciones útiles, no sustituye el conocimiento pedagógico del profesor ni su comprensión profunda del contexto educativo y las necesidades de los estudiantes. Por lo tanto, es fundamental que el docente mantenga un papel activo y crítico al utilizar la IA, evaluando y ajustando las sugerencias según considere necesario.

Además, la resolución de problemas en matemáticas no debe limitarse a la mera aplicación mecánica de algoritmos, sino que debe centrarse en el desarrollo de habilidades cognitivas más complejas, como el razonamiento, la argumentación y la comunicación. En este sentido, las consignas de problemas deben diseñarse de manera que fomenten la reflexión y el análisis crítico por parte de los estudiantes, así como la creación de narrativas que evidencien su proceso de pensamiento y comprensión, tal como sugieren Pochulu, Abrate y Ferrero (2016).

Para evaluar adecuadamente estas habilidades, las evaluaciones deben incluir rúbricas que permitan al docente valorar no solo el resultado final, sino también los procesos de pensamiento y las estrategias utilizadas por los estudiantes para resolver los problemas. Aquí es donde la IA puede volver a ser una aliada

del profesor, proporcionando criterios de evaluación detallados y objetivos que faciliten la evaluación de habilidades complejas.

Si bien la IA puede ser de gran ayuda para el diseño de consignas y rúbricas de evaluación, es esencial que los docentes mantengan un enfoque pedagógico centrado en el desarrollo de habilidades cognitivas y en la comprensión profunda de los procesos de aprendizaje de los estudiantes. La IA puede ser una herramienta valiosa en este proceso, siempre y cuando se utilice de manera crítica y reflexiva, en consonancia con los objetivos educativos y las necesidades de los estudiantes. Como mencionó Steve Jobs, la creatividad radica en conectar ideas. En la era actual, contamos con la ayuda de la Inteligencia Artificial para mejorar nuestros diseños de clase, pero es fundamental recordar que esta herramienta es complementaria a nuestra propia inteligencia. Debemos seguir siendo los principales arquitectos de nuestras actividades educativas, asegurándonos de que estén alineadas con los objetivos cognitivos que queremos alcanzar y el contexto específico de nuestros estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Rodríguez, M., Pochulu, M., Barreiro, P., Leonian, P. y Marino, T. (2022). Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática. Ediciones UNGS

Pochulu, M., Abrate, R., y Ferrero, M.C. (2016). Evaluando la comprensión en Matemática Superior mediante narrativas. En M. Insaurralde (Comp.), Enseñar en las universidades y en los Institutos de Formación Docente (pp. 149 – 156). Luján, Argentina: Noveduc.

Pochulu, M. (2018a). Beneficios económicos y eficiencia de conversión en la cría de porcinos. En M. Pochulu (Coord.), La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones (pp. 57-70). Villa María, Argentina: GIDED - UNVM.

Pochulu, M. (2018b). Producción de miel en una colmena después de una enjambrazón. En M. Pochulu (Coord.), La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones (pp. 27-39). Villa María, Argentina: GIDED - UNVM.

Modelización Matemática y Aplicaciones

Dr. Juan NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina

U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina

Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Resumen

La Matemática es una ciencia con tres modos naturales de desarrollo: acumulación progresiva, escalonada y en cortaduras. Si bien cada modo puede ser ilustrado con diferentes ramas de la Matemática, queremos mostrar nuestra idea que la modelización matemática y, por ende, las aplicaciones son naturales en la acumulación progresiva, cuando el estado de la rama matemática en cuestión se ha solidificado y estabilizado. Esto incluye el hecho que, en ocasiones el propio investigador tiene que “construir” las herramientas necesarias para resolver problemas prácticos, y teóricos por supuesto. Todo lo anterior será ejemplificado en el Cálculo Fraccionario.

Transformación de problemas en tareas de modelización matemática

Jaime Andrés CAMAÑO
Universidad de Sucre, Colombia

Introducción

La enseñanza de las matemáticas ha reconocido de manera amplia la formulación y resolución de problemas matemáticos como un elemento crucial. Esta práctica va más allá de la aplicación de algoritmos, ya que tiene el potencial de desarrollar habilidades y competencias matemáticas, así como de fomentar habilidades cognitivas superiores y la transferencia de conocimientos a situaciones de la vida real. En este escrito se realizará un análisis didáctico de una selección de problemas matemáticos destinados a estudiantes de primaria y secundaria, extraídos tanto de textos escolares convencionales como de las directrices educativas establecidas por los Ministerios de Educación de Colombia.

Autores como George Pólya, en "Cómo plantear y resolver problemas", subrayan la importancia de la resolución de problemas no solo como una tarea mecánica, sino como un medio para desarrollar el pensamiento lógico y la comprensión profunda. Jean Piaget, por su parte, aporta una perspectiva del aprendizaje activo, enfatizando que los estudiantes construyen su comprensión matemática a través de la resolución de problemas contextualizados a la vida real.

Realizando una mirada de lo que propone el ministerio de educación nacional de Colombia (1994, p.51) establece que el estudiante debe,

formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas. Ello requiere analizar la situación; identificar lo relevante en ella; establecer relaciones entre sus componentes y con situaciones semejantes; formarse modelos mentales de ella y representarlos externamente en distintos registros.... También, usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo, como medios de validar y rechazar conjeturas, y avanzar en el camino hacia la demostración.

Se enfatiza, que la enseñanza de las matemáticas debe estar en un contexto real, de la vida cotidiana, donde los estudiantes puedan validar diferentes caminos de resolución y toma de decisiones a partir de sus argumentos.

Si se observa el de Argentina el marco nacional para la mejora del aprendizaje en matemáticas (2018, p.11) plantea que es estudiante debe,

desarrollar un conjunto de capacidades y saberes que contribuyen a desarrollar y fortalecer la formación integral a lo largo de toda la vida y promueven la definición autónoma de un proyecto de vida, tal como lo establece el artículo 8 de la Ley 26.206 de Educación Nacional. Estas capacidades y saberes, en algunos casos, tienen aplicaciones en situaciones cotidianas.

El foco de lo que se propone en cada uno de estos diseños curriculares de estos países, se destaca que el propósito de la Enseñanza de las Matemáticas, debe estar centrada en la Resolución de Problemas, la Interdisciplinariedad, Modelización y el uso de las nuevas tecnologías.

Actualmente la enseñanza de las matemáticas se centra en analizar la situación problema, establecer relaciones entre objetos matemáticos y con los usados en campos del saber, formarse modelos mentales y representarlos externamente en distintos registros, justificar decisiones y argumentar. Este último, es un proceso en el que el

docente debe desarrollar, promoviendo la creación de un ambiente de debate y gestionando ciertas condiciones para promoverla.

Para Godino, Batanero, y Vicens (2003, p.36) plantean que;

cuando pedimos a los estudiantes que piensen y razonen sobre las matemáticas y que comuniquen los resultados de su pensamiento a otras personas, de manera oral o escrita, aprenden a ser claros y convincentes. Cuando los estudiantes escuchan las explicaciones de otros compañeros tienen oportunidades de desarrollar sus propias interpretaciones. Los diálogos mediante los que las ideas matemáticas se exploran desde distintas perspectivas ayudan a los participantes a ajustar su pensamiento y hacer conexiones.

Por tanto, cuando los estudiantes participan en debates en las que tienen que justificar sus soluciones, mejoran su comprensión matemática a medida que tienen que persuadir a los demás desde puntos de vista diferentes.

Análisis de tareas

Si tomamos algunas tareas escolares de las que propone el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación en 2022, para grado 5.

2. Catalina tiene una fábrica de champú artesanal. Para elaborar un litro de champú utiliza 150 cm^3 de suavizante. ¿Cuántos cm^3 de suavizante necesita para elaborar 15 litros de champú?

- A. 450 cm^3
- B. 900 cm^3
- C. 2.250 cm^3
- D. 6.750 cm^3

La ausencia de suavizante en las recetas de champú artesanal disponibles en línea revela una brecha entre la práctica común y la información disponible en la web. Esta discrepancia nos invita a reflexionar sobre la importancia de contextualizar los problemas matemáticos en situaciones reales y auténticas. Más allá de simplemente calcular valores numéricos. Por lo tanto, la actividad matemática no solo implica resolver ecuaciones, sino también comprender el contexto en el que se aplican esas ecuaciones, fomentando así habilidades de pensamiento crítico y análisis que son fundamentales en la educación y en el mundo laboral.

En esta primera receta, te enseñamos **como hacer champu casero natural con hierbas**:

Ingredientes

- 15 o 20 nueces de lavado o nueces secas de jabón
- 1 cucharada de fenogreco seco
- 1 cucharada de hojas y flores de hibisco secas
- 1 cucharada de hojas de frambuesa
- 1 cucharada de hojas de menta fresca
- 3 tazas grandes de agua mineral
- 1 limón
- Puedes añadir más hierbas, como el tomillo o el romero (añade 1/2 vaso de agua por cada cucharada de hierbas extra)

Receta para hacer shampoo casero

Antes que nada debes saber que este tipo de shampoo al ser naturales no te van a dar mucha espuma, por lo tanto debes calcular cuanto debes echar en el cabello para que quede todo limpio y esto dependerá de si tu cabello es grueso o delgado.

Ingredientes:

- 300 ml de agua mineral.
- 2 cucharadas de hierbas secas (la elección de estas, dependerá de que tipo de cabello tengas. Más abajo te nombraremos cuales son las plantas que debes utilizar).
- 5 cucharadas de jabón neutro, ten en cuenta que debe ser natural y líquido.
- 1 cucharadita de aceite (puede ser de coco, de almendras o de oliva).

Si reformulamos la consigna, considerando el mismo contexto: ***Catalina tiene una fábrica de champú artesanal. Fundamenta la rentabilidad de este emprendimiento.***

Para resolver esta consigna, es necesario que los estudiantes reflexionen en términos de:

1. ¿Qué tipo de champú artesanal quiero emprender?

- Investigar y analizar diferentes tipos de champús artesanales disponibles en el mercado.
- Considerar las preferencias del mercado y las tendencias actuales en productos para el cuidado del cabello.
- Evaluar los ingredientes disponibles y las posibles combinaciones para crear un producto único y atractivo.

2. ¿Costo de producción del champú?

- Identificar y calcular el costo de cada ingrediente necesario para la producción del champú.
- Estimar los costos adicionales, como envases, etiquetas y otros materiales de empaque.
- Determinar los costos operativos, como el consumo de energía y el tiempo de mano de obra requerido para la producción.

3. Sobre la demanda y el mercado:

- ¿Cuál es la demanda esperada de champú en diferentes tamaños de envase?
- ¿Cuáles son los precios de venta recomendados para maximizar los ingresos y la rentabilidad?
- ¿Qué estrategias de marketing podríamos implementar para aumentar la demanda de nuestro champú artesanal?

4. ¿Cómo se llevará a cabo la producción del champú artesanal?

- Establecer un proceso de producción detallado, desde la adquisición de materias primas hasta el envasado del producto final.
- Identificar los equipos necesarios y calcular los tiempos de producción para cada etapa del proceso.
- Considerar la seguridad y la higiene durante la producción, así como la calidad del producto final.

Tomemos otras tareas escolares de las que propone el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Calidad de la Educación en 2022, para grado 7.

2. Luciana va a tomar un medicamento. Cada mes debe tomar 5 sobres y el tratamiento tiene una duración de 5 meses. Si cada sobre tiene 5 cápsulas, ¿cuántas cápsulas tomará Luciana durante todo el tratamiento?

- A. 1.025
- B. 125
- C. 25
- D. 15

Es importante reconocer que este problema plantea una situación que puede ser poco realista o representativa de situaciones médicas reales. En la práctica médica, los tratamientos suelen ser prescritos de manera precisa y personalizada según las necesidades específicas de cada paciente, teniendo en cuenta factores como la gravedad de la enfermedad, la respuesta individual al medicamento y posibles contraindicaciones. Además, la dosificación de los medicamentos se realiza con base en criterios médicos y farmacológicos sólidos, lo que implica una atención meticulosa a las dosis adecuadas para cada paciente. Por lo tanto, es importante abordar este tipo de problemas con cautela y fomentar la comprensión de la complejidad y la responsabilidad involucradas en el tratamiento médico real.

Si reformulamos la consigna, considerando el mismo contexto: *de Luciana, una paciente que requiere un tratamiento médico optimiza la dosificación del medicamento que deberá tomar Luciana para aliviarse.*

Para resolver esta consigna, es necesario que los estudiantes reflexionen en términos de:

1. **Perfil del paciente:** Proporciona a los estudiantes información detallada sobre el perfil de Luciana, incluyendo su edad, peso, altura, diagnóstico médico y cualquier otra condición relevante para el tratamiento.
2. **Prescripción médica:** Describe la prescripción médica para el tratamiento de Luciana, especificando el medicamento, la dosis recomendada y la frecuencia de administración.
3. **Investigación sobre el medicamento:** Pide a los estudiantes que investiguen el medicamento prescrito, incluyendo su composición, mecanismo de acción, posibles efectos secundarios y cualquier otra información relevante.
4. **Optimización de la dosificación:** Desafía a los estudiantes a calcular la dosis exacta de medicamento que Luciana debe tomar en cada mes del tratamiento, teniendo en cuenta factores como la dosificación recomendada, la duración del tratamiento y las características individuales de Luciana.

5. **Evaluación de la eficacia y seguridad:** Una vez que los estudiantes hayan calculado las dosis para cada mes, pídeles que evalúen la eficacia y la seguridad del tratamiento. ¿Las dosis calculadas están dentro del rango seguro y efectivo para el paciente? ¿Existen riesgos de sobredosis o sub-dosificación?
6. **Reflexiona:** solicita a los estudiantes que proporcionen recomendaciones basadas en sus cálculos y evaluaciones. ¿Debería ajustarse la dosificación del medicamento? ¿Existen medidas adicionales que puedan tomarse para garantizar la eficacia y seguridad del tratamiento?

Reflexiones finales

A modo de cierre, las nuevas tendencias en educación matemática orientan que la forma de generar ambientes genuinos de aprendizajes, en el cual, la matemática cobra sentido, es en contextos reales y no idealizados, por eso es necesario que el profesor tenga en cuenta los siguientes aspectos.

Importancia del análisis didáctico: La primera etapa del proceso involucra un análisis cuidadoso de los problemas matemáticos tradicionales utilizados en la enseñanza primaria y secundaria. Esto es crucial para comprender cómo se presentan los conceptos matemáticos en el currículo escolar y cómo se abordan en los textos educativos.

Transformación hacia la modelización matemática: La siguiente fase implica la transformación de estos problemas en actividades de modelización matemática. Este paso es fundamental para llevar los conceptos matemáticos fuera del contexto puramente académico y conectarlos con situaciones del mundo real. Esta conexión puede aumentar significativamente la relevancia y el interés de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

Integración curricular: La transformación de problemas matemáticos en actividades de modelización matemática permite la integración de conceptos matemáticos con otros contenidos curriculares. Esta interdisciplinariedad no solo enriquece la experiencia educativa de los estudiantes, sino que también refleja la forma en que se aplican las matemáticas en diferentes áreas de la vida.

Enfoque en la aplicabilidad práctica: El objetivo principal de este proceso es resaltar la aplicabilidad práctica de las matemáticas en situaciones reales. Al acercar a los estudiantes a problemáticas contemporáneas y relevantes en su entorno y vida cotidiana, se les brinda la oportunidad de ver cómo las matemáticas pueden utilizarse como una herramienta poderosa para comprender y abordar desafíos del mundo real.

Referencias Bibliográficas

GODINO, J. D., BATANERO, C., & FONT, V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros. Universidad de Granada.

ICFES, (2022). Marco de referencia de la prueba Evaluar Para Avanzar, Matemáticas 5°. Bogotá: Dirección de Evaluación, Icfes.

ICFES, (2022). Marco de referencia de la prueba Evaluar Para Avanzar, matemáticas 7°. Bogotá: Dirección de Evaluación, Icfes.

MECCT (2018), marco nacional para la mejora del aprendizaje en matemática. Hola Ciudad Autónoma de Buenos Aires. Argentina: Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. En Mariana Schmidt Q. (Ed.), *Revolución Educativa* (Primera edición, pp. 46–94).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2006). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas. En Mariana Schmidt Q. (Ed.), *Revolución Educativa* (Primera edición, pp. 46–94). Escribe y Edita. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf

PIAGET, J. (1954). **The Construction of Reality in the Child**. Basic Books

PÓLYA, G. (1945). **How to Solve It**. Princeton University Press.

¿Estamos todos de acuerdo en que las matemáticas son formales?

Dr. Gustavo PACCOSI

Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

Resumen

Más de un matemático de primera línea afirmó que las matemáticas o algunas de sus ramas no son ciencias formales. Así lo describió L. A. Santaló (1911-2001) cuando clasificó a la estadística como una disciplina experimental. También V. I. Arnold (1937-2010), uno de los matemáticos más prolíficos del mundo, fue más allá de Santaló, él afirmó que las matemáticas son parte de la física y que las primeras son el campo de los experimentos más baratos que existe. Desde una posición más radical que las anteriores, A. N. Kolmogorov declaró que el lápiz, el papel, y los garabatos son parte de las matemáticas. La intención de esta exposición será narrar esa otra metodología que conocemos pero que por algún misterio escondemos, será también rastrear motivos para no abandonar esa artificial escisión. Lo haremos en dos escenarios. El primero de ellos es el contexto del cálculo fraccionario. En el segundo escenario nos introducimos en el mundo de los métodos numéricos.

**Momentos del trabajo del profesor de matemática,
en función del rol asumido**

Mabel RODRÍGUEZ

**Universidad Nacional de General Sarmiento
Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina
mrodri@campus.ungs.edu.ar**

Resumen

Presentamos una estructura común a los momentos del trabajo que un profesor de matemática tendrá que recorrer y en los que tomará decisiones, según distintos roles que asuma. A causa de cambios en la sociedad y avances tecnológicos, los roles de un docente se han visto ampliamente modificados respecto del identificado como central, y que condiciona la formación inicial: *enseñar matemática en el nivel medio*. La estructura común referida, es parte de un modelo que, sumado a otros aportes, nos permite argumentar sobre la necesidad de introducir cambios sustantivos en la formación docente.

Palabras clave: Momentos del trabajo docente. Roles del profesor de matemática. Formación de profesores de matemática. Modelo de planos de la formación docente.

Introducción

Hoy en día, en el imaginario de la sociedad, el trabajo de un profesor de matemática se circunscribe a *enseñar la disciplina en la escuela secundaria*. Se concibe ésta como su tarea central, aunque quede claro que debe destinar tiempo -previo a la enseñanza- para la planificación y preparación de materiales, y posterior a ella para la corrección de trabajos de sus estudiantes. Sin embargo, enseñar matemática en la escuela es solo *una* de las tantas tareas que un profesor puede asumir.

En el ámbito de la Educación Matemática, y particularmente la formación de profesores, este es un tema que se ha encarado desde hace años. Basta ver el planteo de González (2000) en donde el autor hace más de veinte años adelantó y alertó sobre los cambios en el tipo de tarea que un profesor tendría que abordar, a causa de diversas situaciones, en particular debido a los efectos de la globalización. A su vez, y como derivación natural, resaltó la importancia de atender a la formación docente.

En este trabajo, comenzamos planteando distintos roles de un profesor de matemática y cómo su tarea ha ido cambiando con el paso del tiempo. Presentamos un modelo que nos permite identificar los momentos del trabajo que un docente ha de realizar, en función del rol que asuma, evidenciando una estructura en común. Finalmente, realizamos la importancia de la *formación inicial* y mencionamos características de planes de estudio existentes en Argentina, a la vez que dejamos mencionadas cuestiones deseables de ser incorporadas o abordadas en ellos.

Desarrollo

En Argentina, la formación inicial de profesores se ofrece en dos subsistemas del nivel superior: el universitario y el terciario. Es así que muchas universidades del país ofrecen carreras de profesorado que forman docentes para enseñar matemática específicamente en el nivel medio y, otras, cuyo alcance incluye, también, la docencia a nivel superior. Por su parte, Institutos de Formación Docente de todo el país, hacen lo propio. Cuando indagamos en los trabajos a los que acceden y se desempeñan los graduados, y los roles que asumen, nos encontramos con una enorme diversidad. Así, por ejemplo, profesores de matemática formados para enseñar la disciplina *en nivel medio* aceptan desafíos laborales tales como:

- Enseñar matemática a nivel superior, en particular en la formación de profesores de nivel medio. Por ejemplo, dictando materias avanzadas de matemática, de Historia de la Matemática (incluso cuando los planes de estudio no hubieran tenido estos espacios), las Prácticas o Residencias Docentes, Didáctica de la Matemática, entre otras.
- Enseñar matemática a nivel superior, en la formación de maestros de nivel primario. En este caso, las instituciones formadoras suelen elegir profesores de matemática, por sobre otros profesionales. Aunque no hayan tenido formación para desempeñarse en el nivel primario y menos aún para abordar la formación de docentes de este nivel, son considerados con el argumento de que, no solo conocen de la disciplina, sino que tienen formación didáctica y pedagógica.
- Enseñar matemática en universidades formando otro tipo de profesionales, ya no docentes, como ingenieros, contadores, arquitectos, técnicos, informáticos, por ejemplo. Aunque el título tenga incumbencias para el nivel medio, las universidades se rigen por sus propios criterios y, en muchas ocasiones, son contratados.
- Capacitar a docentes graduados, en ejercicio. Puede ser tanto a profesores de nivel medio como a maestros. Esto suele darse, con el paso del tiempo, muchas veces inician sumándose a equipos de capacitadores más experimentados entre los cuales se encuentran profesionales con diversas formaciones.
- Redactar textos escolares y/o pautas para docentes, asumir distintas coordinaciones, sumarse a equipos de investigación, etc.

Por otro lado, y pese a esfuerzos individuales y avances de la Educación Matemática, la formación disciplinar en el nivel superior sigue un modelo conductista que Pochulu y Font (2011) denominan mecanicista. Cuando esto ocurre, los futuros docentes aprenden matemática en clases en las que asumen un rol centralmente pasivo, tomando nota de explicaciones y realizando ejercitación similar a la resuelta por el profesor. Hay ausencia de argumentaciones, modelizaciones, resolución de problemas y otros procesos complejos cuyo aprendizaje no puede lograrse mediante modelos de estas características. Esta experiencia contribuye a la conformación de la biografía escolar del futuro profesor la cual incide y modela el rol a asumir cuando ejerza su profesión, como se sabe hace años (basta ver, por ejemplo, Davini, 2015). Sin embargo, como bien expresa la autora

Antes de “decretar” que la formación inicial sea de bajo impacto, cabría cuestionarse cómo han sido formados los estudiantes en este proceso: ¿los contenidos académicos fueron significativos para las prácticas docentes? ¿Tuvieron integración con las prácticas profesionales? ¿Los docentes transmitieron con sus propias prácticas buenos modelos de

enseñanza? ¿Se involucró a los estudiantes en sus aprendizajes y en la autovaloración de sus dificultades y sus logros? ... (p. 23)

Es interesante comprender que los modelos tradicionales de enseñanza tuvieron como sentido, años atrás, *el acceso a la información*. El docente poseía un saber y lo compartía con sus estudiantes. Cuando el acceso a información era complejo, previo a Internet, buscadores académicos, repositorios de acceso abierto, traductores, inteligencia artificial, etc.; este tipo de clases tenía un sentido y era imprescindible como primer paso, previo a desafíos de naturaleza más complejos (como la resolución de problemas o modelización de situaciones). Ahora bien, hoy en día, el acceso a la información está, en la mayoría de los casos, resuelto. Entonces habría que responderse *cuál es el sentido de enseñar matemática hoy*. En cuanto uno aborda esta pregunta, pensándola inicialmente para el nivel medio, rápidamente nos veremos interpelados a trasladar nuestras inquietudes a la formación de profesores. Si años atrás, el sentido de enseñar matemática era facilitar el acceso a la información, clases tradicionales en la formación docente resolvían coherentemente la preparación de los profesores. Hoy, el sentido de enseñar matemática ya no es el pasaje de información, entonces no resulta apropiado sostener una formación de profesores que se centre en el acceso a la información. Esto se enfatiza aún más cuando consideramos que el graduado accederá a otros roles, como los mencionados anteriormente, y sobre lo que volveremos en lo sucesivo.

A modo de ejemplo, en el pasado, la formación matemática de los ingenieros seguía un modelo tradicional. Además, los planes de estudio ofrecían al futuro profesional, primeramente, a las ciencias básicas como matemática, física, química, para, recién años más tarde acercarlos a conocimientos específicos de su profesión. Hoy en día, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI) propone una formación de los ingenieros que, desde todos los espacios disciplinares y desde el inicio de la carrera, promuevan el desarrollo de competencias profesionales de la ingeniería específica elegida (Giordano Lerena y Cirimelo, 2018). Esto provoca, en los profesores, que deban pensar de manera diferente a la tradicional, sus clases. Sin embargo, esto aún no se logra a gran escala, aunque hay muchos avances, estudios e intentos. En parte, nos preguntamos hasta qué punto un profesor de matemática que aprendió a enseñar matemática en el nivel medio, accedió en su formación inicial a conocimientos y herramientas que le permitan atender a los requerimientos que las instituciones le imponen. Así, entendiéndolo que este es solo un ejemplo pero que los roles son muchos y variados, llegamos a cuestionar la formación inicial del profesor, hoy en día.

La complejidad actual para un docente es mucho mayor que en el pasado, no solo por la amplitud de roles que puede asumir en distintos trabajos, sino porque la información (cuyo traspaso de manos antes era el sentido primordial de la enseñanza) hoy en día está al alcance de la mano. En los últimos años Internet y últimamente la inteligencia artificial, han puesto de manifiesto con extrema crudeza la necesidad de cambiar el trabajo en las aulas, y por lo tanto la formación de profesores. Con el avance abrumador de los recursos y tecnologías, el trabajo docente se ve cuestionado, a la vez que resignificado. El docente queda expuesto y se exige ofrecer otro tipo de respuestas que exceden el dar clase de matemática de manera tradicional.

Queremos, ahora, centrarnos en presentar una modelización de los distintos momentos de trabajo que un profesor asume, cuando está en alguno de los roles que asume. El modelo que tomamos aquí, *modelo de planos de la formación* (Rodríguez et al., 2019) y que fue ampliado luego por Rodríguez et al. (2024), tiene la particularidad de dejar en evidencia que puede advertirse una estructura común de tales momentos, más allá del rol asumido.

Más allá de que sugerimos la lectura del primero de los textos mencionados, en este artículo hacemos una presentación diferente de la que se encuentra allí, invitando a pensar en un docente que asumió uno de los roles. Es a partir de ahí que describimos los momentos de trabajo que atravesará. Finalmente, quedará de manifiesto la estructura común a la que venimos aludiendo.

La situación más simple es pensar en un profesor de matemática. Imaginemos un docente que asume el rol de enseñar matemática a nivel medio. Los *momentos del trabajo* que atravesará son los siguientes (entre paréntesis, tomamos la notación presentada en Rodríguez et al., 2019):

- establecer metas, según su posicionamiento sobre la enseñanza, aprendizaje y la propia matemática o bien según las exigencias institucionales (PM1),
- planificar la enseñanza (P1),
- diseñar instrumentos metodológicos (actividades, evaluaciones, guías, otros para evaluar su propio trabajo, etc.) (IM1),
- gestionar la clase (G1),
- reflexionar sobre su propuesta luego de implementada para tender a hacer mejoras (R1).

Cuando un docente asume este rol, decimos (Rodríguez et al., 2019) que *trabaja o está en el plano 1*.

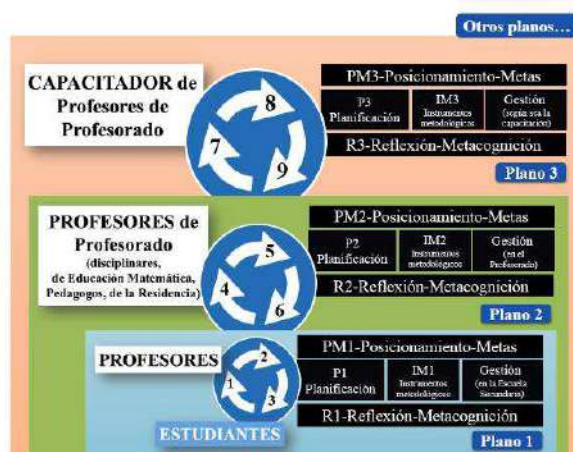
Si, en cambio, un docente enseña en la formación de profesores de matemática, *está en el plano 2*. Esto significa que, teniendo en cuenta que sus estudiantes tendrán los momentos de trabajo descritos en el plano 1, llevará adelante sus momentos de trabajo:

- establecer metas, según su posicionamiento sobre la formación de profesores, y según la especificidad de la disciplina que dicte o bien según las exigencias institucionales (PM2),
- planificar la enseñanza (P2),
- diseñar instrumentos metodológicos (actividades, evaluaciones, guías, otros para evaluar su propio trabajo, etc.) (IM2),
- gestionar la clase (G2),
- reflexionar sobre su propuesta luego de implementada para tender a hacer mejoras (R2).

Como podemos ver, la notación enfatiza el plano en el que el docente desempeña su rol.

De este modo, podemos seguir, considerando roles de capacitación de formadores, por ejemplo. Éstos pondrían al docente en un plano 3 y sus momentos de trabajo serían estructuralmente similares, aunque su contenido sería de naturaleza largamente diferente. Esto último se debe a que, quien capacita a formadores de futuros profesores, considera el trabajo que el formador debe realizar (*plano 2*) el cual, a su vez, está regido por los momentos del trabajo (*plano 1*) de un docente en clases de nivel medio.

Este esquema (Rodríguez, et al., 2019, p. 91) muestra, esquemáticamente lo descripto y deja de manifiesto la estructura común mencionada.



Este modelo que, inicialmente surgió para la formación de profesores, fue extendido a formación de otros profesionales en Rodríguez et al. (2024). Este último trabajo colabora para comprender cómo concebir la formación matemática de futuros ingenieros bajo los requerimientos que el CONFEDI impone en Argentina. Ante esta complejidad, la formación inicial de profesores resulta clave. El cambio en el sentido de enseñar tiempo atrás, respecto de hoy en día, tendría que modificar los momentos de trabajo del plano 1, y por lo tanto los siguientes. Las respuestas que los docentes construyan a la pregunta de *cuál es el sentido de enseñar matemática hoy*, provocarán que se modifique sustantivamente la formación inicial.

Muchos de los planes de estudio de la formación de profesores de matemática en el subsistema universitario inician con una formación disciplinar fuerte, escindida de conocimientos para la práctica profesional, los que se ubican hacia el final de la formación. Por su parte, los institutos terciarios mejoran esta situación, presentando, desde el primer año, una inserción en las escuelas que, anualmente, persigue distintos fines. En ambos casos, los espacios de formación didáctica suelen estar promediando las carreras. En muchos casos, se encuentran presentados y trabajados únicamente contenidos de la teoría didáctica que subyace al diseño curricular de la provincia en la que se sitúa la institución. Esto es una limitación, dado que el futuro profesor desconoce otras perspectivas, lo que lo pone en desventaja para comprender documentos curriculares y ajustarse a requerimientos futuros que le soliciten enmarcarse en otras líneas teóricas. Quedará a su cargo la formación específica para tal fin.

Consideramos que, desde el inicio de la formación de profesores se tendría que abordar (en asignaturas y con modalidades a definir por los equipos):

- la importancia de la búsqueda confiable de información, selección, comprensión y uso adecuado para responder distintas consignas.
- el énfasis en la comprensión de objetos matemáticos asequibles a través de internet, en distintos formatos (escritos o videos, por ejemplo).
- el reconocimiento de las limitaciones de las tecnologías, tanto de utilitarios (aplicaciones, calculadoras, etc.) como de inteligencias artificiales (como el chat GPT) que expresan errores conceptuales.
- la discusión de cuál es el sentido de enseñar matemática hoy en cada nivel.
- el análisis de coherencia entre propuestas y fundamentaciones; posicionamientos y requisitos, etc.

- cómo promover la autonomía de los sujetos que aprendan de mano de los profesores.
- al menos un panorama de otros roles que los profesores podrán asumir y la necesidad de estudiar más allá de la formación inicial recibida y tomar decisiones coherentes para, luego, evaluar los resultados alcanzados.

Aunque podríamos seguir, la intención es delimitar algunas cuestiones que hoy en día no vemos presentes en planes de estudio de carreras de profesorado y que entendemos que son clave para el desempeño profesional idóneo de los docentes.

Esta presentación ofrece un marco para comprender y analizar propuestas de enseñanza que distintos profesores de matemática llevan adelante en distintos planos. Es decir, asumiendo distintos roles y estando frente a distintos sujetos con el rol de estudiantes.

Referencias Bibliográficas

- Davini, M. (2015). *La formación en la práctica docente*. Paidós.
- González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de matemática. Retos de la formación de docentes para el siglo XXI. *Paradigma*, XXI(1), 1-20. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/246>
- Giordano Lerena, R., y Cirimelo, S. (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina. "Libro rojo de CONFEDI"*. Universidad FASTA. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf
- Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia en XIII JAEM-07.
- Pochulu, M., y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(3), 361-394.
- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comp.) (2022). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 1*. UNGS-EDUVIM. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (2024). Desarrollo profesional para docentes de matemática superior: un encuadre teórico y una propuesta. *Cuadernos de investigación y formación en educación*, 17(1), 35-50. Universidad de Costa Rica.
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Fierro, M. (2019). Modelo de planos de formación docente para abordar distintos roles del profesor de matemática. *Revista Electrónica De Divulgación De Metodologías Emergentes En El Desarrollo De Las STEM*, 1(1), 84-103. <http://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/95>

La comprensión de objetos geométricos con nuevos recursos

Estefanía CALVO

Universidad Nacional de Villa María

Arturo Jauretche 1555, Villa María, Córdoba, Argentina

ecalvo@unvm.edu.ar

Resumen

En este trabajo, se propone una aproximación innovadora al enseñar geometría en los primeros años de la escuela secundaria, ofreciendo ideas para desarrollar y aplicar una secuencia didáctica respaldada por Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC). El objetivo principal es fomentar y examinar la comprensión de los estudiantes en esta área del conocimiento.

La intención es incentivar a los estudiantes durante su proceso de aprendizaje, facilitando la comprensión autónoma de conceptos geométricos y estimulando su interés por descubrir y explorar. Simultáneamente, se busca enriquecer la práctica pedagógica de los docentes, proporcionándoles herramientas innovadoras para su labor educativa.

En este sentido, se presentarán una serie de actividades donde el juego Euclídea desempeña un papel central. Este recurso, basado en la geometría euclidiana, brinda una plataforma interactiva que promueve el aprendizaje a través de la resolución de problemas y la experimentación.

Además, se mostrará cómo, a través de los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele, se puede evaluar la comprensión de los estudiantes. Estos niveles, que van desde el reconocimiento de figuras hasta la capacidad de deducir propiedades y realizar demostraciones, permiten identificar el nivel de desarrollo del pensamiento geométrico de cada alumno.

En síntesis, ofrecemos una idea para realizar una propuesta innovadora para enseñar geometría en la escuela secundaria, utilizando las TIC y estrategias centradas en el estudiante para promover una comprensión profunda y significativa de los conceptos geométricos.

Palabras clave: Geometría. TIC. Educación Secundaria. Comprensión.

Introducción

La Geometría fue y es de suma importancia en el desarrollo de la humanidad. Podemos encontrar en ella aplicaciones ligadas tanto a la resolución de problemas cotidianos como también a la creación artística.

En estas dimensiones múltiples de la Geometría conviven dos polos: el empírico, donde se encuentran la percepción, la intuición, la visualización y la condición instrumental de la Geometría; y el teórico, el cual se relaciona con los aspectos abstractos, conceptuales, deductivos, formales y rigurosos de la Geometría como ciencia. Estos polos son opuestos, pero además dependientes, y no es posible hacer Geometría prescindiendo de uno de ellos.

Euclides (325 a. C. - 265 a. C.) fue uno de los principales motores para el desarrollo de la Geometría, y a partir de su libro “Elementos” esta disciplina comienza a ser vista como un sistema axiomático de carácter deductivo. Aunque este tratado racionaliza y abstrae a la misma, contiene muchos elementos de intuición y percepción.

Como siempre se ha visto en los diseños curriculares de la formación de nivel medio en Argentina, la Geometría es una de las ramas de la Matemática que se espera ocupe un lugar privilegiado en la enseñanza, debido a su aporte a la formación del individuo, desde sus diferentes dimensiones. Cuando nos enfrentamos a un problema de Geometría, adquirimos conocimientos y experiencias que son de naturaleza matemática, aunque no estén representados en lenguaje matemático.

En la actualidad, se comienzan a efectuar cambios importantes en la educación ya que las demandas al sistema escolar refieren al desarrollo de nuevas competencias, necesarias para una sociedad de la comunicación e información globalizada. El uso de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en la educación son un apoyo significativo tanto en el proceso enseñanza como también en el de aprendizaje, debido a que presentan diferentes recursos audiovisuales que permiten la interacción y búsqueda de múltiples contenidos. Esto permite, que los estudiantes desarrollen diferentes habilidades, destrezas y aprendizajes por la variedad de estímulos que se le presentan. Esta es una de tantas razones por las que resulta fundamental incluir en las clases de Matemática secuencias didácticas enfocadas a enfatizar en los procesos de razonamiento teórico, sin dejar de lado los procesos de intuición y percepción de nuestros estudiantes, promoviendo el uso de recursos que conviven con ellos.

Proponemos que las secuencias didácticas de Geometría contengan actividades que promuevan:

- Estudiar propiedades espaciales
- Conjeturar acerca de propiedades de objetos geométricos obtenidos por exploración o a partir de diversas representaciones bidimensionales, tridimensionales y en perspectiva
- Explicar y justificar propiedades geométricas usando reglas lógicas
- Usar la Geometría como herramienta para comprender reglas y operaciones aritméticas
- Resolver problemas usando figuras geométricas

El dinamismo que permite el uso de TIC puede ser de gran ayuda para que los estudiantes comprendan esta disciplina como una actividad humana y social, relacionándola con la cultura, la Historia, el Arte, la Filosofía y la Ciencia.

Asimismo, la importancia de las TIC se manifiesta en ámbitos laborales, educativos, culturales y sociales, generando nuevas formas de trabajo, nuevos recursos educativos y procesos de enseñanza y aprendizaje innovadores.

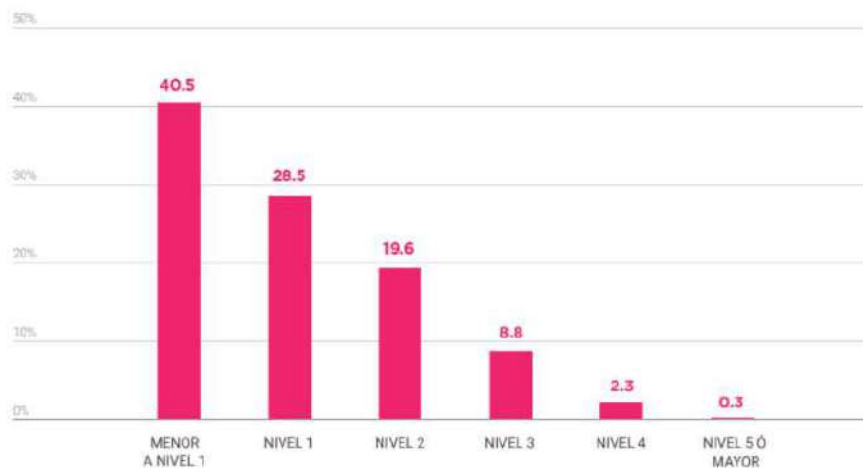
Problema

Sabemos que, periódicamente, Argentina participa en estudios y programas regionales e internacionales de evaluación de los aprendizajes como complemento de las evaluaciones que se desarrollan anualmente en el país por parte de la Secretaría de Evaluación Educativa del Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación. Algunas de las evaluaciones en las que participa nuestro país son las pruebas PISA, APRENDER, entre otras.

Los resultados de estas pruebas aseguran que Argentina tiene problemas relevantes para poder hacer que los estudiantes dominen puntos básicos de la Matemática. Los siguientes gráficos, comunican claramente la diferencia entre los estudiantes que alcanzan el nivel más bajo, con aquellos que alcanzan el nivel más alto.

Resultados prueba PISA 2018

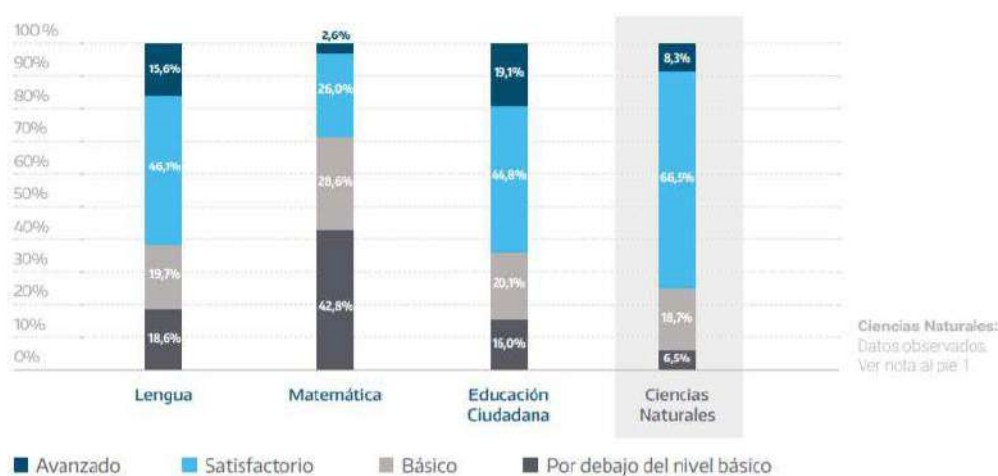
GRÁFICO 6.4. Porcentaje de estudiantes por nivel de desempeño en Matemática



Nota: OCDE, datos de PISA 2018

(https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/argentina_en_pisa_2018_informe_de_resultados.pdf)

Resultado pruebas APRENDER 2019



Nota: Evaluación Aprender 2019, DEE-REFCEE | DiNEIEE | SEIE | Ministerio de Educación de la Nación

(https://www.argentina.gob.ar/sites/default/files/evaluacion_educacion_secundaria_argentina_2019.pdf)

Autores como Abrate et al. (2006) señalan que algunos docentes priorizan, en la enseñanza de la Matemática otros contenidos y van desplazando los de Geometría hacia el final del curso. Esto provoca, por falta de tiempo, prescindir de su enseñanza en muchos cursos del nivel medio. Por lo tanto, es importante replantear nuestras clases y realizarnos preguntas como, por ejemplo: ¿cómo podemos integrar recursos tecnológicos en el aula para lograr que los estudiantes aprendan de manera autónoma y entretenida?, ¿cómo ayudan las TIC a comprender conceptos y propiedades relacionados con Geometría?, ¿de qué manera los nuevos recursos y el trabajo colaborativo potencian las competencias matemáticas y de trabajo en equipo en los estudiantes?

Propuesta

El aprendizaje de la Geometría ofrece excelentes oportunidades para establecer relaciones con otros ámbitos, ya que además de favorecer el desarrollo de competencias matemáticas y lingüísticas (al explicar procesos), se conecta con el mundo físico, la naturaleza, el arte, etc. Lograr trabajar este eje a través de un proyecto innovador y de interés para los estudiantes, realizando actividades colaborativas (conformando una comunidad matemática) y con una secuencia que involucre el uso de recursos tecnológicos, permitirá motivarlos a trabajar de manera autónoma, logrando incorporar propiedades geométricas que son tan útiles para desarrollar competencias fundamentales en el área, y a la vez, que puedan encontrarle utilidad al uso de estas competencias.

La incorporación en la enseñanza de la Matemática -y de la Geometría en particular- de un juego como Euclídea, es una fortaleza. El mismo está basado en el programa educativo GeoGebra, y según Sánchez (2003), este *software* posee un conjunto de atributos que resultan especialmente adecuados si se busca potenciar capacidades matemáticas en los estudiantes, como ser:

- Constructividad: facultad de construir nuevos escenarios a partir de la combinación de objetos en espacio y tiempo.
- Navegabilidad: posibilidad de explorar de manera libre y flexible.
- Interactividad: provee al usuario retroalimentación en tiempo real, además de adaptar o modificar dinámicamente su comportamiento en función de los eventos e información recibida.
- Calidad de contenido: fiabilidad, relevancia, organización y accesibilidad de la información que contiene el *software*, que adicionalmente puede ser adaptada a diversos tipos de audiencia.
- Interfaz: pantalla con la que el aprendiz interactúa, que captura su atención, guía sus acciones y refleja el estado del sistema.

Antes de comenzar a trabajar con la secuencia didáctica (la cual se puede mirar completa en el siguiente [link](#)), se deberá realizar un diagnóstico para saber qué conocimientos tienen los estudiantes, explicando, de ser necesario, definiciones básicas como las de punto, recta y circunferencia, las cuales son fundamentales para que se pueda comenzar a comprender construcciones geométricas. Una vez realizado esto, se comienza a trabajar con el juego Euclídea. Si bien el mismo cuenta con 120 problemas geométricos agrupados en 15 niveles diferentes, el docente puede decidir hasta qué nivel quiere llegar, en función de los conocimientos que deben adquirir los estudiantes.

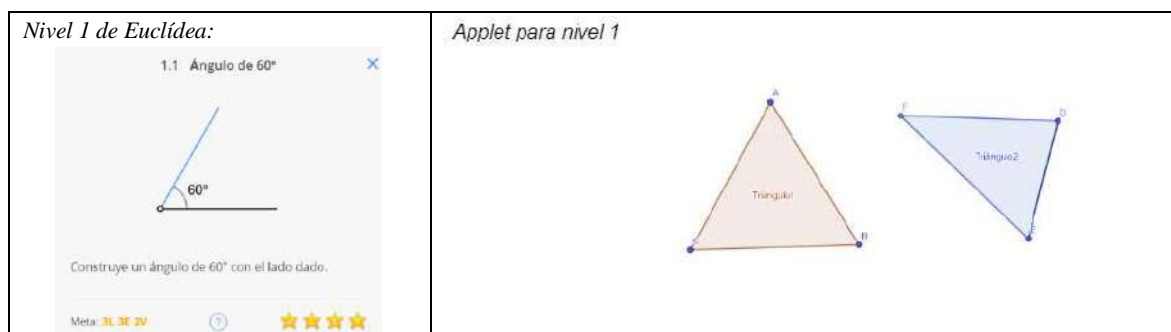
Euclídea es un juego en el que se trata de representar construcciones geométricas usando “regla y compás” tratando de que, en cada uno de los desafíos, se logre encontrar la solución más óptima, ya sea con herramientas básicas como también con las nuevas herramientas que se van desbloqueando con el avance del juego.

Lo interesante del juego, es que, para dominar algún concepto nuevo, hay que empezar desde el principio y el mismo programa lo guiará a través de los conceptos básicos, como bisectrices, mediatrices, rectas paralelas y perpendiculares, etc., ofreciendo posteriormente tareas con mayor complejidad como rectas tangentes internas/externas, los hexágonos regulares, etc. convirtiéndose en un verdadero desafío incluso para aquellos con experiencia en la construcción euclidiana.

A diferencia de las construcciones geométricas que se pueden dibujar en papel, las construcciones del juego son inherentemente dinámicas. Para los estudiantes es una forma divertida de obtener una comprensión más profunda de las construcciones que se realizan.

Se quiere destacar, que con el juego no sólo aprendemos de propiedades geométricas, sino que también otras actividades cognitivas. Como afirma Buckingham (2016), “jugar en la computadora involucra una amplia serie de actividades cognitivas: recordar, poner a prueba hipótesis, pronosticar y hacer planificación estratégica” (p.4).

Luego de cada nivel del juego, para analizar la comprensión de los estudiantes, la secuencia contiene un cuestionario de Google, en donde además de preguntas comunes para todos los niveles, se enlaza a un applet de GeoGebra, en donde ellos debían analizar diferentes construcciones con herramientas básicas, fundamentando las respuestas. Por ejemplo, en el nivel 1 del juego, es necesario construir un ángulo de 60° , y en el recurso del cuestionario deben decidir cuál o cuáles de los ángulos de los triángulos 1 y 2 son de 60° , justificando la respuesta utilizando conceptos geométricos como se muestra en las siguientes figuras:



Cabe destacar, que los estudiantes sólo cuentan con la herramienta recta y circunferencia, ya que las demás son ocultas para que no puedan utilizarlas.

Para poder evaluar la comprensión por parte de los estudiantes luego de la secuencia trabajada, se pueden utilizar los niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele. Como afirma Jaime (1993), este modelo explica cómo se desarrolla el razonamiento geométrico de estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: visualización, análisis, inferencia informal, inferencia formal y rigurosa. Éstos se repiten con cada nuevo aprendizaje. El estudiante se encuentra en un cierto nivel al inicio de sus estudios y luego de ciertos procesos pasa al siguiente nivel. El modelo de Van Hiele también muestra formas de ayudar a los estudiantes a mejorar la calidad de su razonamiento, y puede considerarse para organizar un plan de estudios favoreciendo que los estudiantes desarrollen el razonamiento geométrico. Además, este modelo ofrece cinco etapas de aprendizaje que guían a los profesores en el diseño y la organización de experiencias de aprendizaje que se adapten al progreso de los estudiantes a medida que avanzan de nivel. Las fases de aprendizaje correspondientes al Modelo de Van Hiele son fase 1 (información), fase 2 (orientación dirigida), fase 3 (explicitación), fase 4 (orientación libre) y fase 5 (integración).

Sabiendo que las TIC son herramientas que están presentes, cada vez más, en la vida cotidiana de todas las personas, los docentes tenemos la responsabilidad de educar tecnológicamente, involucrándolas para enriquecer nuestras prácticas de enseñanza. Los cambios a los cuales estamos expuestos, exigen repensar y rediseñar las propuestas de enseñanza actuales para trabajarlas con tecnologías digitales. El proceso de reconstrucción de la enseñanza es crucial para generar cambios que se mantengan en el tiempo.

Como se sabe, existen infinidad de recursos a disposición de docentes y estudiantes, y la utilización de cada uno de ellos está motivada por necesidades concretas. Se encuentran programas, pizarras, redes sociales, nubes, juegos, etc. que pueden ser utilizados de formas muy diferentes, siendo beneficiosos para los docentes y, sobre todo, para los estudiantes. La aplicación de estos recursos debe tener un objetivo pedagógico y didáctico específico, pero el docente tiene que estar preparado para mediar entre el recurso y los aprendizajes de sus estudiantes, adelantándose a posibles soluciones y dificultades que puedan surgir.

La propuesta muestra la potencialidad de las TIC cuando se incorporan a proyectos educativos pensados, diseñados e implementados en función de objetivos pedagógicos valiosos. Además, abre nuevas puertas para seguir avanzando en el uso de las tecnologías digitales para promover un aprendizaje significativo de la Geometría y de otras áreas de interés.

Teniendo en cuenta que los estudiantes con los que se trabajó con la secuencia son de segundo año de la escuela secundaria, y que sus conocimientos en Geometría eran muy pocos (solo algunos de ellos lograban identificar algunas figuras), encontrándose todos en el nivel 0 de razonamiento de Van Hiele, se concluyó que luego de las actividades, algunos de ellos habían alcanzado el nivel 2 de razonamiento pudiendo enumerar los elementos utilizados para la construcción, fundamentando con un lenguaje apropiado y pudiendo distinguir si existía más de una solución al problema. Estos estudiantes fueron capaces de elaborar una definición y utilizaron propiedades y características para reconocer la figura, aunque su razonamiento lógico todavía se basa en la manipulación. Otro grupo aún mayor que el anterior alcanzó el nivel 1 de razonamiento geométrico, con un lenguaje menos específico que los que alcanzaron el nivel 3, pero estableciendo algunas propiedades de las figuras a través de la experimentación y manipulación, sin poder elaborar definiciones. El resto del grupo se mantiene en el nivel 0 de razonamiento, enumerando los elementos utilizados para realizar la construcción, pero siendo poco claros a la hora de fundamentar y mostrando no comprender si existe más de una solución al problema (confundiendo cantidad de soluciones con caminos para llegar a estas).

En la ponencia se mostrarán partes de la secuencia y algunos de los resultados obtenidos.

Referencias Bibliográficas

- Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en matemática: análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Universidad Nacional de Villa María. http://biblio.unvm.edu.ar/opac_css/index.php?lvl=cmspage&pageid=9&id_notice=11025
- Buckingham, D. (3-4 de marzo de 2006). *La educación para los medios en la era de la tecnología digital*. [Ponencia]. Congreso del décimo aniversario de MED "La sapienza di comunicare". Università Di Roma "La Sapienza". <https://lboro.academia.edu/DavidBuckingham>
- Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías en el plano. La Evaluación del nivel de razonamiento* [Tesis Doctoral]. Universidad de Valencia. <https://www.uv.es/angel.gutierrez/archivos1/textospdf/Jai93.pdf>
- Sánchez, E. (2003). La demostración en geometría y los procesos de reconfiguración: una experiencia en un ambiente de geometría dinámica. *Educación Matemática*, 15(2), 27-53. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40515202.pdf>

Consideraciones para el diseño de una propuesta didáctica de un curso inicial de Álgebra para la formación docente

Gustavo CARNELLI

Universidad Nacional de General Sarmiento

Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines, Buenos Aires, Argentina
gcarnelli@campus.ungs.edu.ar

Resumen

Una de las principales actividades de la tarea docente es el diseño de propuestas didácticas. Planteamos y desarrollamos aquí algunas consideraciones para el caso de un curso inicial de álgebra en la formación docente y explicitamos las decisiones tomadas en función de los destinatarios. A partir de ciertas tradiciones en la enseñanza de esta asignatura –como que lógica sea el tema inicial–, tomamos tres asuntos: el tratamiento de los conjuntos numéricos y los polinomios, el de las estructuras algebraicas y el de la lógica.

Sobre el primer tema nos planteamos y damos una respuesta acerca de cuáles son los asuntos que interesan estudiar en cada campo numérico y con los polinomios. Además, nos interesa tener en cuenta su relación con la matemática escolar.

En cuanto a las estructuras algebraicas destacamos la importancia de estudiar variedad de conjuntos y operaciones que comparten propiedades, lo que da sentido a pensar en una estructura común, para luego ver propiedades que se cumplen en ella y, finalmente, volver a los ejemplos.

Por último, en cuanto a la lógica, desarrollamos algunas ideas que no consideran que el conocimiento de sus nociones está a priori para el estudio del álgebra, sino que se trabajan junto con lo algebraico; en particular, nos detenemos en el trabajo con el condicional, que consideramos prioritario para comprender el quehacer matemático.

Creemos que estas consideraciones desarrolladas son un aporte porque, entre otras cosas, integran lo matemático con lo didáctico, lo que resulta valioso para la formación docente.

Palabras clave: Álgebra. Propuesta didáctica. Formación docente. Lógica.

Introducción

El diseño de la propuesta de enseñanza de cada una de las asignaturas que nos toca dar en nuestra actividad docente es una tarea de gran importancia que, en ocasiones, no está suficientemente valorada debido a que se considera que puede resolverse siguiendo un libro de texto. Nos interesa desarrollar aquí las decisiones sobre aspectos didáctico-matemáticos y matemáticos que hemos tomado al diseñar nuestra propuesta de enseñanza para Álgebra I. En particular, vamos a precisar cómo estas decisiones están pensadas en función de que la enseñanza está destinada a estudiantes de formación docente en Matemática.

La asignatura Álgebra forma parte del primer año de la carrera de Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (y de la de Educación Superior) del Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González, es de dictado anual, con 6 horas cátedra semanales. En el nivel superior, las principales prescripciones están dadas en el plan de estudios de la carrera, mientras que en el nivel secundario esto se da en los diseños y documentos curriculares. Otro elemento contextual que entendemos relevante mencionar es la tradición institucional en el dictado de la asignatura, si la hubiera. En este caso, sí: varias décadas de un enfoque de la enseñanza basado en lo que presenta un cierto libro de texto. Si bien esto se ha ido dejando de lado paulatinamente, aún sigue vigente en varias de las cátedras. De modo sintético, destacamos algunos elementos de ese enfoque tradicional que, además, nos han impulsado pensar una propuesta distinta.

- ◆ el estudio de la lógica como punto de partida de la propuesta.

La enseñanza del Álgebra comienza por la presentación y la ejemplificación de diversas nociones de lógica que se usarán en los temas siguientes, por lo que funcionan como conocimientos previos: entre ellas, proposiciones y funciones proposicionales, operaciones con proposiciones, leyes lógicas y razonamientos. Subyace la idea de que para aprender matemática es necesario saber lógica. Podemos rotular a esta idea como *La lógica primero*. Más adelante explicamos cuál es nuestra idea al respecto. Solo a modo de anticipo, podemos ilustrarlo con un ejemplo. Si en una clase propusiéramos decidir acerca de la veracidad del enunciado *Si un número entero es múltiplo de 6 entonces es múltiplo 12*, pretendemos que la respuesta sea del siguiente tipo: el enunciado es falso ya que de saber que un número es múltiplo de 6 no se desprende necesariamente que sea también de 12; por ejemplo, 18 cumple la condición dada (ser múltiplo de 6) pero no lo que afirma (ser múltiplo de 12). Con esto queremos decir que esperamos un análisis completamente matemático. Bajo la idea de *La lógica primero*, la respuesta esperada es la siguiente: si el número es 18, el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, lo que hace que el enunciado sea falso, por la tabla de verdad del condicional.

- ◆ lejanía con la matemática escolar.

En este enfoque tradicional no hay puentes con la matemática escolar, a pesar de que se estudian los conjuntos numéricos y los polinomios y de que se trata de una asignatura de primer año. Para nosotros resulta importante retomar los asuntos del campo algebraico que se estudian en la secundaria, por varios motivos. Si la asignatura tiende puentes con los temas escolares, brindará a los futuros docentes elementos para pensar su enseñanza y no dejarlo a cargo solo de los espacios curriculares de la didáctica de la matemática o postergado para el ejercicio de la profesión. Creemos, además, que así se evita la conocida disociación entre materias disciplinares y materias de educación.

- ◆ las estructuras algebraicas aparecen sin anclaje en ejemplos de conjuntos y operaciones conocidas.

Las nociones de grupo, anillo y cuerpo son presentadas directamente, para luego exhibir ejemplos de conjuntos y operaciones (usuales y no usuales) que verifican las propiedades indicadas. Podemos exponer dos motivos por lo que no acordamos con este enfoque. Uno es porque se va en contra de la construcción histórica del conocimiento matemático, donde las estructuras aparecieron mucho después de que se trabajara con los distintos tipos de números, las operaciones usuales y sus propiedades. Esta elección está identificada con lo que Ernest (2000) llama filosofía absolutista del conocimiento matemático. El otro motivo es porque de esa manera no se le da sentido a la noción. Se pierde la oportunidad de ver que distintos conjuntos y operaciones definidas en ellos que se conocen (no solo del campo del álgebra sino también del cálculo y de la geometría) tienen las mismas propiedades y, entonces, tiene sentido pensar en una estructura común, aun siendo objetos matemáticos distintos (números, polinomios, funciones y movimientos). En la noción de estructura algebraica se manifiesta claramente la pretensión de generalizar que caracteriza al conocimiento matemático que, de la otra manera, permanece oculta.

Tomamos estos elementos de ese enfoque clásico, porque nos da pie para explicar por qué pensamos que puede diseñarse una propuesta matemática y didácticamente valiosa para docentes en formación. Nos limitaremos aquí a dar precisiones acerca de tres grandes asuntos: el tratamiento de los conjuntos numéricos y los polinomios, el tratamiento de las estructuras algebraicas y el tratamiento de la lógica.

Al momento del diseño, como primer paso debemos considerar lo que dice el plan de estudios, especialmente en lo que hace a la fundamentación, a los contenidos mínimos y a los objetivos de la asignatura. Por razones de espacio omitimos desarrollar esto aquí. Solo para que se conozca qué asuntos se tratan, indicamos que estos

son los conjuntos numéricos, los polinomios, la lógica y los conjuntos, las relaciones entre conjuntos y las estructuras algebraicas.

El tratamiento de los conjuntos numéricos y los polinomios

Antes de desarrollar lo relativo a los conjuntos numéricos y los polinomios, hacemos una mención que también atañe al diseño de la propuesta didáctica, pero en otro plano. Hemos secuenciado los contenidos –nos referimos a los grandes títulos– en dos pasadas por ellos. Recorremos todos los grandes temas en una primera pasada y, luego, volvemos a recorrerlos. Como criterio general, los asuntos más complejos, con más carga teórica y/o más abstractos, los vemos en la segunda pasada. Esta idea, tomada inicialmente de El Hasi et al. (1996), la aplicamos desde hace ya varios años en un curso de Cálculo Diferencial e Integral en funciones de una variable (la asignatura Análisis Matemático I de la misma carrera) y un desarrollo sobre cómo está pensado puede verse en Carnelli (2022).

Recordemos que cuando hablamos de los conjuntos numéricos en estos contextos hacemos referencia a los naturales, a los enteros, a los racionales, a los reales y a los complejos. Al momento de pensar su enseñanza, lo primero que nos preguntamos es cuál es su sentido en la matemática. ¿Por qué está este tema en la matemática y entre lo que desarrolla esta materia? ¿Qué problemas aborda y resuelve? Estas preguntas podrían tener respuestas más o menos amplias según desde qué marco se piensen. En nuestro caso, pensamos que hay que situarlas en la enseñanza inicial del nivel superior y sin perder de vista al nivel secundario y, además, teniendo en cuenta que el plan de estudios de la carrera tiene Álgebra III, asignatura que avanza sobre el tratamiento de los conjuntos numéricos, con otra profundidad (por ejemplo, con las distintas formas de definir al número real). Comentamos, por ser importante, aunque inabordable en este trabajo, que durante el proceso de diseño de la propuesta consultamos textos de álgebra y producciones académicas acerca de su enseñanza y aprendizaje. Algunas producciones que revisamos fueron las de Arcavi (1995), Gentile (2011), Sánchez (2014), Krick (2017) y Sessa (2005). A continuación, desarrollamos cómo hemos pensado la enseñanza de esta asignatura. Solo mencionamos los temas que nos parecen apropiados para que se comprenda lo que se pretende, por lo que dejamos de lado, varios otros que también se trabajan en las clases.

Números naturales: ¿Qué asuntos interesan con los números naturales? La combinatoria y el principio de inducción.

En la primera pasada por el tema trabajamos problemas de combinatoria, pero sin fórmulas ni mención a combinaciones o variaciones. Los problemas se resuelven usando como técnicas de conteo los diagramas de árbol y las casillas. En la segunda pasada hablamos del número combinatorio, de combinaciones y variaciones y comparamos cómo un mismo problema se resuelve con y sin fórmulas. Estamos convencidos de que así tendrán elementos para pensar y decidir cómo enseñar combinatoria en la escuela cuando les toque hacerlo.

Sobre el principio de inducción, asumimos que los tiempos que podemos asignarle son insuficientes para una buena comprensión del tema. Entonces, en primer lugar, lo vemos en la segunda pasada ya que será más accesible para estudiantes con más recorrido realizado. Y lo abordamos de la siguiente manera: planteamos situaciones concretas en las que hay que hallar una fórmula para el paso n ésimo (como el clásico problema de sumar los primeros cien naturales) y, luego, vemos una forma de probar la validez de esa fórmula por inducción. Nos limitamos a situaciones sencillas.

Números enteros: ¿Qué asuntos interesan con los números enteros? La divisibilidad.

En la primera pasada, tomamos como conocimientos previos a los criterios usuales de divisibilidad, la noción de número primo y a las formas usuales de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo. A partir de ahí avanzamos con el algoritmo de división, el teorema fundamental de la aritmética, las expresiones algebraicas de los múltiplos de un cierto natural y de los enteros que tienen cierto resto al dividirse por cierto natural, entre otras cosas.

En la segunda visita del tema, vemos el algoritmo de Euclides (antes quedaron expresadas las limitaciones de los métodos conocidos), analizamos y demostramos propiedades de los divisores en vínculo con la suma y el producto. También presentamos la noción de congruencia, que trabajamos incipientemente y demostramos los criterios de divisibilidad, usando y sin usar congruencias.

Algo que discutimos en las clases es que todo lo relativo a la divisibilidad en la escuela puede estar limitado a los naturales.

Números racionales: ¿Qué asuntos interesan con los racionales? La forma decimal y la forma fraccionaria y los vínculos entre ellas.

Nos ocupamos primero de ver a las fracciones en distintos funcionamientos: como reparto, como medida, como probabilidad y como constante de proporcionalidad. Incluimos la forma decimal de los racionales y la noción

de densidad. Todos estos asuntos son de tratamiento en la escolaridad, incluso algunos en la primaria; de todos modos, su estudio conjunto aporta una visión integral sobre estos números y esto es lo que es de interés para el nivel superior. Además, pueden proponerse actividades que no resultan triviales para estudiantes avanzados. Hay numerosas cuestiones de interés en este tema: representar exactamente en la recta real, justificar las reglas de pasaje de decimal a fracción, comparar 0, $\frac{9}{10}$ y 1, probar que entre dos racionales hay otro, comparar racionales (eligiendo convenientemente trabajar con fracciones o con decimales), por qué la expresión decimal de una fracción es finita o periódica y cuántas cifras puede tener ese período, etc. En el segundo encuentro con el tema, vemos cómo decidir qué tipo de desarrollo decimal tiene una fracción (sin conocer su expresión decimal).

Números reales: ¿Qué asuntos interesan con los reales? Acá entendemos que lo principal del tema es asunto del Análisis Matemático, por la completitud, y de Álgebra III, como dijimos. Entonces, nos ocupamos de trabajar con los irracionales, clasificar, ordenar y comparar números reales, ver las distintas formas de representación de un número, las aproximaciones, discutir resolución de inecuaciones, ver logaritmos como una operación, etc. Acá hay numerosos asuntos que podemos tratar, vinculados a la operatoria y que tiene presencia en la escolaridad. Listamos algunos: la definición de radicación con índice par, relación de $\sqrt{x^2}$ y $|x|$, la justificación de los pasajes de términos, factores y potencias, etc. Para todos estos asuntos recurrimos a bibliografía escolar en donde discutimos acerca de imprecisiones y aún errores que suelen aparecer.

Números complejos: ¿Qué asuntos interesan con los complejos? Este conjunto numérico es el único que no asumimos como conocido de la escolaridad secundaria, por lo que se trata del primer acercamiento. Con el interés dado por resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$, sin solución en reales, el tratamiento que damos es bastante amplio, pero más independiente de la matemática escolar. Entre los principales asuntos que trabajamos es la operatoria en forma binómica y trigonométrica, la resolución de ecuaciones (y su comparación con resolverlas en reales), y la radicación y los logaritmos (y su comparación con las nociones en reales).

Hay un último asunto de estos cinco conjuntos numéricos que no hemos mencionado: la definición formal de cada uno de ellos. Pensamos que esto es suficientemente abstracto como para poner en duda que estudiantes iniciales pueden comprenderlo (nos referimos a grupos completos; estudiantes aventajados seguramente podrán alcanzarlo). Por lo tanto, lo trabajamos casi a la manera de “información”. No obstante, discutimos las definiciones no formales. Por ejemplo, para los racionales, vemos la definición como cociente de enteros, como cociente de entero por natural y la formal como clases de equivalencias. Asumimos –y lo transmitimos– que las definiciones no formales resultan plenamente satisfactorias para buena parte del trabajo matemático que se hace en la carrera. De paso, nos preguntamos con cuáles de ellas nos quedaríamos si tuviéramos que darlo en la escuela secundaria.

Polinomios: ¿Qué asuntos interesan con los polinomios? Resolver ecuaciones polinómicas y factorizar polinomios.

Acá se pone de manifiesto una decisión muy relevante que aparece cada vez que como docentes tenemos que enseñar una materia. ¿Por dónde empezar? ¿Con qué tema arrancar y con qué profundidad? A grandes rasgos, hay dos formas de responder esto, en general. Partir de algo conocido, para avanzar a partir de ahí, o partir de algo completamente nuevo. No dudamos en tomar la primera de las opciones; lo haríamos también en cualquier otro caso. Reconocemos una –posible– desventaja. Con estudiantes que se inician en el nivel superior y que encuentran en los primeros tiempos de cursada de su primer año grandes dificultades para responder a las exigencias, una decisión de este tipo podría abonar en ese sentido. Sin embargo, consideramos que esto va a depender de cómo se traten esos temas. Si lo hacemos con intenciones “fundacionales” (con el mensaje generalmente implícito de que no saben estos temas y ahora los van a aprender), posiblemente sumemos posibles frustraciones; pero, si lo hacemos con la intención de discutir aquello que se sabe de un modo incompleto, con errores y dificultades, para revisarlo y construir nuevos conocimientos, creemos que la posibilidad de lograr aprendizajes más sólidos y estables se acrecienta.

Bajo esta idea, el primer tema de la propuesta es la resolución de ecuaciones polinómicas. Acá revisamos cuestiones de las ecuaciones cuadráticas como distintas técnicas de resolución para pasar luego a las de grado superior (en reales) que puedan ser resolubles con los conocidos casos clásicos de factorización o con el algoritmo de división y el teorema de Gauss. Esto nos permite discutir los alcances de una y otra técnica.

En la segunda pasada por el tema, tratamos a los polinomios. Ahí hacemos un recorrido que puede considerarse típico, con atención a la factorización. Además, retomamos la resolución de ecuaciones polinómicas, ahora con el conocimiento de los complejos.

El tratamiento de las estructuras algebraicas

No mencionamos que en cada uno de los conjuntos numéricos analizamos las propiedades de la suma y el producto y de alguna otra operación, como podría ser el máximo común divisor de dos enteros definida en algún conjunto apropiado.

Para el tratamiento de las estructuras algebraicas, que vemos como último tema y que no tiene dos recorridos, seguimos este camino:

- disponemos de una serie de conjuntos con operaciones definidas en ellos que tienen ciertas propiedades (conjuntos numéricos y polinomios);
- también disponemos de conjuntos de otra naturaleza que lo numérico o los polinomios (ejemplos de otros campos de la matemática) con operaciones definidas en ellos y que tienen ciertas propiedades (por ejemplo, funciones biyectivas con la composición, movimientos con la composición);
- por lo tanto, tenemos diversos conjuntos con operaciones que gozan de las mismas propiedades, lo que da sentido a pensar en una estructura común (consideramos que es central la diversidad del tipo de conjuntos); - definida la estructura (grupo, anillo o cuerpo), estudiamos algunos ejemplos de propiedades que se cumplen en ella;
- por último, volvemos a los ejemplos conocidos a ver cómo se expresan esas propiedades y a ver que en otros conjuntos que no tienen esa estructura, esas propiedades no se cumplen.

El tratamiento de la lógica

Dejamos para el final una temática que nos parece muy interesante compartir. Más arriba dijimos que no compartimos la idea que llamamos *La lógica primero* y lo fundamentamos brevemente. Entendemos que es significativo compartir que el hecho de pensar una forma distinta de trabajar la lógica está motivado por nuestra actividad de investigación de hace unos años en la Universidad Nacional de General Sarmiento. Pueden verse algunos avances en Barreiro et al. (2012a), Barreiro et al. (2012b), Carnelli et al. (2018) y Carnelli et al. (2017). De todos los asuntos que mencionamos que se pretenden desarrollar del tema, hay uno que consideramos que está muy por encima de todos en importancia: el condicional. Entender el condicional es central para comprender y realizar el trabajo matemático. La tabla de verdad postula los valores de verdad del condicional según los valores de verdad del antecedente y del consecuente y da el mismo estatus a las cuatro combinaciones (cada una es un renglón de la tabla). Sin embargo, en el quehacer matemático importan solo los dos casos en que el antecedente es verdadero, ya que casi nunca el antecedente es falso (más adelante retomamos esto). Al hacer matemática establecemos condiciones (¿qué ocurre si considero que vale que ...?) y razonamos a partir de ese supuesto. Por ejemplo, si tenemos un polinomio con coeficientes reales de grado 3, ¿qué podemos afirmar acerca de sus raíces reales? Explorando, investigando, podemos ver que al menos una es real, que pueden no ser todas reales y podemos justificarlo. Entonces, podemos decir que el enunciado *Si un polinomio con coeficientes reales es de grado 3 entonces tiene exactamente tres raíces reales* es falso y también podemos decir que el enunciado *Si un polinomio con coeficientes reales es de grado 3 entonces tiene al menos una raíz real* es verdadero. Siempre el antecedente es verdadero pues nuestro interés está en estudiar qué ocurre bajo esa condición.

Nuestra propuesta es trabajar el condicional, desde la matemática, a lo largo de todo el curso y siempre en contextos matemáticos. No acordamos con los abordajes basados en situaciones cotidianas (el típico *Si llueve entonces voy al cine*), pues pensamos que no aporta, sino que obtura a la comprensión del condicional en matemática (si llovió y fui al cine, es esperable que la gente crea que mentí y no es cuestión de concluir que la gente razona mal). De todos modos, nos parece importante comentar y analizar estos abordajes.

Recién hacia el final, presentamos las nociones lógicas, como cierre. Ejemplificamos esta idea de insistir con el condicional en todos los temas, con varias actividades que mostramos en el apartado siguiente.

Volviendo a lo que dejamos inconcluso: ¿cuándo ocurre que el antecedente es falso en el quehacer matemático? Muy pocas veces... Se nos ocurren algunas. Cuando queremos probar que una relación es simétrica o transitiva o antisimétrica, nos podemos encontrar con antecedentes falsos. Otro ejemplo más interesante. La definición de inclusión (amplia) de conjuntos es la siguiente: $\forall A \forall B: A \subseteq B \leftrightarrow \forall x: (x \in A \rightarrow x \in B)$. El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto; podemos decir que queremos que eso pase o, mejor dicho, que si en la definición anterior $A = \emptyset$ y B es cualquier conjunto, debería cumplirse. Estamos ante un caso de antecedente falso –y consecuente verdadero o falso según cuáles sean x y B – y necesitamos que el condicional sea verdadero. Acá tenemos una forma de justificar, desde la matemática, que el condicional con antecedente falso es verdadero.

Ejemplos de actividades

A continuación, mostramos algunos ejemplos de actividades trabajadas a lo largo del año. Están reorganizadas, recortadas y subsumidas, por razones de extensión.

1- Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa. Justificar

- (a) Existen números impares cuya suma es un número primo
- (b) No existen números que sean múltiplos de 7 y de 11
- (c) Algunos números enteros que son múltiplos de 8 son múltiplos de 4
- (d) Ningún número entero es primo y múltiplo de 3
- (e) No existen números primos entre 120 y 130
- (f) Si un número es racional entonces es real
- (g) Todo número racional es entero

2- Todas las siguientes afirmaciones son falsas. Justificarlas

- (a) Si un número es entero entonces su opuesto es negativo
- (b) Si un número entero no es múltiplo de 6 entonces es impar
- (c) Si un número entero es múltiplo de 4 o de 3 entonces es par
- (d) Si un número entero es divisible por 3 entonces es par o primo

3- (a) ¿Es cierto que si un número entero es primo entonces su siguiente no lo es?

(b) ¿Es cierto que si un polinomio con coeficientes reales no tiene raíces reales entonces es irreducible en $R[x]$?

4- Decidir si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso. Justificar.

- (a) Si una ecuación cuadrática tiene soluciones reales entonces su discriminante es mayor que 0.
- (b) Si una ecuación cuadrática tiene soluciones reales entonces su discriminante es mayor o igual que 0.
- (c) Si \sqrt{a} es un número irracional entonces a es número primo
- (d) No existen valores reales de a para los cuales $\sqrt[3]{a}$ es un número entero negativo

5- En cada caso, indicar –si es posible concluir– si el elemento x pertenece al conjunto A o que el elemento x no pertenece al conjunto A :

- (a) Si $x \in \bar{A}$ entonces
- (b) Si $x \notin \bar{A}$ entonces
- (c) Si $x \in A \cup B$ entonces
- (d) Si $x \in A \cap B$ entonces

6- Para cada una de las siguientes situaciones, formular una conjetura acerca de su valor y demostrarla.

- (a) Número combinatorio con el denominador igual a 1
- (b) Número combinatorio con numerador y denominador iguales
- (c) Un par de números combinatorios con igual numerador y cuyos denominadores suman el numerador (los llamamos *combinatorios complementarios*)

7- Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa:

- (a) Es necesario que una relación sea reflexiva para que sea de equivalencia
- (b) Es suficiente que una relación sea de equivalencia para que sea simétrica

8- El enunciado “Dado un número real positivo, su cuadrado es mayor que él” es falso. Justificar su falsedad. Luego, dar todos los contraejemplos y, finalmente, reformular el enunciado para que sea verdadero

9- Demostrar la veracidad de cada uno de los siguientes enunciados:

- (a) 1 divide a cualquier entero
- (b) Si un número entero es distinto de 0 entonces divide a 0
- (c) Si dos números enteros son uno par y el otro impar entonces su producto es par
- (d) Si un número es entero entonces es par o impar
- (e) Si un número entero es múltiplo de 7 entonces su cuadrado también lo es

10- Los siguientes enunciados están expresados simbólicamente. Expresarlos en lenguaje natural y analizar su validez.

- (a) $\forall a \forall b: ([a = 2k(k \in Z) \wedge b = 3t(t \in Z)] \rightarrow a \cdot b = 6p(p \in Z))$
- (b) $\forall x:$
- (c) $\forall x: (x \in R \rightarrow |x| = |-x|)$
- (d) $\forall A \forall B: (A \subseteq A \cup B)$
- (e) $\forall A: (\bar{\bar{A}} \cap A = \phi)$
- (f) $\forall x \exists y: ((x \in R \wedge y \in R) \rightarrow y > x)$

Consideraciones finales

La intención principal de este trabajo fue explicar los elementos principales de una propuesta de enseñanza de una asignatura inicial del nivel superior que está dirigida a docentes de Matemática en formación. Quisimos destacar que pueden diseñarse propuestas propias, distintas de las que circulan y que esa tarea es fundamental

y específica de profesionales de la docencia. También quisimos destacar que lo que circula (textos, otras propuestas) pueden ser inspiradoras de las propias (en nuestro caso fue por oposición).

Creemos que la secuenciación de contenidos en dos grandes momentos es una idea que puede ser útil para pensar otras asignaturas, aún del ámbito escolar. Una de sus ventajas que no mencionamos, es que favorece volver sobre los temas, retomarlos, evitando así que haya temas que quedan en el olvido porque no vuelven a ser objeto de estudio. En el nivel secundario esto puede ser particularmente valioso.

Nos detuvimos a explicar por qué no tomamos la idea de *La lógica primero*. Podemos agregar algo más a lo que ya dijimos: se corre el riesgo de que quienes cursan una asignatura bajo esa idea piensen que no se puede hacer matemática sin saber lógica (desde la lógica). Más aun, que se piense que para estudiar cualquier materia de la carrera sea necesario eso. Está de más decir que consideramos necesario trabajar las nociones de lógica – y en todas las asignaturas de matemática, no solo las que lo tienen como tema–; lo que hay que decidir es cómo trabajarlas.

En este asunto nos hemos limitado en explicarlo a partir del estudio del condicional, porque pensamos que es lo central a desarrollar para aprender matemática y que se necesita mucho trabajo para su comprensión. Como explicamos, la veracidad del condicional según el valor de verdad del antecedente y del consecuente la decidimos desde la matemática, no por una tabla de verdad.

Cerramos con un comentario. Las decisiones didácticas principales que tomamos en el diseño las incluimos como objeto de discusión en las clases. Entendemos que esto es muy importante para los destinatarios en dos direcciones: como estudiantes, porque ayuda a entender que muchos de los errores usuales que cometen tienen cierta lógica y son fértiles didácticamente; y como futuros docentes, que no hay formas únicas de enseñar un tema, lo que evita la propensión a replicar las formas de enseñanza recibidas por verlas como únicas opciones posibles.

Referencias Bibliográficas

- Arcavi, A. (1995). El Sentido de los Símbolos: Generación de Intuiciones en la Matemática formal. *Actas de las VII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*, 77-83.
- Barreiro, P., Carnelli, G., Falsetti, M., & Leonian, P. (2012a). Diseño e implementación de actividades para el razonamiento en Matemática con estudiantes pre-universitarios. *Memorias de las VIII Jornadas de Material Didáctico y Experiencias Innovadoras en Educación Superior: Ciclo Básico Común. Universidad de Buenos Aires*.
- Barreiro, P., Carnelli, G., Falsetti, M., & Leonian, P. (2012b) Un marco metodológico para estudiar el razonamiento inferencial en Matemática. *Actas del XII Simposio de Educación Matemática. Edumat*.
- Carnelli, G. (2022). Secuenciación de contenidos: una propuesta alternativa para la enseñanza del Cálculo. *Urania*, 13, 12-21.
- Carnelli, G., Falsetti, M., & Sarni, M. (2018). Dispositivo para el seguimiento del aprendizaje de la inferencia directa en Matemática. *Actas del XIII Congreso Argentino de Educación Matemática. CAREM*.
- Carnelli, G., Falsetti, M., & Sarni, M. (2017). Razonamiento condicional en el contexto del aprendizaje de números racionales a nivel preuniversitario: aportes de la teoría de modelos mentales. *Actas de la XI Reunión de Educación Matemática*.
- El Hasi, C., Falsetti, M., Kulesz, L., & Rodríguez, M. (1996). Nuevo enfoque para un curso universitario de Cálculo Diferencial e Integral. *Reunión de Educación Matemática*.
- Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: una perspectiva filosófica. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 23, 9-28.
- Gentile, E. (2011). *Fascículo 22. Cursos y seminarios de matemática. Notas de Álgebra* [Archivo PDF]. <https://cms.dm.uba.ar/depto/public/A/serieA22.pdf>
- Krick, T. (2017). *Fascículo 9. Cursos de grado. Álgebra I* [Archivo PDF]. https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/1ercuat2017/algebra_I/Algebra1-2017.pdf
- Plan Curricular Institucional. Profesorado de Educación Secundaria en Matemática (2014). Res 2014/3986 MEGC. http://institutojvgonzalez.buenosaires.edu.ar/archivos/planes/pci_matematica4_resol_2_2016.pdf
- Rojo, A. (1996). *Álgebra I*. El Ateneo.
- Sánchez, C. (2014). *Fascículo 6. Cursos de grado. Lecciones de Álgebra* [Archivo PDF]. <https://cms.dm.uba.ar/depto/public/grado/fascgrado6.pdf>
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio del Álgebra. Orígenes y perspectivas*. Libros del Zorzal.

**Reflexiones sobre un curso de educación matemática
destinado a docentes del nivel superior**

Fabian ESPINOZA

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, 25 de mayo 1995,
Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina
rrfespinoza@exa.unne.edu.ar**

Resumen

Este trabajo consiste en la presentación general y fundamentación de las características instrumentales, pedagógicas y didácticas de la planificación inicial de un curso destinado a docentes de matemática del nivel superior que forman distintos profesionales. Su modalidad fue virtual asincrónica, con aulas tutorizadas por equipos docentes especializados, implementándose a lo largo de 10 semanas, durante 40 horas reloj de duración.

La propuesta de desarrollo profesional fue ofrecida por la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina, a través de una convocatoria del Instituto Nacional de Formación Docente del Ministerio de Educación de la Nación.

El sustento teórico empleado para el diseño estructural de la capacitación es una ampliación de un modelo existente, el denominado Modelo de planos para la formación docente. Además, como complemento para su desarrollo, se usó de encuadre otras dos líneas teóricas ampliamente difundidas de la Educación Matemática: la Resolución de Problemas y la Modelización Matemática.

El posicionamiento adoptado, las metas, planificación, instrumentos y gestión se dirigen a la promoción de mejoras en las prácticas docentes para que sus estudiantes, futuros profesionales, puedan desenvolverse con solvencia en lo que atañe a cuestiones matemáticas en su ámbito de trabajo.

Palabras clave: Desarrollo profesional docente. Modelo de planos de formación. Resolución de Problemas. Modelización matemática. Educación matemática.

Introducción

Las instancias de desarrollo profesional docente, sin dudas presentan una alta complejidad para quienes las tienen a su cargo. Por su parte, los docentes que asisten tienen altas expectativas y suelen ser críticos de las propuestas recibidas.

Desde la Educación Matemática varios trabajos muestran experiencias transitadas o sugieren consideraciones para tener en cuenta por quienes son responsables de diseñarlas y llevarlas adelante (Contreras y Climent, 1999; Llinares, 2007; González-Weil, et al., 2014; Lima Díaz, 2019).

En esta presentación compartimos decisiones que hemos tomado para diseñar e implementar un curso de desarrollo profesional docente cuyos destinatarios fueron docentes de matemática del nivel superior. El encuadre teórico subyacente a este trabajo es el modelo de planos ampliado (Rodríguez et al., 2024) y la Resolución de Problemas y Modelización Matemática como enfoques específicos de Educación Matemática (ver, por ejemplo, Pochulu y Rodríguez, 2012 y Rodríguez et al., 2022).

Iniciamos este escrito con un apartado que describe las características centrales de la planificación del curso, luego detallamos el tipo de actividad que propusimos a los docentes para, finalmente, señalar tipos de respuesta obtenidos y las intervenciones que, a propósito, propusimos. En la conferencia ampliaremos con otros ejemplos y en el escrito Post-SEM se encontrarán evidencias explícitas del modelo de planos ampliado mencionado.

Sobre la planificación del curso

Para la planificación del curso se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos generales.

Los destinatarios son graduados que ejercen la docencia en el nivel superior, con cargas laborales muy dispares, por lo que se organizó la propuesta de manera asincrónica a través de un aula virtual de la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina (UNNE).

Los *objetivos* de la capacitación están relacionados con los siguientes aspectos:

- Búsqueda, selección y utilización de manera adecuada de bibliografía sobre Educación Matemática pertinente para los contenidos que se enseñan en el nivel superior.
- Diseño y fundamento de propuestas de enseñanza encuadradas en el enfoque de Resolución de Problemas y Modelización Matemática.
- Empleo adecuado de elementos de la Educación Matemática para la planificación y fundamentación de la enseñanza de la matemática.

Los *contenidos* adoptados son:

- *Cuestiones metodológicas para diseñar la enseñanza de la matemática en el nivel superior*: consignas matemáticas, metacognitivas, tareas, coherencia de tareas, gestión de la clase e intervenciones docentes. La planificación de la enseñanza: foco en contenidos, en desarrollo de habilidades o competencias matemáticas, etc. Objetivos, propósitos y posicionamientos.
- *La resolución de problemas en clases de matemática del nivel superior*: concepto de problema, uso de los problemas en clase, diseño de la enseñanza (rol del docente, estudiante, evaluación, etc.), heurísticas, metacognición.
- *La modelización matemática en clases de matemática del nivel superior*: fases de la modelización matemática, uso de la modelización en clase, uso pertinente de las TIC.

Metodológicamente se fueron activando encuentros, semanalmente, en el aula virtual, que se organizaron estimando una dedicación de los asistentes de cuatro horas. Los cursantes accedieron a materiales de estudio, referencias del tema y consignas de trabajo. Esto fue ofrecido en diferentes soportes: textos, videos, presentaciones audiovisuales, foros, etc. Los intercambios y las interacciones entre los asistentes y con el docente se encauzaron por foros, mensajería interna o mail.

Los encuentros plantearon trabajos individuales y/o grupales, de discusión, intercambios y reflexión sobre sus propias prácticas, a la luz de los materiales teóricos acercados.

La *evaluación* de los participantes fue de tipo formativa, con entregas periódicas (grupales o individuales, escritas o en video) y un trabajo final. Éste contempló dar lugar a mejoras de entregas anteriores, así como a una reflexión individual. La presentación fue solicitada por escrito y la fundamentación de las mejoras, en video.

Con respecto a la *bibliografía* destinada a los cursantes, si bien hemos promovido la autonomía en la búsqueda y selección de materiales pertinentes, ofrecimos para todos los contenidos abordados, una mínima y actualizada referencia teórica y metodológica.

Para la *reflexión y evaluación* de la propuesta, por parte del equipo que la diseñó y gestionó, tanto a lo largo de la implementación como a posteriori, hemos mantenido reuniones periódicas para hacer un seguimiento de la capacitación en términos de: participación, cumplimiento de las tareas, calidad de las producciones de los asistentes. En función de lo observado fuimos ajustando el trabajo planteado.

Sobre las tareas propuestas

El curso está alojado en el Aula Virtual de la UNNE, en la plataforma Moodle. Hemos diseñado el aula habilitando distintas secciones: presentación del equipo responsable, foro de presentación de los asistentes, avisos y consultas generales. Las propuestas de trabajo fueron habilitadas semanalmente en solapas.

La presentación de los docentes asistentes incluyó rasgos destacados de sus trayectos de formación profesional y desempeños laborales actuales, lo que aportó elementos para ajustar el diseño de la planificación de la propuesta.

Se han seleccionado tres tipos de consignas para abordar el curso, las que tienen que ver con cuestiones metodológicas, Resolución de Problemas y Modelización Matemática.

En relación con las tareas de contenido metodológico

Durante las primeras semanas del desarrollo de la capacitación, como puede observarse más abajo a partir de la consigna expuesta, se ha puesto el foco en el diseño de consignas y tareas, al mismo tiempo que sugerimos la lectura del capítulo 2 de Rodríguez et al., 2022, para empezar a comprender el significado de estos conceptos y disponer de ejemplos.

Específicamente, el trabajo se orientó a la apropiación de una clasificación en consignas matemáticas, consignas metacognitivas y criterios para su redacción de modo de aumentar el potencial matemático (Rodríguez et al., 2022). Las tareas se entienden como una terna coherente entre contexto, objetivo y consigna y en el material se ofrece un modo para advertir la coherencia. El diseño de tareas y redacción apropiada de consignas matemáticas y metacognitivas, con alto potencial matemático, son actividades que un docente debe saber realizar.

1. Seleccionar una consigna de matemática que utilicen en alguna clase de matemática de nivel superior. Preséntela tal como está redactada. Hagan un análisis de la consigna en términos de los criterios para redactar consignas. Propongan una mejora del enunciado, si fuera necesario y fundamenten qué aspectos consideran que mejoraron.
2. Presentar una "tarea coherente" que tenga a la consigna mejorada como uno de sus componentes (es decir, determinar un posible contexto y objetivo). Argumentar sobre su coherencia.

En relación con las tareas enmarcadas en la Resolución de Problemas

Comenzamos compartiendo en el aula virtual materiales escritos y en video con encuadres teóricos y ejemplos (Pochulu y Rodríguez, 2012).

Luego propusimos a los docentes asistentes la identificación de heurísticas que podrían poner en juego sus estudiantes ante la resolución de un problema diseñado por aquellos (exponemos más abajo la consigna).

La identificación de heurísticas es clave para el momento de la gestión de la clase y el diseño es relevante dado que, si la consigna no produce un bloqueo inicial en los resolutores, su elección no habrá sido apropiada y el docente deberá darse cuenta de esto.

Consigna 2

Diseñar una tarea que contenga un posible problema para sus estudiantes. Expresar: contexto, objetivo y la consigna (el problema).

Identificar posibles heurísticas, exhibiendo evidencias de ellas tanto en resoluciones en papel y lápiz como con uso de TIC.

Forma de trabajo: trabajo individual

Extensión máxima: 2 carillas

Fecha de entrega: desde el 08/11/22 hasta el 14/11/22

En relación con las tareas enmarcadas en la Modelización Matemática

Luego de acceder a lecturas previas sobre Modelización Matemática, por ejemplo, Pochulu (2018), Rodríguez, Pochulu y Espinoza (2022), videos y búsquedas personales, como puede apreciarse más abajo, propusimos una actividad que promueve la identificación de consignas pertinentes para favorecer la enseñanza de la modelización matemática, diferenciándolas de otras que no cumplen con este requerimiento, pudiendo argumentar por qué en cada caso. Esta es una tarea propia de la labor docente.

Consigna 1

Para poner en práctica lo que han estudiado sobre Modelización Matemática, les proponemos la siguiente consigna:

Buscar dos ejemplos de actividades disponibles en libros de texto o internet con el siguiente criterio:

- uno que plantee una actividad de modelización
- otro que aparente plantear una actividad de modelización pero que en realidad no lo sea.

Argumentar, en cada caso, la elección.

Forma de trabajo: Individual, se entrega por el sitio abierto para tal fin.

Entregar: el enunciado, el sitio o texto de donde fue extraído y la argumentación.

Extensión máxima: 2 carillas (estimar no más de una carilla por actividad).

Fecha de entrega: desde el 22/11/22 hasta el 28/11/22

Sobre el trabajo desarrollado por los asistentes y nuestras devoluciones

En muchas de las devoluciones que hemos realizado, simplemente presentamos comentarios y preguntas. Solo en los casos donde la consigna no fue respondida o donde encontramos alguna cuestión posible de ser mejorada, solicitamos una reelaboración del trabajo. La intención es dejar inquietudes, invitarlos a interactuar, preguntar, fundamentar, etc.

En relación con el primer tipo de tareas propuestas, las que tienen que ver con cuestiones metodológicas generales, advertir la falta de coherencia, el bajo potencial matemático o la inadecuada redacción de las consignas no les resultó tarea sencilla. Los puntos clave de la devolución focalizan en: la pertinencia o no de incluir pautas para el desarrollo de las tareas, el pedido de justificación de lo realizado y la promoción de la exploración y la argumentación, aspectos que favorecen aumentar el potencial matemático de una consigna.

Sobre las tareas enmarcadas en la resolución de problemas, en general hemos detectado que a los participantes les cuesta identificar heurísticas, que las que identifican están casi siempre presentadas de manera simbólica y formal y que proponen problemas con el propósito de hacer emerger un contenido de enseñanza, lo cual no responde al planteamiento del enfoque teórico de encuadre. Ante estas dificultades les solicitamos reconocer qué falta, qué es correcto, qué han malinterpretado, etc., gestión que favorece la reflexión y retroalimentación de las propuestas.

Con respecto a las consignas enmarcadas en la modelización matemática, hemos detectado dificultades que tienen que ver con la justificación de aquellas situaciones factibles de favorecer un proceso de modelización o en la elección de una situación que pretende ser de modelización y no lo es. Ante estos errores, les solicitamos analizar los requisitos que deberían cumplir las situaciones de modelización, retomando las cuestiones teóricas. Además, los invitamos a analizar las diferencias existentes entre los procesos de resolución de problemas y modelización, dado que también hemos encontrado varias dificultades en este aspecto.

Como mencionamos al inicio, en la conferencia ampliaremos la ejemplificación y en el escrito Post-SEM las referencias teóricas que sustentan el trabajo realizado.

Referencias Bibliográficas

- Contreras, L. y Climent, N. (Eds.) (1999). *El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática*. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática*. Granada: Editorial Universidad de Granada.
- González-Weil, C., Gómez Waring, M., Ahumada Albayay, G., Bravo González, P., Salinas Tapia, E., Avilés Cisternas, D., Pérez, J. L., & Santana Valenzuela, J. (2014). *Principios de Desarrollo Profesional Docente construidos por y para Profesores de Ciencia: una propuesta sustentable que emerge desde la indagación de las propias prácticas*. *Estudios pedagógicos*, 40(Especial), 105-126.
<https://www.scielo.cl/pdf/estped/v40nEspecial/art07.pdf>
- Lima Díaz, I. (2019). *Desarrollo profesional del profesor de matemáticas: Estudio de caso en el nivel medio de secundaria*. [Tesis de Doctorado]. Universidad Nacional de La Plata.
<http://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/tesis/te.1771/te.1771.pd>
- Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia en XIII JAEM-07.
- Pochulu, M. (Comp.). (2018). *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones*. Villa María, Argentina: GIDED - UNVM. <http://gided.unvm.edu.ar/index.php/book/la-modelizacion-en-matematica-marco-de-referencia-y-aplicaciones/>

- Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comp.) (2012). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Vol. 1, UNGS-EDUVIM. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>
- Rodríguez, M. (coord). (2022). Barreiro, P. Leonian, P. Marino, T. Pochulu, M. y Rodríguez, M. *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Ediciones UNGS. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306324_completo.pdf
- Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (comp.) (2022). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Vol. 2. UNGS. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306133_completo1.pdf

Conhecimento Pedagógico do professor de Matemática e sua influência no desenvolvimento do Pensamento Matemático

Claudia Lisete OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil
Claudiag1959@gmail.com

Resumen

Reflexionar sobre la formación de los profesores de Matemática implica discutir las características que definen al docente como un profesional interesado y capaz de crear y adaptar métodos pedagógicos a su entorno de trabajo, utilizando los conocimientos matemáticos para comprender el mundo que le rodea y despertando en el alumno el hábito del estudio independiente, la creatividad, la persistencia en la solución de problemas, el interés por conocer su entorno laboral y a sus alumnos, así como el hábito de reflexionar sobre su labor docente, buscando caminos que conduzcan a una educación de calidad. Se entiende que la formación de profesores de Matemática implica integrar diversos tipos de conocimientos, la teórica de la disciplina que implica conocer los conceptos matemáticos, la didáctica y metodológica de cómo enseñar dichos conceptos y también cómo los estudiantes aprenden estos conceptos, así como las relaciones entre el currículo escolar y la realidad educativa. En este sentido, es importante que la formación inicial permita a los estudiantes tener la oportunidad de desarrollar las habilidades que les permitan actuar como profesionales capaces de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Esta conferencia tiene como objetivo discutir la formación inicial como un proceso de discusión, reflexión y desarrollo de competencias/habilidades que son fundamentales para los docentes que enseñan Matemática en todos los niveles educativos. Se presentarán los resultados de un estudio de caso, con estudiantes del Grado en Matemáticas y el desarrollo de un Diseño Instruccional (DI) y cómo este posibilita el desarrollo de dichas habilidades, utilizando metodologías que posibilitan la formación del pensamiento matemático. Se observa que los Lineamientos Curriculares, en lo Brasil indican que los profesionales formados en cursos de Matemática deben tener una visión integral del rol social del educador, apertura a la adquisición y uso de nuevas ideas y tecnologías, visión histórica y crítica de las Matemáticas, capacidad para continuar aprendiendo y trabajar en equipos multidisciplinarios, habilidad para comunicarse matemáticamente y comprender las Matemáticas, establecer relaciones con otras áreas del conocimiento, utilizar el conocimiento para comprender el mundo que les rodea, la capacidad de crear y adaptar métodos pedagógicos a su entorno de trabajo, de expresarse de forma clara, precisa y objetiva.

Palabras clave: Educación Matemática. Formación de Profesores. Conocimientos didáctico-pedagógicos.

Transformando la Enseñanza de Matemáticas con Juegos: Resultados de una Formación Continuada de Profesores

Helcio SOARES PADILHA Junior

Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil

helcio.padilha@rede.ulbra.br

Resumen

Este estudio combina el análisis del uso de juegos y actividades lúdicas en la enseñanza de Matemáticas, destacando su alineación con la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget. Investigando la formación continua de profesores en Jaguariáiva, Brasil, evidencia cómo estas estrategias pedagógicas innovadoras transforman las prácticas docentes y aumentan el compromiso de los estudiantes. Los resultados, basados en metodologías cualitativas como cuestionarios y observaciones, subrayan los cambios positivos en el aprendizaje matemático, haciendo énfasis en la importancia de la experimentación concreta y la asimilación activa. Se resalta la eficacia de los juegos educativos matemáticos, adaptados a diferentes etapas cognitivas, en promover un aprendizaje más intuitivo y motivador. Este enfoque lúdico, respaldado por testimonios de profesores participantes, demuestra ser clave para la enseñanza significativa de Matemáticas, recomendando su difusión a través de la formación docente para enfrentar los desafíos educativos del siglo XXI.

Palabras clave: Educación Matemática. Juegos. Formación de Profesores.

Introducción

Acertar y fallar, ganar y perder. La dinámica de los juegos captura la atención de los niños, convirtiéndose en un auxiliar significativo para el profesor en la enseñanza de Matemáticas. En este contexto, presentamos a los lectores una perspectiva sobre la formación de profesores llevada a cabo en el municipio de Jaguaraiá, Brasil, que se centró en el desarrollo profesional de los docentes respecto al método de enseñanza de Matemáticas, valorizando el uso de juegos (Padilha Junior, 2023).

El estudio adoptó una metodología cualitativa, haciendo uso de cuestionarios, informes, testimonios, planes de clases y observación de la práctica docente antes, durante y después del proceso de formación. Los hallazgos revelan que la formación profesional continua es crucial para mejorar las prácticas de enseñanza, la metodología y los métodos de evaluación en el área de Matemáticas para los primeros años de la Educación Primaria. Asimismo, se encontró que la adopción de prácticas de enseñanza basadas en el aprendizaje significativo de Matemáticas, especialmente mediante el uso de juegos, contribuyó a mejorar los resultados cualitativos del aprendizaje de los estudiantes. La investigación subraya la importancia de programas de formación que tomen en cuenta las particularidades de cada etapa de la educación básica, las teorías de aprendizaje y las condiciones laborales de los docentes, fundamentándose teóricamente en autores como Gatti, Tardif, Imbernón, D'Ambrósio y Libâneo (Padilha Junior, 2023).

Como contribución a este artículo, consideramos que la integración de la teoría de Piaget (1964) en el contexto de la formación docente ofrece una valiosa perspectiva sobre el desarrollo de estrategias pedagógicas innovadoras, en especial para la enseñanza de Matemáticas. El énfasis de Piaget (1964) en el aprendizaje activo y el uso de juegos como medios para el desarrollo cognitivo se alinea perfectamente con los objetivos de la formación docente, dirigidos a promover una educación matemática más atractiva y efectiva.

Para Piaget, el juego simbólico y los juegos de reglas son cruciales en la asimilación de los niños a su entorno, favoreciendo la adaptación y el aprendizaje a través de la imitación y la experimentación. En el marco de la formación docente, esto sugiere la necesidad de crear ambientes de aprendizaje que valoren e integren estas actividades lúdicas, facilitando así el desarrollo cognitivo de los estudiantes.

La teoría de Piaget proporciona un marco teórico sólido para la formación docente, especialmente en lo que respecta a la enseñanza de Matemáticas, puesto que la formación se enfocó en este desarrollo. Comprendiendo cómo los niños aprenden y se desarrollan, los educadores pueden generar ambientes de aprendizaje que incentiven la curiosidad, la exploración y la construcción activa del conocimiento. Por tanto, la incorporación de los principios de aprendizaje activo y el uso de juegos en la formación docente emerge como una estrategia pedagógica esencial para fomentar una enseñanza más eficaz y participativa.

A continuación, el lector encontrará una fundamentación teórica breve sobre el uso de juegos en el desarrollo infantil, basada en Piaget (1964), una descripción concisa de las investigaciones realizadas por el autor del artículo y sus colaboradores sobre los cambios en las prácticas docentes derivados del uso de juegos y actividades lúdicas (Padilha Junior, 2023; Padilha Junior & Andrade Neto, 2023; Padilha Junior & Ferreira, 2021; Padilha Junior & Timm, 2021), una guía breve con sugerencias de juegos para docentes de Matemáticas en la educación primaria, los cuales fueron mostrados a los profesores participantes en las formaciones en Jaguaraiá, y las consideraciones finales sobre nuestras impresiones respecto al uso de juegos en la enseñanza de Matemáticas y en la formación docente.

Contribución de Piaget para una breve comprensión del tema

Piaget (1964) explora la complejidad del juego, situándolo como un fenómeno central en el desarrollo cognitivo del niño. Argumenta que el juego no debe verse de manera aislada, sino como parte integral de la actividad mental del individuo, reflejando la predominancia de ciertas tendencias comportamentales y cognitivas en las fases iniciales del desarrollo. Propone que el juego es una manifestación de la asimilación del individuo a su entorno, destacando que el acto de jugar es una actividad intrínsecamente motivada y autotélica, donde el placer y la satisfacción provienen del propio proceso de jugar, en lugar de cualquier objetivo externo.

El juego infantil es simplemente la expresión de una de las fases de esta diferenciación progresiva: es el producto de la asimilación disociándose de la acomodación antes de reintegrarse en las formas de equilibrio permanente que lo harán su complemento, al nivel del pensamiento operativo o racional. (p. 182, nuestra traducción).

El autor distingue varios criterios que definen el juego, incluyendo su naturaleza espontánea, placentera y su tendencia a la asimilación en lugar de la acomodación, sugiriendo que el juego permite al niño manipular y reinterpretar la realidad de manera que satisfaga sus necesidades y deseos internos. Esta capacidad de

transformar experiencias a través de la imaginación y la simbolización es fundamental para el desarrollo cognitivo, permitiendo la construcción de conocimiento y la adaptación a la realidad (Piaget, 1964).

Un segundo criterio frecuentemente invocado es el de la espontaneidad del juego, opuesta a las obligaciones del trabajo y la adaptación real. [...] Un tercer criterio comúnmente utilizado es el del placer: el juego es una actividad “por el placer”, mientras que la actividad seria tiende a un resultado útil e independiente de su carácter agradable. (p. 166, nuestra traducción).

El juego es, por lo tanto, una expresión de la dinámica mental infantil, reflejando tanto la necesidad de adaptación al ambiente como el deseo de ejercitar y expandir las capacidades cognitivas a través de la imaginación y la simbolización.

Piaget (1964) critica la necesidad de estandarización y clasificación de juegos de su época, proponiendo que un enfoque más estructural y menos teóricamente sesgado es necesario para comprender verdaderamente la naturaleza de los juegos infantiles. Este enfoque en la estructura de los juegos, en lugar de su contenido u origen teórico, permite una clasificación más objetiva y fundamentada en la observación directa de las actividades lúdicas.

Piaget sugiere un nuevo enfoque para clasificar los juegos, enfocándose en las estructuras subyacentes y en la evolución de las capacidades cognitivas y sociales de los niños. Identifica tres tipos principales de estructuras que caracterizan los juegos infantiles: ejercicio, símbolo y regla. Los juegos de ejercicio son los más simples, involucrando la repetición de acciones por placer. Los juegos simbólicos, más complejos, requieren la representación de objetos o situaciones ausentes y surgen con el desarrollo del lenguaje y la capacidad de simbolización. Los juegos con reglas representan un estadio aún más avanzado, donde las interacciones sociales y las normas comienzan a jugar un papel central.

Esta evolución de los juegos refleja el desarrollo cognitivo y social de los niños, pasando de actividades basadas principalmente en habilidades sensoriales y motoras a aquellas que involucran operaciones lógicas y abstractas. Piaget enfatiza la importancia del juego en la experimentación y en la asimilación de los niños al mundo que los rodea, permitiéndoles practicar e internalizar conceptos sociales, morales y lógicos de manera segura y controlada.

La síntesis a continuación ilustra cómo nuestro argumento y las ideas de Piaget (1964) están fundamentadas en su teoría.

Experimentación y placer del funcionamiento: "Ciertos juegos no suponen ninguna técnica particular: simples ejercicios, ponen en acción un conjunto variado de conductas, pero sin modificar sus respectivas estructuras [...] por el propio placer del funcionamiento." (p. 125) El autor destaca cómo los juegos de ejercicio permiten a los niños explorar y experimentar con sus habilidades motoras y cognitivas existentes puramente por el placer de la actividad, sin la necesidad de alcanzar un objetivo específico fuera del juego.

Asimilación deformante y la evocación simbólica: "Cuando el sujeto finge comer una hoja verde que califica de espinaca, tenemos, además del esbozo sensoriomotor de la acción de comer, una evocación simbólica." (p. 125). Este ejemplo ilustra cómo los juegos simbólicos permiten a los niños practicar e internalizar conceptos al reencuadrar sus experiencias sensoriales y motoras en contextos imaginativos, facilitando la asimilación de nueva información de manera creativa y controlada.

Reglas del juego y valores sociales: "La regla de juego no es una simple regla inspirada en la vida moral o jurídica, etc., sino una regla especialmente construida en función del juego, aunque puede conducir a valores que lo superan" (p. 125). Este pasaje evidencia cómo los juegos con reglas introducen conceptos de estructura social y moralidad en un contexto seguro y controlado, permitiendo a los niños experimentar con normas sociales y lógicas de manera lúdica y educativa.

Piaget (1964) ofrece una visión profundamente transformadora sobre la naturaleza y el papel del juego en el desarrollo cognitivo del niño, argumentando que el juego es mucho más que una actividad trivial; es una parte esencial del crecimiento intelectual y social. Destaca el juego como un campo fértil para la experimentación, la asimilación y la transformación de la realidad, a través del cual los niños no solo practican y expanden sus habilidades cognitivas y motoras, sino también negocian e internalizan los valores sociales y morales. Al distinguir entre los juegos de ejercicio, simbólicos y con reglas, Piaget desvela un panorama evolutivo del desarrollo infantil, mostrando cómo el juego se adapta y refleja los cambios en las capacidades y necesidades de los niños a lo largo del tiempo. Este análisis refuerza la importancia de abordar el juego no como una actividad marginal, sino como un elemento central en la educación y el desarrollo, un espacio donde el placer de explorar, imaginar y crear es tan crítico como la adquisición de conocimiento y habilidades sociales. Así, el legado de Piaget nos anima a reconocer y cultivar el potencial ilimitado del juego como medio de aprendizaje y desarrollo integral.

El Impacto de los Juegos como Estrategia Pedagógica

La adopción de juegos como estrategia pedagógica en la educación matemática ha demostrado ser un recurso transformador en las prácticas docentes, según se evidencia en las investigaciones realizadas por Padilha Junior (2023), Padilha Junior & Andrade Neto (2023), Padilha Junior & Ferreira (2021) y Padilha Junior & Timm (2021). Este enfoque lúdico, arraigado en la formación continua de los profesores, promovió un cambio significativo en la manera en que se enseña y aprende Matemáticas en la escuela primaria de la Red Pública de Enseñanza de Jaguariá, Brasil. Los juegos educativos, al facilitar un aprendizaje más divertido y motivador, contrastan con la enseñanza tradicional, a menudo centrada en la memorización de fórmulas y algoritmos, permitiendo que los estudiantes aprendan de manera más intuitiva y significativa, como observaron los investigadores en los cambios de las clases de los profesores: "Las clases monótonas y los ejercicios de 'Arme y efectúe', transcritos en el pizarrón, dieron paso a clases divertidas con juegos creados por los propios estudiantes" (Padilha Junior & Ferreira, 2021, p. 8, nuestra traducción).

La investigación destacó que el cambio de actitud de los profesores respecto a la enseñanza de Matemáticas tuvo un impacto directo en el comportamiento y la participación de los estudiantes. Las nuevas estrategias pedagógicas, incluidos juegos educativos y actividades lúdicas, implementadas en el aula, fueron recibidas positivamente por los alumnos, quienes mostraron mayor motivación e interés por la asignatura. Uno de los profesores participantes comentó: "Sí, lo noté. Principalmente con el uso de juegos. Empezaron a participar mucho más en las clases al darse cuenta de que podían ser divertidas" (Padilha Junior, 2023, p. 176, nuestra traducción). Este feedback evidencia la eficacia de los juegos en transformar la experiencia de aprendizaje, haciéndola más agradable y participativa. La Figura 1 muestra la implicación de los profesores en la elaboración y uso de juegos para la enseñanza de Matemáticas.

Figura 1. Profesores participantes de la Formación elaborando juegos.



Fuente: archivo del autor.

Además, el uso de tecnologías y medios digitales junto con los juegos educativos contribuyó a que el aprendizaje se volviera más dinámico e interactivo. Esto permitió a los estudiantes aprender a su propio ritmo y estilo, haciendo la educación matemática más accesible y personalizada. La participación de los alumnos fue notablemente mayor en actividades que integraban estos nuevos enfoques pedagógicos, como observó otro profesor: "Algunos alumnos empezaron a utilizar estrategias personales para resolver situaciones" (Padilha Junior, 2023, p. 176, nuestra traducción).

La integración de juegos y actividades lúdicas en la educación matemática representa un cambio paradigmático en la práctica docente. Este enfoque no solo facilita el aprendizaje significativo, sino que también promueve un ambiente de aula más dinámico, interactivo y motivador. La investigación de Padilha Junior (2023) demuestra claramente que, al abandonar prácticas tradicionales de enseñanza a favor de estrategias más innovadoras y atractivas, es posible transformar significativamente la experiencia educativa de los estudiantes, preparándolos mejor para los desafíos del siglo XXI.

Sugerencias de juegos y actividades lúdicas para profesores de escuela primaria

En el contexto actual de la educación matemática, la integración de juegos en la enseñanza emerge como una estrategia pedagógica vital, reflejando principios centrales de la teoría de desarrollo cognitivo de Piaget (1964). Este enfoque, basado en la manipulación activa y en la experimentación directa, proporciona un medio efectivo para la construcción del conocimiento matemático en niños. Esta sección explora la relación sinérgica entre juegos matemáticos utilizados en la formación de profesores de escuela primaria en la ciudad de Jaguariáiva, Brasil, en los años de 2018 a 2022 y las etapas de desarrollo cognitivo delineadas por Piaget (1964), destacando cómo estas actividades lúdicas facilitan la asimilación y acomodación de conceptos matemáticos complejos. A través del análisis detallado de los beneficios pedagógicos de cada juego, ilustramos, en la Tabla 1, la alineación con las fases del desarrollo cognitivo infantil, proporcionando sugerencias para educadores que buscan enriquecer el aprendizaje matemático con experiencias concretas y significativas.

Tabla 1. Presentación de Algunos Juegos Matemáticos Desarrollados en la Formación de Profesores.

JUEGO	DESCRIPCIÓN	BENEFICIO	RELACIÓN CON LA TEORÍA
Nunca Diez	Juego de secuencia numérica donde se “evita” ciertos números.	Desarrolla el cálculo mental y estrategias de anticipación.	Se relaciona con la asimilación y acomodación, al exigir la adaptación de las estrategias del juego a la lógica numérica (Piaget, 1964).
Bloques lógicos	Conjunto de bloques que varían en color, forma, tamaño y grosor.	Enseña clasificación, seriación y correspondencia.	Enfatiza la importancia de la manipulación concreta en el desarrollo cognitivo, alineado con la fase preoperacional (Piaget, 1964).
Regletas de Cuisenaire	Barras coloreadas representando números del 1 al 10.	Ayuda en la comprensión de operaciones matemáticas básicas.	Apoya la transición hacia el pensamiento operacional concreto, permitiendo la experimentación y el descubrimiento (Piaget, 1964).
El Juego del Sendero de la División	Juego que utiliza el residuo de divisiones para avanzar en el tablero.	Practica división y concepto de resto de forma lúdica.	Facilita la asimilación de conceptos matemáticos complejos a través de la repetición y el placer funcional del juego (Piaget, 1964).
Balanza - ¿cuál pesa más?	Actividad de comparación de peso entre objetos.	Introduce nociones de medidas y estimaciones.	Ilustra la asimilación pura y la satisfacción en la exploración y manipulación de objetos, característica de los juegos (Piaget, 1964).
Máquina de calcular	Dispositivos que simplifican operaciones matemáticas.	Facilita el entendimiento de operaciones matemáticas.	Representa la asimilación de conceptos matemáticos a través de la interacción lúdica y funcional (Piaget, 1964).
Mercadito	Simulación de gestión de un pequeño mercado.	Desarrolla habilidades de cálculo, economía y negociación.	Ejemplifica la imitación y el juego simbólico al reproducir actividades adultas en un contexto lúdico (Piaget, 1964).

Elaborada por el autor.

Los juegos y actividades lúdicas sugeridos en esta sección reflejan principios fundamentales de la teoría piagetiana sobre el desarrollo cognitivo infantil y el papel vital de la asimilación activa y el juego en ese proceso. Ejemplifican en la práctica cómo los educadores pueden proporcionar experiencias de aprendizaje matemático concreto y significativo, adaptadas a los diferentes estadios cognitivos de los estudiantes.

En el contexto específico de la formación de profesores realizada en Jaguariáiva, los juegos descritos en la Tabla 1 fueron demostrados durante los talleres con los docentes, para ilustrar estrategias pedagógicas alineadas con la perspectiva piagetiana. Los testimonios de los profesores participantes evidencian que estas actividades

prácticas fueron esenciales para cambiar sus concepciones sobre la enseñanza de Matemáticas, inspirándolos a adoptar enfoques más interactivos y lúdicos en el aula. Estas prácticas tuvieron la adopción de recursos como los juegos y actividades lúdicas, revelando que la relación tanto de los docentes como de los estudiantes cambió, convirtiendo la clase en un espacio divertido y alusivo para desmitificar el mito de la Matemática solo para “genios”, como se evidencia:

Un profesor comentó que, a partir de la formación, la Matemática dejó de ser, para él, tan “abstracta”: “Los juegos que desarrollamos en la formación mostraron que es posible aprender Matemáticas de forma más fácil, más lúdica. El profesor habla en números y los niños miran sin entender (lo que me pasaba a mí también), pero cuando comencé a mostrar, en la práctica, cómo son las cosas, su comprensión de las Matemáticas cambió”. (Padilha Junior & Andrade Neto, 2023, p. 193, nuestra traducción).

Este y otros relatos son una demostración de que la formación planificada para atender a estos profesores cumplió sus objetivos, contribuyendo al cambio de la práctica docente y a un aprendizaje pleno de los niños en el ámbito de las escuelas públicas en la enseñanza primaria de la ciudad de Jaguariaíva.

Consideraciones Finales

La integración de juegos y actividades lúdicas en la enseñanza de Matemáticas representa un cambio de paradigma que trae beneficios comprobados para el compromiso y el aprendizaje de los estudiantes. Basada en las teorías de Piaget (1964) sobre el desarrollo cognitivo infantil, esta aproximación se sustenta en la premisa de que el aprendizaje ocurre mejor a través de la asimilación activa y la experimentación concreta.

Las evidencias recopiladas por el autor, mediante investigación de campo con profesores sometidos a formación continua en Jaguariaíva, corroboran el potencial transformador de esta estrategia pedagógica. La adopción de juegos educativos matemáticos por parte de los docentes participantes promovió no solo un mayor interés de los alumnos, sino también un aprendizaje más significativo e intuitivo de los conceptos.

Aunque persisten desafíos en la implementación de juegos matemáticos, como la resistencia de algunos profesores y limitaciones de recursos, los resultados positivos confirman que este enfoque lúdico debe ser cada vez más difundido e incentivado. La formación continua juega un papel decisivo en diseminar este conocimiento entre los educadores, equipándolos para una práctica docente innovadora y motivadora.

Referencias Bibliográficas

- Padilha Junior, H. S. (2023). *Impactos didáticos-metodológicos da formação continuada de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental na rede municipal de educação de Jaguariaíva-PR* [Dissertação de Mestrado, Universidade Luterana do Brasil]. PPGECIM/ULBRA. <http://www.ppgecim.ulbra.br/teses/index.php/ppgecim/article/view/440/437>.
- Padilha Junior, H. S., & Andrade Neto, A. S. de. (2023). A formação continuada de professores e sua relação com a prática de ensino de matemática: a experiência de Jaguariaíva. In M. R. Royer (Ed.), *Formação de professores: práticas e reflexões* (pp. 184–202). Pimenta Cultural. <https://www.pimentacultural.com/livro/praticas-reflexoes>
- Padilha Junior, H. S., & Ferreira, E. C. (2021). *Metodologias e práticas para o ensino de matemática em um diálogo entre a BNCC e a formação docente – a experiência de Jaguariaíva-PR*. 5º Fórum Nacional Sobre Currículos de Matemática, Universidade Luterana do Brasil.
- Padilha Junior, H. S., & Timm, U. T. (2021). Uma proposta de formação de professores que ensinam matemática: o uso de jogos como estratégia para a aprendizagem significativa. In J. E. Sagula & D. O. Agudo (Org.), *SEM-V Simposio de Educación Matemática-Virtual, Educación Matemática enriquecida por Interdisciplinariedad con la Tecnología. Tomo II: Comunicaciones Breves* (pp. 67–70). EdUnLu.
- Piaget, J. (1964). *Formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem e representação*. LTC.

O papel dos jogos online na formação do pensamento matemático

Agostinho Iaqchan RYOKITI HOMA
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

Resumo

Esta conferência apresenta a reflexão da importância de integrar recursos didáticos ao fazer pedagógico do professor de matemática, incluindo no planejamento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática as questões relativas ao lúdico, integrando jogos, resolução de problemas e tecnologias digitais. Entende-se que uma abordagem lúdica, utilizando jogos e, também, a resolução de problemas são metodologias que possibilitam o desenvolvimento de competências, como raciocínio, representação, comunicação e argumentação, que formam o pensamento matemático nos alunos e os recursos digitais ampliam a visualização e generalização de importantes conceitos matemáticos. Busca-se para isto demonstrar o desenvolvimento de jogos digitais que possam servir de subsídios aos professores no planejamento do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo curricular ou de desenvolvimento de conceitos significativos, desenvolvendo o pensamento matemático e a interação social, buscando a integração das Tecnologias Digitais ao trabalho docente do professor de Matemática. Assume-se a premissa que ter disponível produtos educacionais digitais e, nesse caso, jogos digitais, auxilia que tais recursos sejam inseridos no planejamento didático do professor e isto pode subsidiá-lo na integração das Tecnologias Digitais (TD) em sala de aula. Apresentam-se dois jogos digitais, desenvolvidos no *software* GeoGebra, um jogo de estratégia e um jogo que revisita o conceito de frações. Os jogos foram desenvolvidos pelos pesquisadores do Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), utilizando o *software* GeoGebra e disponíveis para os professores da Educação Básica no endereço: <http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio/index.php/atividades-didaticas/jogos/>.

Palavras chaves: Jogos. Resolução de Problemas. Tecnologias Digitais.

Ebooks animados para o ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Edvonete SOUZA de ALENCAR
Universidade Federal da Grande Dourados, Brasil

Resumo

Esta conferência tem como objetivo apresentar um excerto dos resultados do projeto Criação de histórias de Literatura Infantil para o ensino de Matemática. Esse projeto identificou como a criação de histórias de Literatura Infantil (e-book animados e livros convencionais) para o desenvolvimento de conceitos matemáticos influenciam práticas e/ou conhecimentos profissionais de um grupo de professores da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nessa conferência focamos nossa abordagem nos ebooks animados criados e como esses potencializaram o conhecimento dos professores dos anos iniciais do ensino fundamental em formação.

Palavras chaves: Recursos de ensino. Literatura infantil. Educação Matemática.

Videojuegos comerciales en el aula de matemáticas: una guía práctica

Lluís ALABARRACÍN GORDO
Profesor Lector Serra Húnter
Universitat Autònoma de Barcelona, España

Resumen

En este artículo se presenta una guía básica para utilizar videojuegos en el aula de matemáticas. Se discuten los diferentes tipos de videojuegos que pueden utilizarse y la forma de elegirlos. También se detallan algunos aspectos sobre el rol que debe ocupar el videojuego en la actividad y como complementar la actividad de juego para poder utilizar videojuegos comerciales como contexto rico para promover la competencia matemática de los alumnos. Se ejemplifica esta propuesta con una secuencia de actividades basada en el videojuego de plataformas Kula World que tiene como propósito promover la visualización tridimensional.

Introducción

Las posibilidades de innovación en las aulas de matemáticas se han incrementado notablemente con la llegada de los soportes y contenidos digitales, aunque todavía no se hayan explorado en profundidad las posibilidades de la nueva oferta de opciones que se presentan al profesorado. En este documento se explicitan las posibilidades del uso de videojuegos comerciales en las aulas de matemáticas.

En algunos casos, los retos que un videojuego plantea al jugador contienen elementos propios de las matemáticas, con lo que la actividad de juego puede asemejarse al proceso de resolución de un problema matemático. En Hernández et al. (2015) identificamos los procesos que desarrollan los alumnos de Primaria durante una partida a un videojuego de estrategia (*Vector Tower Defense 2*). Comprobamos que la actividad desarrollada por alumnos durante el juego es equivalente a un proceso de resolución de problemas matemáticos. En concreto, identificamos los procesos de planificación, toma de decisiones, predicción, razonamiento y justificación, tal y como los define Pólya (1945). El estudio evidencia que en los procesos de resolución se involucran un gran número de conceptos matemáticos que aparecen al tratar de superar el reto propuesto por el videojuego. El trabajo concluye con la identificación de diversas oportunidades de aprendizaje matemático, que no tienen por qué ser aprovechadas por los alumnos para transformarse en aprendizajes efectivos, pero que suponen el inicio de una línea de investigación que me ha llevado a implementar en el aula diversas propuestas distintas utilizando videojuegos en aulas de Educación Primaria y Secundaria. El diseño de estas actividades está orientado a que el videojuego sea la herramienta que proporciona situaciones problemáticas en las que aparecen oportunidades de aprendizaje matemático y que se proporcione a los alumnos actividades complementarias para ayudarlos a generar los aprendizajes pretendidos. Esta experiencia es la base de la guía que detallo a continuación y que pretende dar orientaciones concretas y fundamentadas al profesor para poder incorporar los videojuegos a su propuesta de aula.

Una guía para utilizar videojuegos en el aula de matemáticas

Soporte de juego

Los videojuegos están diseñados para ser jugados sobre determinados soportes, ya sea un ordenador, una consola, una tableta o un móvil. No es nada habitual que los centros educativos dispongan de consolas de juego ni parece recomendable que se solicite a los alumnos que las lleven al centro para poder trabajar con ellas, con lo que las opciones realistas se centran en jugar en ordenadores o tabletas.

El soporte tableta permite ejecutar juegos diseñados para dispositivos móviles. Este hecho condiciona el diseño de los juegos, desde dos puntos de vista principales. Por una parte, los controles del juego serán táctiles. El segundo aspecto relevante es el tipo de experiencia que ofrece el juego en dispositivos móviles. En general estos juegos plantean retos estructurados en fases que se pueden jugar en pocos minutos, ofreciendo en muchos casos un gran número de niveles disponibles para el jugador. Este diseño se adapta fácilmente a los tiempos que disponemos en las aulas y permite organizar la actividad en base a un número determinado de niveles a jugar, conociendo de antemano las situaciones que los alumnos deberán superar.

Por su parte, el soporte en ordenador permite un mayor catálogo de videojuegos a elegir, pero existen limitaciones prácticas que lo reducen. Los ordenadores disponibles en los centros educativos no acostumbran a tener una tarjeta gráfica dedicada, con lo que los videojuegos más demandantes en recursos no son una opción viable. Por ello, los videojuegos a nuestro alcance son aquellos que fueron publicados hace años o los diseñados para jugar desde el navegador.

Serious games

Los *serious games* (juegos serios) son juegos diseñados con un propósito principal distinto del entretenimiento, hecho que motiva su nomenclatura. Existen *serious games* diseñados con propósitos muy dispares, como los destinados a concienciar a los jugadores (hábitos saludables de vida, por ejemplo), los pensados como ejercicios puramente artísticos o simuladores que permiten recrear prácticas complejas en entornos seguros. En nuestro caso nos interesan los videojuegos con objetivos educativos y didácticos, centrados en el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo muy interesante de videojuego educativo es *DragonBox Algebra*, que puede jugarse en dispositivos móviles y que recrea las reglas de la resolución de ecuaciones y las presenta en forma de retos basados en rompecabezas. Gutiérrez-Soto, Arnau y González-Calero (2015) han estudiado el impacto del uso de *DragonBox Algebra* sobre la competencia de resolver ecuaciones de alumnos de Educación Secundaria cuando regresan al mundo del álgebra obteniendo resultados positivos. Otro videojuego diseñado como herramienta para enseñar matemáticas es *Semideus*. El videojuego se dirige a trabajar los aspectos conceptuales relacionados con las fracciones y su representación sobre la recta numérica. Las investigaciones de sus creadores revelan que el videojuego

promueve aprendizajes como la equivalencia y ordenación de fracciones y la comparación de valores de fracciones a partir de la estimación y la representación en la recta numérica (Kiili, Moeller & Ninaus, 2018).

Por su naturaleza, los videojuegos educativos diseñados para enseñar matemáticas requieren de una dinámica de aula relativamente simple, ya que ellos mismos contienen los elementos didácticos necesarios para promover aprendizajes. Sin embargo, los videojuegos de este tipo que realmente inciden en aspectos conceptuales son escasos.

Videojuegos comerciales

Un enfoque distinto a los *serious games* es el de utilizar videojuegos comerciales, aquellos que han sido diseñados esencialmente para ofrecer entretenimiento, y adaptar su uso a los propósitos didácticos del profesor. En la actualidad existe un abanico enorme de géneros y subgéneros de videojuegos, muchos de ellos no contienen elementos que permitan su uso educativo, otros pueden promover reflexiones interesantes pero que no involucren un análisis matemático de la situación. Por ello, en el resto de este artículo me centro en aquellos videojuegos comerciales que incluyen elementos que permiten un acercamiento desde el análisis matemático que puede trasladarse de forma efectiva a las aulas de matemáticas.

En la elección del videojuego a utilizar, el primer paso es identificar la potencialidad para promover actividad matemática durante el juego. Este aspecto es estrictamente necesario en los videojuegos comerciales, justamente porque no han sido diseñados con el propósito de servir como herramienta educativa. El objetivo es aprovechar que ofrecen una propuesta de juego atractiva y que sea el docente el que se encargue de potenciar las posibilidades de trabajar las matemáticas con ellos.

Un ejemplo es el videojuego *Portal 2* (Albarracín, 2013) que presenta retos basados en alterar la topología de los espacios de los que la protagonista debe salir y que está estructurado como una secuencia de problemas en la que cada aprendizaje se refuerza y es clave para poder superar los niveles siguientes. Sin embargo, aunque la experiencia de juego en *Portal 2* promueva aspectos de resolución de problemas en un contexto en el que el análisis de la geometría del espacio es clave, el tiempo necesario para poder trabajar estos conceptos es muy superior al que disponemos en la práctica.

Otra opción es *SimCity* (Albarracín, 2015), un videojuego de simulación en el que el jugador toma el rol del alcalde/gestor de una ciudad y debe diseñarla y controlarla, gestionando aspectos como la distribución de las zonas residenciales, la recaudación de impuestos o la gestión de los servicios básicos. Jugando a *SimCity* se deben tomar decisiones complejas, en las que un análisis matemático de la situación es de gran ayuda para solucionar las dificultades que presenta la simulación. Como en el caso de *Portal 2*, el tiempo necesario para entender las mecánicas de juego y conocer todos los elementos involucrados en la toma de decisiones (urbanísticos, económicos, ambientales, de gestión de la energía y un largo etcétera) requiere de una cantidad de tiempo de la que generalmente no disponemos.

Ante esta situación, es necesario centrarse en videojuegos que puedan ser utilizados de forma efectiva en el aula. Videojuegos que permitan que los alumnos puedan empezar a jugar rápidamente y que puedan estructurarse en actos cortos. El género de videojuegos que mejor se ajusta a esta descripción son los videojuegos de puzle. Seguramente el ejemplo más conocido es *Tetris*, un videojuego en el que se deben encajar tetrominós, pero existen una amplia gama de juegos diferentes que comparten el patrón de proponer pequeños retos a los alumnos.

Otro tipo de juego de puzles que proporciona muchas posibilidades de trabajar aspectos metacognitivos sobre resolución de problemas son los juegos de tuberías, de los que hay muchas variantes para dispositivos móviles. Estos juegos pueden ser una buena opción en Educación Primaria, específicamente en el segundo ciclo, para trabajar contenidos de orientación y caminos en el plano. Dado que de este subgénero se pueden encontrar múltiples juegos, podemos elegir aquél que más se acerque a nuestros intereses o que incluya elementos de diseño que podamos aprovechar.

Organización de la actividad de juego

La mayoría de los videojuegos que hemos identificado como adecuados para su uso en el aula de matemáticas, ya sean *serious games* o videojuegos comerciales, presentan una propuesta de juego individual. En este caso, el docente puede mantener esta propuesta y buscar la interacción entre los alumnos a partir de compartir experiencias de juego o en el trabajo complementario a la actividad de juego. Pero también es interesante valorar la posibilidad de pedir a los alumnos que jueguen en otras configuraciones. En el estudio desarrollado en Hernández et al. (2015) pedimos a los alumnos que jugaran en parejas a un juego individual, provocando la necesidad de consensuar las decisiones a tomar.

Otra forma de organización de la actividad de juego es que cada uno de los alumnos se enfrenten por ellos mismos al videojuego, pero que exista un conjunto de objetivos comunes a alcanzar propuestos a todo el grupo-clase (Albarracín, 2024). Por ejemplo, en un videojuego que se estructure en niveles, el reto puede ser que alguien del grupo llegue a superar un nivel determinado, sabiendo de antemano que ese objetivo es realmente difícil sin compartir ideas o estrategias. De otra forma, se puede conseguir que los alumnos trabajen cooperativamente al solicitar que todos superen un nivel mínimo.

Rol del videojuego en la actividad: Un ejemplo usando Kula World

Una vez determinado el videojuego e identificados los elementos matemáticos que aparecen durante el juego, es necesario crear las actividades que van a complementar la experiencia de juego con el objetivo de explicitar el trabajo matemático y consolidar aprendizajes. Esto es debido a que los videojuegos comerciales no están diseñados como herramientas didácticas y priorizan la experiencia de juego, con lo que los alumnos juegan en un entorno que puede ser muy rico por su complejidad, pero no nos asegura que el trabajo sea tan profundo como deseamos. Para ilustrar esta necesidad, voy a centrarme en primera instancia en desarrollar un ejemplo que he utilizado en diversas ocasiones con alumnos del ciclo superior de Educación Primaria (Albarracín, 2021).

Kula World es un videojuego de tipo puzzle en el que el jugador controla una esfera (en este caso es una pelota de playa) que debe recorrer una plataforma tridimensional formada por cubos en busca de las llaves que le permitan habilitar la salida (Fig. 1).



Figura 1. Un nivel de Kula World en una plataforma tridimensional.

En *Kula World*, el jugador controla el movimiento de la pelota con el teclado y puede moverse en cuatro direcciones en el plano (delante, detrás, izquierda y derecha). Cuando la dirección está definida, puede decidir avanzar en línea recta hacia adelante. También se puede saltar para cambiar de plataforma o esquivar objetos peligrosos. De esta forma, cuando el jugador se mueve por la plataforma va vistas distintas de ella, siempre desde el punto de vista subjetivo de la posición de la pelota de playa, con lo que debe interpretar su posición en la plataforma para orientarse y localizar los objetos que debe conseguir.

Los alumnos juegan de forma intuitiva y veloz. El juego no proporciona momentos para que los alumnos se paren a pensar sobre la mejor forma de alcanzar un punto concreto de la plataforma, ya que cada nivel tiene un tiempo determinado para ser superado. En muchos casos, si los alumnos no consiguen los objetivos de un nivel, lo reinician nivel y trabajan siguiendo la estrategia de ensayo y error. De esta forma los alumnos experimentan dificultades para visualizar las plataformas tridimensionales y se ven obligados a enfrentarse a situaciones complejas, pero hasta este punto el videojuego no ha hecho más que ofrecer oportunidades de aprendizaje que pueden ser superadas sin que los alumnos analicen adecuadamente la situación. Por ello es necesario plantear actividades que partan de esta experiencia y que los obliguen a trabajar desde otra perspectiva.

En este caso una propuesta interesante es proporcionar a los alumnos un material manipulativo que les permita construir réplicas de las plataformas que aparecen en el juego en el mundo real. La Figura 2 muestra a una pareja de alumnas que trata de reproducir estas plataformas usando cubos multilink. Este trabajo permite evidenciar la naturaleza tridimensional de entorno en el que han jugado.



Figura 2. Alumnas reproduciendo una plataforma de *Kula World* utilizando cubos multilink

Una vez que los alumnos han construido algunas de estas plataformas, la actividad se puede conducir a pensar con detalle algunos aspectos que propone el juego y analizarlos matemáticamente. En concreto, se puede pedir a los alumnos que, respetando las normas de movimiento del juego, determinen que zonas de la plataforma son accesibles desde una posición inicial de la pelota. De esta forma se trabajan los caminos en entornos tridimensionales y las normas del juego pasan a actuar como restricciones de los problemas planteados. Así también se transforma una actividad geométrica (construir plataformas) en una actividad topológica (diferenciación de zonas) que conecta con la experiencia de juego, por lo que resulta natural para los alumnos y aprecian que es interesante para ver el juego desde otra perspectiva.

Los problemas que plantear a los alumnos en este contexto pueden ser muy diversos. Una vez identificada una plataforma que contenga zonas no accesibles desde un punto de partida dado, se puede proponer a los alumnos que la modifiquen (añadiendo cubos o plataformas auxiliares para permitir llegar a esas zonas) para que desde ese punto inicial se pueda llegar a recorrer toda la plataforma. Este tipo de actividad enlaza con el diseño de plataformas y los alumnos valoran la idea de trabajar como lo hacen los diseñadores del videojuego para ofrecer niveles que sean interesantes para el jugador. De esta forma la actividad puede continuar diseñando nuevas plataformas que podrían ser niveles alternativos a los propuestos por el videojuego.

Tal y como está diseñada, esta actividad parte de la propuesta de juego de *Kula World*, iniciando los alumnos la actividad con el rol de jugadores, pero al avanzar se les proponen que tomen un rol distinto, acercándose al tipo de reflexión que hace un diseñador de videojuegos y en el que queda claro que el análisis matemático es parte fundamental.

Reflexiones finales

Con esta propuesta tratamos de combinar diferentes aspectos potencialmente efectivos en el aula. El primero es el uso de videojuegos comerciales para aprovechar su evidente elemento motivador, pero también la posibilidad de experimentar de forma amplia usando materiales manipulativos, que permite a los alumnos trabajar pasando de lo concreto a lo abstracto.

Nuestra experiencia en el aula utilizando esta actividad nos muestra su efectividad para promover el razonamiento en espacios tridimensionales con alumnos de los cursos superiores de Educación Primaria, al tiempo que permite escalar la dificultad del reto, ya que es fácil para el maestro proponer retos más complejos o añadir actividades que permitan a unos alumnos consolidar los aspectos más básicos mientras otros se abren a la creatividad de crear nuevas plataformas que pudieran ser niveles del juego. Para una buena parte de los alumnos, no hay mejor motivación que esa.

Referencias Bibliográficas

- Albarracín, L. (2013). Portal 2. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 74, 77-82.
- Albarracín, L. (2015). Videojuegos. Diseñando ciudades en SimCity. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 78, 65-71.
- Albarracín, L. (2021). Una secuencia de actividades para desarrollar la visualización usando un videojuego. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 181-199.

- Albarracín, L. (2024). Todos contra la máquina. *La Gaceta de la RSME*, 27(1), 149-166.
- Gutiérrez-Soto, J., Arnau, D. & González-Calero, J. A. (2015). Un estudio exploratorio sobre el uso de DragonBox Algebra© como una herramienta para la enseñanza de la resolución de ecuaciones. *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete*, 30(1), 33-44.
- Hernández-Sabaté, A., Joanpere, M., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2015). Mathematics learning opportunities when playing a tower defense game. *International Journal of Serious Games*, 2(4), 57-71.
- Kiili, K., Moeller, K., & Ninaus, M. (2018). Evaluating the effectiveness of a game-based rational number training - In-game metrics as learning indicators. *Computers & Education*, 120, 13-28.
- Pólya, G. (1945). How to Solve It. *Princeton University Press*.

**La Estadística y la Probabilidad,
soportes vitales para el desarrollo de la IAG**

Jorge E. SAGULA

**Departamento Ciencias Básicas-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rector, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Equipo COIN (Director), DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
jsagula@mail.unlu.edu.ar
Jorgesagula@gmail.com**

Resumen

El objeto de esta conferencia es revelar cómo la Inteligencia Artificial, en su propia evolución, es una visión no sólo interdisciplinar sino multimetodológica, pero soportada por teorías, no sólo desde la percepción humana sino desde ciencias tales como la Estadística y la Probabilidad, permitiendo resolver problemas y conflictos con presencia de incertidumbre.

Desde las **Redes Neuronales (Neural Nets)** y su evolución, el **Aprendizaje de Máquina (Machine Learning)**, su escalabilidad, el **Aprendizaje Profundo (Deep Learning)**, el **Aprendizaje por Refuerzo (Deep Reinforcement Learning)**, hasta la **Inteligencia Artificial Generativa (Generative Artificial Intelligence)**, no hubiesen sido posibles, desde el diseño, la construcción y sus respectivos algoritmos, sin la presencia de la **Estadística** y la **Probabilidad**.

Palabras Clave: Estadística. Probabilidad. Aprendizaje. Aprendizaje Artificial. Inteligencia Artificial Generativa.

Pensamiento Estadístico (Sagula, J. (2023), a)

El Pensamiento Estadístico es la forma en que la información se ve, se procesa y se convierte en pasos de acción. Es una filosofía de pensamiento, no una forma de realizar cálculos matemáticos.

El Pensamiento Estadístico conforme a **Snee (1993)** es “un conjunto de principios y valores que permiten identificar los procesos, caracterizarlos, cuantificarlos, controlar y reducir su variación para implantar acciones de mejora”.

La Teoría en Administración (**Deming, 1994**) permite sustentar al Pensamiento Estadístico, pues el estadístico desarrolló el Sistema de Conocimiento Profundo, conteniendo la esencia de los tres principios básicos:

- 1) Todo trabajo ocurre en un sistema de procesos interconectados;
- 2) La variación existe en todos los procesos;
- 3) La clave del éxito se alcanza comprendiendo y reduciendo la variación del proceso.

y está integrado por cuatro partes: la apreciación de un sistema; el conocimiento sobre la variación; la Teoría del Conocimiento y la Psicología.

La División Estadística de la American Society for Quality Control (ASQC) en el año 1994, presentó el proyecto sobre Pensamiento Estadístico en la reunión Tactical Planning Meeting; el objetivo fue que los miembros de tal división, aplicaran el Pensamiento Estadístico en su trabajo para lograr mejores resultados. El primer problema que tuvo el equipo fue que todos tendieron a emplear el término “Pensamiento Estadístico”; pero hubo variación en quienes constaban como miembros del equipo. Consecuentemente, el primer objetivo fue desarrollar y publicar una definición operacional del Pensamiento Estadístico. Finalmente, en el año 1996, expresaron que “el Pensamiento Estadístico es una filosofía de aprendizaje y acción basada en varios principios fundamentales que tiene como finalidad el logro del mejoramiento del desempeño institucional”. (**Quality Press, 1996**)

Pensamiento Probabilístico (Sagula, J., 2023, b)

El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad de que suceda algún resultado específico. En este contexto, el Pensamiento Probabilístico permite identificar los resultados más probables; así, las decisiones se consideran más precisas y efectivas.

El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones. Las teorías de representación de la mente permiten que las representaciones de constructos mentales y el uso de las mismas en los procesos de decisión sean posibles, existiendo sustento en la cognición, generando acciones. Se puede postular que “una representación mental es un isomorfismo entre procesos que ocurren en el cerebro y el comportamiento de ciertos aspectos del mundo”. Esta definición de una Teoría de la Representación, permite vincular el concepto de Modelo Mental con la Heurística (del griego “heuriskien”, significa “buscar”); Heurística puede definirse como “conjunto de procedimientos simples, frecuentemente basados en el sentido común, que conforme se supone, permitirán obtener una buena solución a problemas con cierto grado de dificultad, en forma rápida y fácil” (**Zanakis & Evans, 1981**). Claro está que la Heurística, en sí misma, puede remontarse a los comienzos de la humanidad, pues en base, a la propia creatividad y sin conocimientos previos, los humanos aprendieron, y con el paso del tiempo, sin formalización alguna pudieron encontrar soluciones simples a problemas que aparecían y... aparecían....; sin embargo, en el paso del tiempo, y ya en el siglo XX, resulta imposible hablar de Heurística, sin mencionar a **George Pólya (1945)**.

Gal (2005), propone un modelo, en el cual el componente cognitivo incluye los conceptos: (1) Ideas Centrales: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre; (2) Cálculo de probabilidades: estimando la probabilidad de ocurrencia de eventos; (3) Idioma: términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar; (4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal; y (5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades.

Es dable concluir que el Pensamiento Probabilístico puede verse como una línea de pensamiento de mayor complejidad, el Pensamiento Heurístico, no excluyente de tales procesos, pero que constituye una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, y que precisamente, puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; consecuentemente, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas.

El Pensamiento Probabilístico suele ser empleado en forma intuitiva, en una acotación del Criterio de von Mises, esto es “no como el paso al límite para n tendiendo a infinito” (**Jorge E. Sagula, 2004**) sino como aproximación delimitando la tendencia, razón por la cual existe una componente de subjetividad, y la diferencia entre el valor experimental y el valor teórico no necesariamente resulta como debería ser; por supuesto, aquí hay un vínculo entre el modelo mental de quien resuelve y la transcripción o decodificación del mismo; esto evidencia la existencia de un nivel de incertidumbre más allá de la incertidumbre en sí misma, pudiendo concluir que la información es sesgada.

Conceptos relevantes y vibrantes en la historia de la Inteligencia Artificial

Cuando comienzan las investigaciones en **Aprendizaje Automático (Machine Learning)** en el campo de la Inteligencia Artificial en la década de 1980, a partir de las ideas de Alan Turing en 1950, el objetivo fue desarrollar técnicas de aprendizaje para máquinas, con el propósito de “generalizar comportamientos e inferencias para un gran conjunto de datos”, y la respuesta fue “como imitación de la forma de aprendizaje del cerebro humano”, considerando que sus estrategias se sustentan en Algoritmos basados en Regresión y Algoritmos basados en Árboles de Decisión, enfatizando la potencia de técnicas y metodologías “apropiadas” tanto de la Heurística como de la Metaheurística. El Aprendizaje Automático se relaciona intrínsecamente con el Aprendizaje Estadístico y la Estadística Inferencial y el Reconocimiento de Patrones, y puede verse como un Método de Inducción de Conocimiento. Se puede implementar Aprendizaje Supervisado (con asistencia humana) y Aprendizaje No Supervisado (sin asistencia humana).

Aprendizaje Profundo (Deep Learning), avance de Machine Learning, debe su denominación a *Geoffrey Hinton* (Premio Alan Turing, 2018) en 1986, al introducir el Algoritmo Backpropagation, empleado para entrenar **Redes Neuronales Multicapas (Redes Neuronales Profundas)**, emulando la percepción humana inspirada en el cerebro y la conexión neuronal. Al efecto, configura parámetros básicos sobre los datos, entrenando a una máquina para que “aprenda” reconociendo patrones utilizando muchas capas de procesamiento. Las técnicas utilizadas por Deep Learning mejoran las capacidades de clasificación, reconocimiento, detección y descripción; y sus campos de desarrollo son: Reconocimiento de Patrones, Identificación de Imágenes y Analytics (Predictiva). Sus mayores logros se ubican en: Clasificación de Imágenes, Reconocimiento del Habla, Detección de Objetos y Descripción de Contenidos. En esta temática, atinente a la Resolución de Problemas, tanto la Heurística como la Metaheurística juegan roles esenciales (**Sagula, 2021**), por tanto, nuevamente la Estadística y la Probabilidad son importantes pilares de sustentabilidad.

El **Aprendizaje Profundo por Refuerzo (Deep Reinforcement Learning)** constituye una Neo-Evolución, un nuevo paradigma, pero desde ideas previas, inspiradas en Alan Turing (1950) y proseguidas por (**Minsky, 1986**), que si bien como uno de los pioneros de la IA tuvo grandes aportes, la referencia citada conduce al nacimiento de los Agentes Inteligentes; el Aprendizaje Profundo por Refuerzo, es consecuencia de la transdisciplinariedad entre Machine Learning y Deep Learning, por un lado y la Teoría de Agentes y Multiagentes Inteligentes, por el otro, y en esta instancia, un Agente Inteligente aprende a optimizar un Proceso de Decisión.

Los sistemas de Aprendizaje por Refuerzo exploran y adquieren datos sobre el problema por propia iniciativa, diseñando automáticamente estrategias en busca del objetivo.

A efectos que la máquina aprenda, el agente interactúa con “un entorno”, que puede ser el proceso decisión real, o bien, una simulación del mismo. El agente trabaja observando el entorno, y tomando una decisión para comprobar qué efectos produce. Siguiendo un proceso de Aprendizaje por Condicionamiento similar al de los seres humanos, el agente aprenderá qué decisiones son más apropiadas, conforme a la situación, desarrollando estrategias a largo plazo, con el propósito de maximizar los beneficios.

Por cierto, que, todos estos trabajos, como más salientes, permitieron plasmar el futuro, en general, de la Inteligencia Artificial, brindando las ideas que elucubraron y que, con distintos avatares en términos de implementación, llevaron a campos promisorios, que hoy por hoy, siguen alimentando a sub-disciplinas tales como Machine Learning, Deep Learning y Deep Reinforcement Learning, en las líneas más vinculadas con las Neurociencias e Inteligencia Artificial (**Sagula, 2021**).

Inteligencia Artificial Generativa

Las ideas son ideas, y los hechos son hechos; esta mínima construcción lingüística es para reflejar que cuando a la Inteligencia Artificial, en los últimos años, se la denomina, en ciertos ámbitos “Generativa”, es bastante curioso, pues adjetivar de esta forma, es ciertamente “una redundancia”, en virtud que “todo aquello que evidencia Aprendizaje”, de por sí, ya es Inteligente.

Así las cosas, sin embargo, IA Generativa se refiere a la generación de texto usando IA basada en redes neuronales profundas. El antecedente más remoto es ELIZA (primer chatbot, MIT, 1966), en años dorados de nacimiento de muchos hitos; ELIZA simulaba ser un psicólogo, estableciendo un diálogo con el usuario. El desarrollo de lenguajes de programación y computadoras que procesan textos se desarrolló desde ese momento con avances muy significativos notables, afincando en la IA el Procesamiento del Lenguaje Natural (NLP); aquí, se procesan palabras, y se generan textos en base a algoritmos matemáticos.

Investigadores de Google (2017) publicaron un artículo con “una nueva arquitectura para una red neuronal para modelar secuencias de palabras”; así, nació Transformer, y esta arquitectura superó rápidamente a las redes neuronales recurrentes en la traducción de textos, tanto en la calidad de la traducción como en el costo de entrenamiento de la red neuronal.

Estos avances provocaron el surgimiento del Transformer más conocido: GPT (Generative Pretrained Transformer); desde ese momento comenzaron a develarse varios “grandes modelos de lenguaje” (LLMs) en varios núcleos de investigación en varias empresas. La primera versión de GPT (OpenAI, 2018) correspondió a una red neuronal con 117 millones de parámetros (el número de parámetros está relacionado al número de conexiones entre neuronas en la red); luego, GPT-2 (2019) con 1.500 millones de parámetros, y GPT-3 (2020) con 175 mil millones de parámetros. Y a partir de allí, Google (2021) libera LaMDA (Language Model for Dialogue Applications), en 2022 PaLM (Pathways Language Model), y Bard (2023).

El 30 de noviembre de 2022, OpenAI anuncia ChatGPT, entonces millones de usuarios comenzaron a interactuar directamente con una computadora, escribiendo un texto en lenguaje natural, incluso con faltas de ortografía y ausencia de signos de puntuación. Los resultados, sorprendieron a expertos, desarrolladores y novatos, pues con un breve texto como input en el prompt de la computadora, se generaba rápidamente un texto de varias líneas con cierta coherencia y con una gramática y sintaxis adecuadas. Era una auténtica revolución. Por primera vez se tenía al alcance de nuestros dedos la posibilidad de interactuar en forma directa con una computadora, en el idioma elegido, que podría generar textos como si se tratara de una persona empática, generosa y sensible.

¿Cómo era posible? La red neuronal estaba entrenada con millones de textos de múltiples temas, y ahora más allá de los textos, con GPT-4, tanto input como output, imágenes, videos y audio. Esto último ha permitido el surgimiento de arte y diseño usando la IA.

Prompt Engineering (PE), ¿Ingeniería Rápida, Inmediata?

Prompt Engineer, se aproxima a Ingeniería de Peticiones; esto implica que un Ingeniero de Peticiones es “un experto en lenguaje y comunicación que no sólo entiende a la IA sino también cómo está diseñada”, por tanto, se trata, en esencia de un experto en Metalingüística.

Un prompt es un conjunto de palabras que ayuda a la generación de contenido mediante un software de IA (ejemplos: Writesonic, Midjourney y ChatGPT), de tal forma la clave es saber preguntar, para aprender a crear contenido de calidad mediante los prompts correctos, por tanto, los resultados generados serán más útiles y eficaces.

Un buen prompt para IA debe tener información relevante y precisa, evitando no sólo datos que puedan ser erróneos o confusos, sino también ambigüedades, dobles sentidos y esencialmente, sesgados. Esto implica que cualquier información que tienda a confundir a la IA es mejor no incluirla....

Pero, qué hay detrás? Cada algoritmo combina las resoluciones de cada uno de los términos, a partir de la experticia humana, a partir de la interacción humana, y esto evidencia que ese conocimiento no siempre es preciso, determinístico, sino refleja el conocimiento empírico, las conjeturas, las opiniones, distintas apreciaciones, enfoques,...., detrás están los árboles de probabilidad, los modelos basados en estadística y en probabilidad, reflejando en el mejor de los escenarios, conclusiones plausibles....

Referencias Bibliográficas

Deming, W. E. (1994). The New Economics. Boston.

- Gal, I. (2005).** Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas.
- Minsky, M. (1986).** The Society of Mind. New York, Simon & Schuster. ISBN 0-671-60740-5.
- Polya, G. (1945).** How to Solve It? Princeton University.
- Quality Press (1996).** Glossary and Tables for Statistical Quality Control.
- Sagula, Jorge E. (2021).** La importancia creciente de la Heurística y la Metaheurística en la Resolución de Problemas. En Memorias del II SEM-V-Tomo I. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 13-14 mayo'2021. ISBN 978-987-3941-66-5. EDUNLU, diciembre'2021.
- Sagula, Jorge E. (2023) a).** Pensamiento Estadístico y Probabilístico, un puente entre Neurociencias e Inteligencia Artificial. En eCUCBA, Año 10, Número 20. Pp. 61 – 71. México, junio'2023.
- Sagula, Jorge E. (2023) b).** Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico. En Memorias del IV SEM-V. Universidad Nacional de Luján. Luján, Buenos Aires, Argentina; 11-12 mayo'2023. ISBN 978-987-3941-87-0. EDUNLU, mayo'2023.
- Snee, R. D. (1993).** What's Missing in Statistical Education? *The American Statistician*, 47(2), 149–154. <https://doi.org/10.2307/2685201>
- Zanakis, S. H. & Evans, J. R. (1981).** Heuristic "optimization": Why, when, and how to use it. *Interfaces*, 11(5), 84-91.

Redescubriendo el Pensamiento Estadístico desde la Fenomenología

Héctor HEVIA

Universidad Alberto Hurtado, Chile

Universidad Adolfo Ibáñez, Chile

hctr.hevia@gmail.com

Resumen

Indagar sobre un pensamiento, en un cierto universo de objetos y significados que le atañen o pertenecen, conduce a revisar inagotablemente los paradigmas vigentes –esas creencias que dan forma a ese pensamiento– con el objetivo de abarcar coherentemente, el universo de objetos y significados hasta sus confines. En una revisión como tal, siendo crucial la preservación de la coherencia de los significados, se buscan síntesis conceptuales que permitan una ampliación de la mirada, la que podría llevar a resignificar los objetos hasta en sus mismos orígenes, a través de la afloración de nuevas creencias, quizás, más simples y más universales, que den cuenta de ese pensamiento.

En lo que sigue, se busca indagar sobre el pensamiento estadístico, en el universo de objetos y significados que le acompañan, desde una perspectiva fenomenológica.

Palabras clave: Pensamiento estadístico. Estadística. Ley de Grandes Números. Razonamiento Inductivo. Ciencias empíricas. Significado. Interpretación.

Poblaciones y variables aleatorias

El concepto actual de población, se presenta ligado a la experiencia con los datos. El requerimiento necesario de coherencia de los datos que permite la otorgación del sentido de población, se enraíza en la misma producción de los datos, aceptando la existencia de un cierto *experimento aleatorio* que, a través de su ejecución, produce un resultado, un número factible de ser observado. Ver Hevia, 2022, p. 32. Desde esta perspectiva, la población consiste de todas las observaciones de los resultados del experimento que son factibles de ser realizadas. Por tanto, la naturaleza de la población es conceptual, abstracta; una categoría. Claramente, entonces, a la población se accede sólo a través de una muestra de ella, la cual consiste de una colección finita de observaciones de los resultados producidos por el experimento aleatorio. A través de estas consideraciones, el experimento en sí se considera una mónada, una entidad aislada que opera sin alteraciones, tampoco consecuencias. Por tanto, las observaciones pertenecientes a la muestra son independientes. Por otro lado, el fenómeno que se estructura en la conciencia frente a la producción de un número no predecible, se denomina “número aleatorio” y se representa por una variable X denominada “variable aleatoria”. De esta forma, la variable aleatoria X representa a la observación de un resultado particular del experimento, pero, también, a la observación de cualquiera de los resultados del experimento; es decir, también representa a la población en su totalidad. (Hevia 2022, p. 37).

En resumen, percibimos un universo de números producidos coherentemente y reconocemos a una población, la que denotamos por medio de una variable aleatoria; digamos, X .

Razonamiento inductivo en Estadística

Siguiendo a (Hevia, 2022, p. 36); un evento es una afirmación en lenguaje natural que alude o se refiere a los resultados de un experimento aleatorio. Esta afirmación debe satisfacer el siguiente criterio, establecido por (Feller, 1950, p.14): Tiene completo sentido hablar de un evento A solo cuando está claro para cada resultado del experimento si el evento A ha ocurrido o no ha ocurrido. Una de las ventajas de esta definición es que permite identificar eventos más allá de la usual definición en la que un evento es un subconjunto del espacio muestral; básicamente, un objeto matemático. Un evento, definido como una afirmación en lenguaje natural, es compatible con cualquier experimento establecido en el universo de discurso en que se sitúa el estudio. (Hevia, 2022, p. 37) y en relación a los universos de discurso, (Hevia, 2023, p. 183).

Consideremos un cierto experimento y sea A un evento que alude a los resultados de su espacio muestral. Si el experimento se realiza n veces, en algunas de estas repeticiones el evento A ocurrirá, digamos en $n(A)$ de ellas, y en otras no ocurrirá. Si el número n de repeticiones del experimento aumenta, se observa que la frecuencia relativa $n(A)/n$ de ocurrencia del evento A se estabiliza. Citando a (Devore, 2012, p. 58):

La evidencia empírica basada en los resultados de muchos experimentos repetibles, indica que cualquier frecuencia relativa de este tipo se estabilizará conforme el número de repeticiones aumente. Es decir, puesto que n se hace arbitrariamente grande, $n(A)/n$ se aproxima a un valor límite, que se denomina *límite (a largo plazo) de la frecuencia relativa* del evento A . La *interpretación objetiva de probabilidad* identifica este límite de la frecuencia relativa límite con $P(A)$.

Este razonamiento inductivo puede reproducirse en el caso de una variable aleatoria finita X ; es decir, cuando el espacio muestral del experimento aleatorio consiste de un número finito de resultados que son números. En este caso, la evidencia permite observar que el promedio de un número n grande de observaciones de X se aproxima a un valor límite que, siguiendo el razonamiento de Devore, podría entenderse como una *interpretación objetiva del valor esperado* de la variable aleatoria X .

La relevancia de la Ley (débil) de los Grandes Números

En base a lo expuesto precedentemente, es esperable que la modelación de una población X a través de una distribución de probabilidad permita obtener, como una conclusión teórica, esta propiedad de convergencia observada empíricamente; al menos si la variable aleatoria X es finita. Sin embargo, se puede demostrar

bastante más. Si la población X tiene valor esperado μ y varianza σ^2 , esta convergencia (en probabilidad) queda garantizada. La propiedad ha sido denominada, históricamente, como la Ley (débil) de los Grandes Números y fue demostrada por primera vez por Bienaymé (1853). (Seneta, 2013, p. 14). A continuación, la establecemos.

Ley (débil) de los Grandes Números (LGN)

Sea X una población con parámetros $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = E((X - \mu)^2)$. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra independiente e idénticamente distribuida (iid) de X y representemos por \bar{X} al promedio de la muestra. Entonces,

$\forall \varepsilon > 0$,

$$P(|\bar{X} - \mu| > \varepsilon) \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

O también, en escritura menos rigurosa,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow E(X) = \mu \text{ as } n \rightarrow \infty$$

siempre recordando que la convergencia es en probabilidad.

El enunciado y la demostración de esta propiedad, constan en (Ross, 2000, p. 129).

Una forma de asignar significado estadístico a la LGN, podría expresarse diciendo que ***una muestra aleatoria (iid) de tamaño n de una población X que tiene valor esperado μ y varianza σ^2 cae, en promedio, sobre μ ; salvo error, el que se controla con el tamaño de muestra n .***

Observe que la interpretación anterior es una traducción libre de dos conocidas propiedades que posee el promedio de una muestra como estimador de μ : el insesgamiento y la convergencia en probabilidad. Sabemos que la propiedad de insesgamiento es verdadera cualquiera sea el tamaño de la muestra. Si, en particular, $n = 1$, entonces, una única observación de X puede considerarse una estimación insesgada de μ ; de hecho, es recomendable que se considere así.

La manera presentada de otorgar significado estadístico a la LGN, conduce, entre otras cosas, a una asignación de significado a la varianza y a la desviación estándar de X , que son un tanto diferentes, como veremos más adelante.

Cerramos esta sección observando, en el enunciado de la LGN, que la existencia de los parámetros μ y σ^2 , lleva consigo una limitación en la variabilidad de la población X que se estudia, limitación que permanece un tanto oculta; más aún, si el tamaño n de las muestras es 1, situación que se corresponde con la población misma. Se podría pensar que la existencia de estos parámetros establece un radio de restricción en la variabilidad de la población: La población se centra en torno al parámetro μ , y este ejerce un efecto sobre las observaciones de la población X de la cual es el *centro*. Se establece algo así como una “fuerza gravitatoria” que gobierna a las observaciones. Por tanto, aunque se estudien muestras de tamaño $n = 1$, el efecto gravitatorio está, de todas maneras, presente. Una evidencia de este efecto gravitatorio que produce la existencia de μ y σ^2 en las muestras

de tamaño $n = 1$ de una población X , es la denominada Desigualdad de Chebyshev¹, la cual enunciamos a continuación. (Ross, 2000, p. 129).

Desigualdad de Chebyshev

Si X es una variable aleatoria con media μ y varianza σ^2 entonces para todo $k > 0$:

$$P(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Ross comenta: Esta ecuación nos dice que la probabilidad de que una variable aleatoria difiera de su media más de k desviaciones estándar se determina por $\frac{1}{k^2}$.

Cerramos esta sección, señalando una posible actividad para desarrollar una de las ideas presentadas con antelación. Esta consiste en estudiar, sucesivamente, la variabilidad de los *promedios* de muestras de tamaño $n = 2$; luego de tamaño $n = 3$, ... etc. De esta forma, se abre un camino, un tanto diferente, para la asignación de significado al error estándar de la media de una muestra de tamaño n . Por ejemplo, se podría observar cómo al seleccionar dos observaciones aleatorias de la población, un sistema de este tipo, con dos objetos, produce efectos “gravitatorios” que se traducen en la reducción de la variabilidad del *promedio* del sistema; etc.

Reasignación de significado a la varianza de la población X

La varianza de una población X se define como el valor esperado del cuadrado de la desviación de X respecto a su promedio μ . Es decir,

$$\sigma^2 = E((X - \mu)^2)$$

Entonces, σ^2 puede identificarse como el error cuadrático medio de X , cuando X se considera estimador de μ . Es decir, $\sigma^2 = ECM(X)$. Dado que X cae en promedio sobre μ , es decir, dado que su sesgo es 0, se concluye que el error estándar de X coincide con la desviación estándar σ .

El análisis anterior, siendo elemental, permite interpretar los conceptos más fundamentales de valor esperado y desviación estándar de una población a la luz de los conceptos más complejos de la teoría de la estimación puntual. Pero, también podríamos proceder en una dirección contraria, si la intención es preparar la conceptualización de algunos elementos de la teoría de la estimación puntual desde el inicio del estudio de la estadística descriptiva.

Volvamos a la LGN y en miras a su aplicación, enunciemos esta propiedad de una manera sucinta, en extremo sintética:

LGN, forma operacional

Bajo supuestos de existencia de valor esperado y varianza:

El promedio de n observaciones independientes de una variable aleatoria se aproxima a su valor esperado, en la medida que $n \rightarrow \infty$.

Veamos un ejemplo de cómo aplicar esta forma operacional de la LGN, la que nos permitirá asignar significado estadístico a la varianza y a la desviación estándar de una población.

¹ También denominada “desigualdad de Bienaymé–Chebyshev”, la que fue demostrada por Bienaymé en 1853 y, en forma independiente, por Chebyshev en 1867 para el caso de una variable aleatoria discreta. (Seneta, 2013, p. 14).

Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una población X con parámetros μ y σ^2 . Apliquemos la LGN a la población $(X - \mu)^2$ para concluir, bajo supuestos, que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \rightarrow E((X - \mu)^2) = \sigma^2 \text{ as } n \rightarrow \infty$$

De esta forma y bajo supuestos, la varianza σ^2 es el valor límite al que tiende el promedio de los errores al cuadrado bajo repetidas estimaciones independientes de μ por medio de X . La desviación estándar σ de X permite medir este error promedio, en las unidades utilizadas originalmente. De esta forma, la desviación estándar σ de X puede interpretarse como una medida del **error promedio que se comete cuando se estima μ por medio de una observación de X** .

Los significados estadísticos otorgados a σ y a σ^2 mediante la LGN podrían ser las tan buscadas claves que permitan interpretar estos parámetros en contextos específicos de estudio (Piña, 2018); pero, con este propósito, se debe tener en cuenta que cada observación de una variable aleatoria debe considerarse como una estimación del promedio de la población.

En relación a la veracidad de los supuestos en este ejemplo de aplicación de la LGN que permite otorgar significado estadístico a la desviación estándar, podría observarse que basta con asegurar la existencia de los primeros cuatro momentos respecto al origen de la variable aleatoria X para garantizar la necesaria existencia de los parámetros, requerida para la aplicación de la LGN. Pero, esto es válido sólo para este ejemplo. En general, lo frecuente será que no contemos con la garantía de la validez de los supuestos; sin embargo, será en estos casos, en que el aspecto de ciencia experimental que tiene la estadística, adquiera relevancia. A continuación, revisamos estas ideas en otros contextos.

Una mirada al Método de los Momentos para la obtención de estimadores

Sea X la población de interés y sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de X . Bajo supuestos apropiados, el método de los momentos permite obtener estimadores de un parámetro de interés de la población, fundamentándose en las propiedades que presentan ciertos estimadores de los momentos de X respecto al origen. Precisemos la notación y estas ideas, refiriéndonos a (Freund, 2000, p. 140).

Sea $j = 1; 2; 3; \dots$. Para estos valores de j , se define:

$$\mu'_j = E(X^j)$$

El parámetro μ'_j se denomina *j-ésimo momento (respecto al origen) de la variable aleatoria X* .²

A este respecto, es oportuno definir el *j-ésimo momento muestral M'_j* de la muestra X_1, \dots, X_n como

$$M'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j$$

Obviamente, M'_j es un estimador insesgado de μ'_j , para cada $j = 1; 2; 3; \dots$. Estos estimadores M'_j son los utilizados en el método de los momentos.

² Recordar que $\mu'_1 = \mu$.

(Freund et al. 2000, p. 344), definen el *j*-ésimo momento m'_j de la muestra de un conjunto de observaciones x_1, \dots, x_n como³

$$m'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^j$$

Pero no solo los estimadores M'_j son insesgados; hay todavía más: bajo supuestos, la LGN asegura que M'_j , el promedio de las potencias *j*-ésimas de las variables aleatorias de la muestra, converge en probabilidad a μ'_j , para cada $j = 1; 2; 3; \dots$. Es decir,

$$M'_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^j \rightarrow E(X_i^j) = \mu'_j \text{ as } n \rightarrow \infty$$

para cada $j = 1; 2; 3; \dots$

Es decir, bajo supuestos apropiados, los que se reducen a la existencia de ciertos primeros momentos μ'_j , estos estimadores, no solo son insesgados, sino que poseen la propiedad de la convergencia en probabilidad, lo que, sin duda, agrega valor a sus desempeños y, por tanto, también al método de los momentos.

Como sabemos, una vez que se han obtenido las estimaciones m'_j , se igualan a los parámetros μ'_j , para $j = 1; 2; 3; \dots$; formando tantas ecuaciones como sea el número de parámetros de la población X que se quiere estimar. Suponiendo que hemos podido expresar los momentos de X en términos de los parámetros desconocidos de la población, la resolución de estas ecuaciones permite determinar las estimaciones que se buscan para los parámetros desconocidos de X . En la siguiente sección, se esboza un ejemplo.

La estadística como ciencia empírica

Veamos, mediante un ejemplo, como datos (simulados) nos proveen de experiencia para razonar inductivamente en Estadística, tal como se hace en las ciencias empíricas.

Supongamos que la población X tiene una distribución uniforme en el intervalo $[a, b]$ (Devore, 2012, p. 140) y apliquemos el método de los momentos para obtener respectivas estimaciones de los parámetros a y b . Para ello, igualamos μ'_j y m'_j para $j = 1; 2$ y dado que $m'_1 = \bar{x}$ y $m'_2 = \overline{x^2}$, se tiene que

$$\hat{\mu} = \bar{x} \text{ y } \hat{\mu}'_2 = \overline{x^2}$$

Por otro lado, para la distribución que tiene X , se sabe que

$$\mu = \frac{a+b}{2} \text{ y } \mu'_2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

Estableciendo estas últimas relaciones en términos de estimaciones, reemplazando en el sistema de ecuaciones y despejando para \hat{a} y \hat{b} , se obtienen las siguientes estimaciones de momentos para los parámetros a y b :

$$\hat{a}_m = \bar{x} - \sqrt{3(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)} \text{ y } \hat{b}_m = \bar{x} + \sqrt{3(\overline{x^2} - (\bar{x})^2)}$$

³ Los M'_j son los estimadores y los m'_j son las estimaciones que estos estimadores producen.

Por otro lado, utilizando el método de máxima verosimilitud, se obtienen las siguientes estimaciones para los parámetros a y b .

$$\hat{a}_v = \text{Min}\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \hat{b}_v = \text{Max}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Con la finalidad de comparar el desempeño de los estimadores de momentos con el de los estimadores de máxima verosimilitud se implementó una simulación en la que se eligió $a = 1$, $b = 5$, y $n = 10$. A continuación, se obtuvieron 150 réplicas (independientes) de una muestra de tamaño $n = 10$ de la población X . Para cada una de estas réplicas se obtuvieron las estimaciones de los parámetros a y b que producen los estimadores \hat{a}_m , \hat{a}_v y \hat{b}_m , \hat{b}_v y se calcularon estimaciones para sus valores esperados a través de sus promedios. También se obtuvieron estimaciones para sus respectivos errores estándares a través del cálculo de sus desviaciones estándares. A partir de estas últimas estimaciones, se obtuvieron estimaciones para los errores cuadrático-medios de los cuatro estimadores considerados, a saber:

	Valor esperado	Error estándar		B ²	Varianza		ECM
\hat{a}_m	1,06652	0,45621		0,00442	0,20813		0,21255
\hat{a}_v	1,30467	0,29908		0,09282	0,08945		0,18227
\hat{b}_m	4,82041	0,54498		0,03225	0,29700		0,32926
\hat{b}_v	4,57292	0,39844		0,18240	0,15875		0,34115

La simulación, en el caso considerado, muestra poca diferencia entre las calidades de los estimadores de momentos y de máxima verosimilitud, para cada uno de los parámetros a y b , lo que no deja de ser interesante. Pero, ¿bajo qué fundamentos son válidas las estimaciones de los valores esperados de los estimadores, que se obtienen promediando las estimaciones obtenidas de las réplicas? Si aceptamos la existencia del valor esperado y de la varianza de cada estimador, como de hecho, necesariamente debe hacerse, la LGN justifica las estimaciones mencionadas; lo que es válido cualquiera sea el tipo de estimador, independientemente de su origen.

Observar que la manipulación de los datos provocada por esta simulación, requiere de la aplicación de la LGN. Ello trae consigo la necesaria puesta en evidencia de los supuestos que permiten su aplicación y, que podría conducir al *reconocimiento* de la muestra (las estimaciones obtenidas de las réplicas), del valor esperado del estimador como límite de la convergencia y a la *otorgación de sentido* al promedio de la muestra como el valor de la estimación. El pensamiento se dirige a pensar la teoría con los datos, agregando, de esta manera, la experiencia con datos al significado de los conceptos. Pensando la Estadística con datos.

Por consiguiente, en el caso que se plantea, al aceptar los desafíos que presenta la simulación, se llama a la arquitectura de conceptos de la Estadística, donde la LGN adquiere su rol preponderante de conexión de la realidad con la teoría. Esto lleva a la necesidad de revisar la validez de los supuestos que garantizan la convergencia en probabilidad, proporcionando una oportunidad de reconocer la estructura de esta convergencia cuando se identifican en su rol, parámetro (valor esperado del estimador), la muestra de estimaciones y su promedio, en una unidad que resulta de la acción del estimador. Todo esto en un contexto de datos, lo que es destacable. En realidad, la recurrente mención a los supuestos necesarios, es sólo una manera de permitir que la evidencia empírica que se produce en este tipo de simulaciones se revele a través de la manipulación de datos, con la intención de la formación de pensamiento estadístico integrado a la experiencia con los datos. El requerimiento de existencia no necesita ser probado si estamos dando paso al razonamiento inductivo que se desarrolla a través de estas experiencias de simulación, las que son fuertemente utilizadas en Estadística, tanto en la investigación teórica como en la aplicada. Por otro lado, al agregar significado basado en los datos, a los conceptos que en la teoría pura tienen significado eminentemente matemático, se logra un acercamiento al

pensamiento estadístico basado en los datos y en la inferencia científica, tal como el destacado estadístico David S. Moore ha propuesto reiteradamente. (Moore, 1988; Wild & Pfannkuch, 1999, pp. 224, 227).

Referencias Bibliográficas

- Devore, J. *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, octava edición. Cengage Learning, 2012.
- Feller, W. (1950). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Third edition. John Wiley & Sons, Inc.
- Freund, J. E., Miller, I. y Miller, M. *Estadística Matemática con Aplicaciones*, sexta edición. Pearson Educación, 2000.
- Hevia, H. (2023). Pensamiento Estadístico: ¿Qué aportan las Matrices de Koestler? *Memorias del IV Simposio de Educación Matemática Virtual, Paradigmas evolutivos en Educación Matemática: Conferencias y artículos* / compilación de Jorge E. Sagula, Lujan: EdUnLu. Libro digital, PDF ISBN 978-987-3941-87-0.
- Hevia, H. (2022). La Idea de Modelo de Probabilidad de una Población. Libro digital *Cutting-edge research in mathematics and its applications*. Atena Editora. Cap. 5; p. 31-43. DOI: 10.22533/at.ed.575221502. ISBN: 978-655983-957-5
<https://doi.org/10.22533/at.ed.575221502>
- Moore, D. S. (1988). Should Mathematicians Teach Statistics? *College Mathematics Journal*, 19, p. 3-7.
- Piña, E. (2018) *Estudio Acerca de las Representaciones Relacionadas con Variabilidad Estadística en la Enseñanza Media en Chile*. Tesis para optar al grado de Magister en Didáctica de la Matemática, Universidad Alberto Hurtado.
- Ross, S. M. (2002) *Probabilidad y Estadística para Ingeniería y Ciencias*, segunda edición. Mc. Graw Hill.
- Seneta, E. (2013) A Tricentenary history of the Law of Large Numbers. *Bernoulli* 19 (4), 2013, 1088–1121. DOI: 10.3150/12-BEJSP12.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999) Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67, 3, 223-265.

El desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio en el contexto de la Estadística Cívica

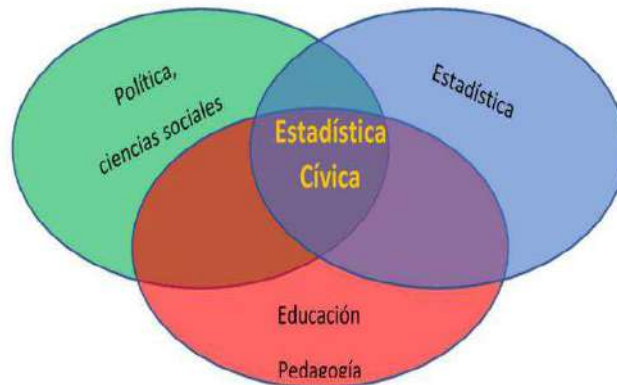
Dr. Cassio Cristiano GIORDANO
Universidade Federal do Rio Grande, Brasil
ccgiordano@furg.br

Resumen

Aquí, discutimos posibles contribuciones de un enfoque basado en la perspectiva de la Estadística Cívica al desarrollo del pensamiento estocástico, que abarca Estadística, Probabilidad y Combinatoria. Este es un ensayo teórico, en el que analizamos las once facetas del marco de la Estadística Cívica, de Nicholson, Gal y Ridgway, articuladas con las dimensiones del modelo de pensamiento estadístico de Wild y Pfannkuch, con énfasis en el ciclo investigativo, y el modelo de alfabetización estadística y probabilística por Iddo Gal. Nuestro análisis apunta al potencial de las Estadísticas Cívicas, especialmente cuando se trata de un gran volumen de información de fuentes gubernamentales y no gubernamentales, con datos multivariados representados en gráficos dinámicos, explotando los recursos de las tecnologías digitales.

Palabras-clave: Pensamiento Estocástico. Estadística Cívica. Ciclo Investigativo.

Figura 2. Intersección de la estadística, las ciencias sociales y la educación.



Fuente: Engel (2019, p. 3).

Para Nicholson, Gal y Ridgway (2018), el conocimiento estadístico, en sus diversos niveles, depende de un conjunto de habilidades que deben mejorarse en el entorno escolar. Sin embargo, estas competencias, fundamentales para el ejercicio de la ciudadanía en la vida cotidiana, están ligadas a la voluntad de involucrarse con la Estadística Cívica. Los elementos disposicionales definen la voluntad de involucrarse y de dedicar tiempo y energía para comprender mejor la información que se presenta continuamente en los más diversos medios. Esto implica, en el modelo de alfabetización estadística de Gal (2002) creencias, actitudes y postura crítica.

Figura 3. Modelo de Alfabetización Estadística.

Elementos del conocimiento	Elementos de disposición
Habilidades de conocimiento Conocimiento estadístico Conocimiento matemático Conocimiento del contexto Preguntas críticas	Creencias y actitudes Posición crítica
Conocimiento estadístico	

Fuente: Gal (2002, p. 4).

De manera similar, tres años después, Iddo Gal desarrolló un modelo de alfabetización probabilística.

Figura 4. Modelo de Alfabetización Probabilística.

Elementos cognitivos	Elementos dispocionales
<ul style="list-style-type: none"> Las grandes ideas: variación, aleatoriedad, independencia, previsibilidad/incertidumbre. Lenguaje: los términos y los métodos usados para comunicar acerca del grado de incertidumbre. Cómo calcular las probabilidades. La comprensión del papel y las implicaciones de los problemas probabilísticos y mensajes en diferentes contextos y en el discurso personal y público. Preguntas críticas: Cuestiones para reflexionar cuando se trata de probabilidades.w 	<ul style="list-style-type: none"> Postura crítica ante mensajes cuantitativos que pueden ser engañosos, unilaterales, sesgados o incompletos. Visión positiva de sí mismo como individuo capaz de realizar razonamientos probabilísticos en situaciones de incertidumbre que sean relevantes. Capacidad para evaluar el riesgo asociado con los eventos o resultados de relevancia para la vida.

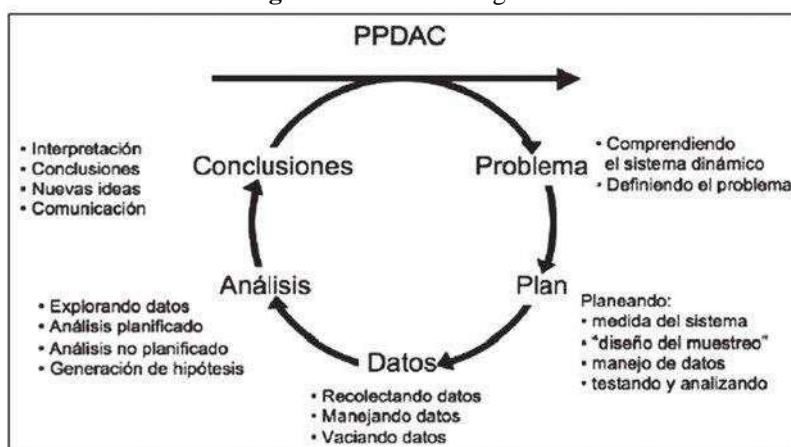
Fuente: Gal (2005, p. 51).

Tanto la alfabetización estadística como la probabilística se sustentan en la perspectiva investigativa defendida por Wild y Pfannkuch (1999), El ciclo investigativo es una de las cuatro dimensiones del pensamiento estadístico, como observa acertadamente Gal (2002, p. 4): “Los contextos de lectura deberían distinguirse de los contextos de investigación en los cuales las personas (p. ej. estudiantes, estadísticos) realizan investigaciones empíricas sobre datos reales (Wild y Pfannkuch, 1999)”, una vez que “... estas personas sirven como “productoras de datos” o “analizadoras de datos” y por lo general tienen que interpretar sus propios datos y resultados e informar sus hallazgos y conclusiones”. Según Wild y Pfannkuch (1999):

El pensador opera a la vez en las cuatro dimensiones. Por ejemplo, el pensador podría ser colocado en la categoría, como corrientemente ocurre, de la etapa de planeamiento del Ciclo Investigativo (Dimensión 1) que tiene que ver con algún aspecto de la variación en la Dimensión 2 (Tipos de Pensamiento) evaluando un plan tentativo en la Dimensión 3 (Ciclo Interrogativo) conducido por medio del escepticismo en la Dimensión 4 (Disposiciones). ¿Quién lleva a cabo este pensamiento? Cualquiera involucrado en la indagación, ya sea en forma individual o como miembro de un equipo. No es peculiar de los estadísticos, si bien la calidad del pensamiento puede mejorarse al ganar más conocimiento estadístico. (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 225).

De estas cuatro dimensiones del pensamiento estadístico destacaremos el Ciclo Investigativo:

Figura 5. Ciclo Investigativo.



Fuente: Wild y Pfannkuch (1999, p. 226).

Según Wild y Pfannkuch (1999):

Un ciclo PPDAC tiene que ver con la abstracción y resolución de un problema estadístico aterrizado en un problema más grande. La mayoría de los problemas están incrustados en el deseo de cambiar un “sistema” para mejorar algo. La investigación movida por la pura curiosidad usualmente está justificada por la idea de que la comprensión acumulada tendrá a largo plazo beneficios prácticos. Una solución al problema real basada en el conocimiento requiere de una mejor comprensión de cómo trabaja un sistema y, quizá también, cómo reaccionará a los cambios, a las corrientes de entrada, a las posiciones o al entorno. Se deben encontrar ciertos objetivos de aprendizaje para llegar al nivel de comprensión deseado. Un ciclo investigativo PPDAC parte para alcanzar cada objetivo de aprendizaje. El conocimiento obtenido y las necesidades identificadas dentro de estos ciclos pueden iniciar ciclos de investigación más avanzados. Las conclusiones de las investigaciones nutren a una base más extensa de conocimiento en contexto que puede informar de cualesquiera acciones. (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 225).

Giordano (2020) afirma que muchas investigaciones publicadas recientemente por investigadores en el campo de la Educación Estadística (Barberino, 2016; Cobello, 2018; Giordano, 2016; Mendonça, 2008; Santana, 2011), reconocen que los estudiantes de Educación Básica, aunque demuestren conocimientos Con conocimientos básicos de Estadística, tienen grandes dificultades para relacionar sus conceptos más elementales con los problemas de su vida diaria. Sin embargo, esta realidad cambia significativamente después

de la participación activa en la planificación y ejecución de la investigación estadística. El desarrollo del ciclo de investigación investigativa puede constituir una posibilidad para la exploración de conocimientos estadísticos, en contextos significativos para los estudiantes, así como técnicas y estrategias de gran relevancia para la formación de ciudadanos críticos, en un enfoque más rico y complejo que aquel que ofrece el libro de texto. Batanero y Díaz (2011) entienden que: [...] debemos diferenciar entre saber y saber aplicar el conocimiento. La capacidad de aplicar conocimientos matemáticos suele ser mucho más difícil de lo que se supone, porque requiere no sólo conocimientos técnicos (cómo preparar un gráfico o calcular un promedio) sino también conocimientos estratégicos (saber cuándo utilizar un concepto o gráfico en particular). Los problemas y ejercicios de los libros de texto a menudo se centran únicamente en el conocimiento técnico. Cuando trabajan en proyectos, los estudiantes se encuentran en la posición de tener que pensar en preguntas como: ¿Cuál es mi problema? ¿Necesito datos? ¿Cuál? ¿Cómo puedo conseguirlos? ¿Qué significa este resultado en la práctica? (Batanero y Díaz, 2011, p. 21) Lopes y Meirelles (2005) enfatizan que las raíces de la Estadística provienen de diferentes áreas del conocimiento, llevándonos a la interdisciplinariedad, que capacita al estudiante para investigar cuestiones de otras áreas del conocimiento humano, integrando conceptos, procedimientos y metodologías, y agrega: “Para la efectividad del trabajo pedagógico interdisciplinario, creemos necesario desarrollar un proyecto educativo más integral, centrado en el trabajo en equipo” (p. 3). Tales ideas nos remiten a aprendizajes basados en proyectos interdisciplinarios, a través de prácticas cooperativas en contextos realistas, contemplando supuestos emergentes del BNCC (Brasil, 2018). En la siguiente sección, presentaremos nuestros procedimientos metodológicos.

Metodología

Realizamos una investigación cualitativa, en la perspectiva de Creswell y Creswell (2021), en el enfoque metodológico del ensayo teórico, en la perspectiva de Severino (2007) analizando algunas posibles contribuciones de la Estadística Cívica al desarrollo del pensamiento estadístico, probabilístico y combinatorio. En la siguiente sección, presentaremos nuestros resultados y discusiones.

Resultados y discusiones

En la siguiente sección, presentaremos algunos resultados y discusiones, analizando una a una las posibles contribuciones de las estadísticas cívicas a través de las once facetas de su modelo conceptual.

Faceta 1: Preparación para el compromiso social. Un ciudadano estadísticamente culto puede tomar decisiones basadas en la evidencia, relacionando ideas de riesgo, valor esperado, representatividad, entre otras y para ello es necesario brindar formación que promueva el compromiso y el conocimiento de la sociedad a través de evidencia confiable. Esta faceta es considerada cuando los estudiantes eligen temas de relevancia social, política, económica, social, histórica y ambiental, según lo prescrito por el BNCC (Brasil, 2018), documento que estandariza los currículos brasileños de Educación Básica (primaria y secundaria). La elección de un tema por parte del estudiante es fundamental para movilizar su interés y compromiso/participación, ejerciendo un rol investigador (Batanero y Díaz, 2011).

Faceta 2: Evaluación crítica y reflexión. Aun cuando se utilicen datos de fuentes responsables, es necesario realizar de modo natural una evaluación y una reflexión críticas, como observa Giordano (2016, 2020). El desarrollo de la criticidad es uno de los aspectos esenciales para la formación de ciudadanos autónomos, capaces de impulsar las transformaciones necesarias para promover la igualdad y la justicia social (Freire, 2005)

Faceta 3: Disposiciones. Las actitudes reflejan una compleja red de valores, motivaciones y creencias. Tienen una dimensión social y ética con algunas componentes que influyen en el compromiso personal, tanto positiva como negativamente. Ignorar la evidencia basada en creencias, la aceptación acrítica de nueva información o la creencia de que sólo los expertos pueden entender los fenómenos sociales, son actitudes que pueden provocar problemas en el aprendizaje. La pandemia de Covid-19 y el movimiento anticencia y antivacunas que desató son un claro ejemplo de cómo los valores personales, étnicos, culturales, políticos e incluso religiosos son tan o más fuertes que los elementos cognitivos (Gal, 2002, 2005). Así, la participación activa de los estudiantes en el ciclo investigativo (y también, naturalmente, en el ciclo interrogativo) puede promover una mayor claridad sobre la importancia, el potencial y los límites de la ciencia (Wild y Pfannkuch, 1999).

Faceta 4: Estadística y riesgo. La Estadística Cívica implica la comprensión de ideas fundamentales de estadística: muestreo, población y representatividad, variabilidad, distribución, asociación y correlación, regresión, no linealidad, *big data*, entre otras, exigen la familiaridad con una variedad de fuentes de datos y técnicas de análisis asociadas, especialmente las utilizadas para detectar patrones y regularidades. La participación de los estudiantes en experimentos estadísticos, probabilísticos y de simulación que exploren recursos computacionales es fundamental para el desarrollo de la alfabetización y el pensamiento

probabilístico, no limitado a la perspectiva de la probabilidad clásica o laplaciana (ya que la idea artificial de equiprobabilidad conduce al surgimiento de la epistemológica). obstáculos), pero explorando tanto la perspectiva frecuentista como la perspectiva subjetiva de la Probabilidad (Gal, 2005).

Faceta 5: Modelos y representaciones. Modelar fenómenos sociales complejos, si puedes utilizar diferentes modelos para analizar el mismo fenómeno. Por tanto, es necesario formar la capacidad de identificar y comprender modelos, con los supuestos básicos que los sustentan. Todo tiene que ver con interpretar críticamente representaciones y visualizaciones sofisticadas, incluidas aquellas dinámicas e interactivas, desde un punto de vista descriptivo-exploratorio. Es importante promover, paralelamente a la alfabetización estadística, probabilística y combinatoria, la alfabetización computacional. Actualmente, incluso en escuelas sin acceso a computadoras, es posible explorar *softwares* y aplicaciones a través de los teléfonos celulares de los estudiantes, para desarrollar los niveles de lectura de gráficos estadísticos de Curcio (1987) y Friel; Curcio y Bright (2001).

Faceta 6: Metodología y proceso de investigación. Esta faceta está ligada a la Faceta 5 relacionando elementos como: sesgo, variabilidad y aleatorización. También incluye la comprensión de cuestiones éticas relacionadas con la producción de datos y la necesidad de conocer cuestiones de confidencialidad y protección de los ciudadanos que movilizan elementos disposicionales de la alfabetización estadística y probabilística de Gal (2002, 2005).

Faceta 7: Extensiones en el área de estadísticas oficiales son fuentes de datos sobre temas de relevancia social. Muchas de las ideas clave que utilizan reciben poca atención en los cursos tradicionales de estadística, tales como: diseño de encuestas (falta de respuesta o el sesgo de respuesta), problemas de medición (confiabilidad y validez, definición de metadatos), definición y significado de índices, operacionalización de variables y su relación con el constructo teórico del cual se parte y los modelos que permiten analizarlas. Actualmente, en el momento de turbulencia política que atraviesa Brasil, con una polarización política izquierda-derecha, es fundamental contrastar datos oficiales con información estadística de otras fuentes, como organizaciones no gubernamentales, universidades, periodistas de investigación, etc. Sólo con un amplio abanico de posibilidades los estudiantes son capaces de formarse una opinión de forma asertiva, basada en datos científicos.

Faceta 8: Conocimiento social contextual. La estadística se basa en la modelización; pero para modelar, se debe tener una comprensión básica de los fenómenos que se modelan: conocimiento general como tamaño de la población, tamaño del producto nacional bruto, deuda nacional y recursos; demografía; derechos humanos y vulnerabilidad de las minorías, historia y geografía; regional y geopolítica. El conocimiento contextual es fundamental (Gal, 2019).

Faceta 9: Tecnologías de la información y comunicación e investigación de la información. Muchos proveedores de estadísticas oficiales hacen que los datos estén disponibles al público, los cuales requieren conocimientos especializados y habilidades de uso de las tecnologías digitales. Es posible que los datos deban limpiarse, ordenarse, transformarse, agregarse o desagregarse. Todo ello implica distintos aprendizajes que deberían fomentarse a través de las propuestas de enseñanza. En tiempos de infodemia y fake news, la capacidad de argumentar de manera asertiva, basada en evidencia científica, así como de seleccionar fuentes confiables de información, cruzando datos a través de las TIC es fundamental para estructurar el pensamiento estocástico.

Faceta 10: Núcleo cuantitativo. Las habilidades cuantitativas son la base de todos los aspectos de la cultura estadística. Estas habilidades incluyen la comprensión de números, razones, porcentajes, tasas y fracciones. Gal (2002, 2005, 2019) considera esta necesidad al establecer, entre los cinco elementos cognitivos de la alfabetización estadística y probabilística, además de los conocimientos sobre lenguaje, estadística, probabilidad y contexto, los conocimientos matemáticos.

Faceta 11: Comprensión de textos y comunicación. En muchos casos, la información se presenta como un texto y para que el mismo no resulte denso, se acompaña de diagramas o representaciones. Así, la habilidad para comprender el texto está asociada a la comprensión de las representaciones, que en términos de Wild y Pfannkuch (1999) lo podríamos describir como procesos de transnumeración. Todo ello está relacionado con la habilidad de comunicar conclusiones de manera comprensible y fundamentada en la evidencia. Aquí se articulan conocimientos sobre el lenguaje (con énfasis en el lenguaje científico) y conocimientos matemáticos, con cambios en la representación (tablas, gráficos, medidas de tendencia central y dispersión). Incluso al optar por un determinado tipo de gráfico, es necesario comprender qué se gana y qué se pierde, qué resalta y qué esconde cada elección gráfica. La transnumeración siempre implica pérdidas y ganancias. Esto no siempre se explora éticamente. A menudo está detrás de un intento de manipular la información. Como nos recuerdan Friel; Curcio y Bright (2001), es necesario leer detrás de los datos y leer más allá de los datos expuestos en un gráfico estadístico.

Conclusiones

Durante mucho tiempo, la enseñanza de Estadística en Brasil se limitó a un enfoque técnico y procedimental que priorizaba la Estadística Descriptiva, en detrimento de la inferencia estadística, dissociada de la Probabilidad. Esto, a su vez, se presentó desde una perspectiva laplaciana, con el sesgo de la equiprobabilidad, como una extensión natural de la Combinatoria. Este último, a su vez, se limitó a la exploración de permutaciones, arreglos y combinaciones, a través de situaciones descontextualizadas o asociadas a contextos artificiales. La articulación de estos tres campos del conocimiento estocástico desde la perspectiva de un enfoque de ciclo investigativo (PPDAC) con la investigación autoral, que sitúa al estudiante como protagonista, ofrece nuevas posibilidades para la exploración y desarrollo del pensamiento estocástico. El modelo de Estadística Cívica, con sus once facetas, ofrece al docente nuevas posibilidades didácticas que amplían el alcance del conocimiento estocástico, acercando los enfoques de enseñanza a la realidad política, social, económica, cultural, ambiental e histórica necesaria para enfrentar los desafíos del siglo XXI.

Referencias Bibliográficas

- Barberino, M. R. B. (2016). *Ensino de Estatística através de Projetos*. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo.
- Batanero, C., Díaz, C. (2011). *Estatística con proyectos*. Universidad de Granada.
- Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação.
- Cobello, L. S. (2018). *Letramento estatístico: análise e reflexões sobre as tarefas contidas no material didático da secretária estadual de educação de São Paulo para o ensino médio*. 135 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos.
- Creswell, J. W., Creswell, J. D. (2021). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Penso Editora.
- Curcio, F. R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18(5), 382-393.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-18). Grupo FQM-126.
- Engel, J., Ridgway, J., Stein, F. W. (2021). Educación Estadística, Democracia y Empoderamiento de los Ciudadanos. *Paradigma*, 42, 1-31.
- Freire, P. (2005). *Pedagogia da autonomia – saberes necessários à prática educativa*. Paz e Terra
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: Building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.
- Gal, I. (2019). Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*, 1-15.
- Giordano, C. C. (2016). *O desenvolvimento do letramento estatístico por meio de projetos: um estudo com alunos do Ensino Médio*. Dissertação de Mestría. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Giordano, C. C. (2020). *Concepções estatísticas: um estudo com alunos do Ensino Médio*. Tese de Doutorado. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
- Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. 9ª ed. Ed. Cortez.
- Lopes, C. E. e Meirelles, E.O. (2005). Desenvolvimento da probabilidade e da estatística. In *VIII Encontro Regional de Professores de Matemática LEM/IMECC/UNICAMP* (pp. 1-8). UNICAMP.
- Mendonça, L. O. (2008). *A educação estatística em um ambiente de modelagem matemática no ensino médio*. 236 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.
- Nicholson, J., Gal, I., Ridgway, J. (2018). *Understanding Civic Statistics: A Conceptual Framework and its Educational Applications*. A product of the ProCivicStat Project.
- Santana, M. S. (2011). *A educação estatística com base num ciclo investigativo: um estudo do desenvolvimento do letramento estatístico de estudantes de uma turma do 3.º ano do Ensino Médio*. 197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Federal de Ouro Preto.
- Severino, A. J. (2017). *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo: Cortez Editora.

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.

Propuesta Pedagógica: Enseñanza comparativa de Inferencia Clásica y Bayesiana en cursos de grado de Estadística

Enrique E. ÁLVAREZ

**División Estadística, Departamento de Ciencias Básicas,
Universidad Nacional de Luján, Argentina
enriqueealvarez@fibertel.com.ar**

Resumen

Aquí, se presenta una propuesta pedagógica que permite la introducción de la Estadística Bayesiana a estudiantes avanzados de las carreras de Ingeniería Agronómica, Industrial, en Alimentos y las Licenciaturas en Ciencias Biológicas y en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Luján (UNLu).

La Estadística Bayesiana se basa en la aplicación generalizada del Teorema de Bayes, y contempla la posibilidad de revisar las probabilidades iniciales en función de nueva información disponible.

Es importante recalcar que ese proceso de actualización en función del ingreso de nuevos datos es frecuentemente en aplicaciones, susceptible de ser programado automáticamente, lo cual hace a la Estadística Bayesiana atractiva para aplicaciones actuales de Big Data y Ciencia de Datos. Adicionalmente, y a diferencia de los métodos clásicos de Inferencia Estadística, la Estadística Bayesiana tiene como principal ventaja que permite ser utilizada en procesos de Inferencia (para la consecuente toma de decisiones) tanto la información proporcionada por una muestra (datos frescos), como así también aprovechar conocimientos previos que se tengan de un fenómeno. Dichos conocimientos pueden provenir de datos observados anteriormente o en situaciones similares, de opiniones de expertos de las áreas de aplicación, o de desarrollos teóricos. Como tal, los métodos Bayesianos representan una herramienta que se considera fundamental para los estudiantes de las carreras mencionadas, las cuales son relevantes porque en la mayoría de sus aplicaciones de interés existen vastos conocimientos previos que pueden ayudar en la inferencia.

El propósito de esta propuesta, concretamente, contempla brindar un simulacro de clase para estudiantes de grado avanzados, tal que: (1) se presentarán los fundamentos epistemológicos e intuitivos que originan a la Estadística Bayesiana, (2) se aclararán malentendidos comunes con respecto a la Estadística Bayesiana, (3) se ilustrará el método de cálculo con un concreto y simple ejemplo.

Seguidamente, se planteará una discusión comparativa de los dos métodos de Inferencia Estadística fundamentales: el método frecuentista (sustentado fuertemente en la verosimilitud) versus el método Bayesiano. Se compararán sus fundamentos epistemológicos en forma clara e intuitiva y se brindará una opinión tentativa respecto a qué método elegir para utilizar de acuerdo a la situación planteada.

Se espera que la implementación de esta comunicación contribuya a reforzar las bases conceptuales de su pensamiento lógico-inductivo Estadístico, hecho que les permitirá a los estudiantes resolver con juicio crítico problemas relacionados con su formación profesional.

Palabras clave: Inferencia Estadística Bayesiana. Inferencia Máximo Verosímil. Métodos de Estimación Comparados.

Referencias Bibliográficas

1. Hoff, P.D. (2009). A First Course in Bayesian Statistical Methods. Springer.
2. Ntzoufras, I. (2009). Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley.
3. Robert, C.P. (2007). The Bayesian Choice. Springer.
4. Wasserman, L. (2005). All of Statistics, Springer, NY.

**Análisis de las ideas previas sobre la definición de polígono de estudiantes
para Maestro de Educación Primaria**

Myriam CODES, Juan Pedro MARTÍN-DÍAZ, M^a Isabel PASCUAL y Luis Carlos CONTRERAS

Universidad de Huelva, España

myriam.codes@ddi.uhu.es; juan.martin@ddcc.uhu.es; isabel.pascual@ddcc.uhu.es; lcarlos@uhu.es

Resumen

Desde la perspectiva de la importancia que se concede en la investigación en Educación Matemática al proceso de definir, este trabajo expone los resultados de una investigación exploratoria acerca de la comprensión de la definición del concepto de polígono por parte de estudiantes para Maestro de Educación Primaria (en adelante EPM). Los informantes fueron dos grupos de EPM, de 57 y 63 estudiantes, respectivamente, que respondieron a un cuestionario de ideas previas antes de recibir la formación específica correspondiente a la materia Didáctica de la matemática: las formas, las figuras y sus propiedades, del cuarto curso del Grado en Educación Primaria. Los resultados muestran la dificultad que los futuros maestros tienen en la identificación de atributos relevantes en el proceso de definir, incluso teniendo imágenes precisas del concepto, así como la dificultad al comparar definiciones. Ello permite situar a los EPM en un nivel previo al de ordenación o clasificación, en el sentido de la teoría de Van Hiele, nivel en el que deberían formular definiciones significativas y dar argumentos formales para justificar sus razonamientos, además de establecer relaciones entre propiedades. Ello nos refuerza la idea de que, durante su formación inicial, los EPM deben tener oportunidades de abordar el proceso matemático de definir, desde una opción constructiva, como elemento esencial para su formación en la práctica escolar de definir.

Palabras clave: Definición de polígono. Estudiantes para maestro. Formación inicial. Análisis exploratorio.

Introducción

La investigación ha subrayado el papel esencial de las definiciones en el proceso de construcción del conocimiento geométrico y en la comprensión de su estructura deductiva. Algunos estudios han mostrado el papel central del proceso de definir en la construcción de los significados de los conceptos para su posterior uso en otros procesos matemáticos como la demostración (Mariotti y Fischbein, 1997; Haj-Yahya et al., 2014; Pimm, 1993). El proceso de definir es una práctica matemática que forma parte del conocimiento sintáctico de la Matemática (Schwab, 1978) y, como tal, se asume como esencial su dominio por parte del profesorado que ha de enseñar matemáticas (Ball et al., 2008; Carrillo et al., 2018). También se ha mostrado cómo la práctica escolar de definir está mediada por el conocimiento de los profesores acerca del proceso matemático de definir (Pascual et al., 2019). El proceso de definir, como elemento específico del nivel de deducción informal (van Hiele y van Hiele, 1958), implica la identificación de los atributos inherentes al objeto matemático que se define y las relaciones y jerarquización entre esos atributos (van Dormolen y Zaslavsky, 2003), a través de argumentos informales, y también implica la capacidad de distinguir entre esos atributos los que son imperativos o relevantes (Bernabeu, Moreno, y Llinares, 2021; Zaslavsky y Shir, 2005), encontrarlos en ejemplos no centrales del concepto y de fabricar ejemplos no prototípicos y no ejemplos.

Este trabajo es parte de una investigación en la que se analiza la eficacia de una tarea sobre el proceso matemático de definir en la formación inicial de maestros de Primaria. Como parte inicial de la misma se obtuvo información acerca de su conocimiento previo. En este trabajo mostraremos elementos de la comprensión de la definición de polígono por parte de futuros maestros de Educación Primaria.

Fundamentos teóricos

En el ámbito escolar pueden observarse básicamente dos formas diferentes de definir: una en la que la imagen del concepto se forma antes de formular una definición mediante el uso progresivo de propiedades específicas de algunos ejemplos de ese concepto, propiedades que serán utilizadas para construir esa definición, y otra en la que se proporciona una definición provisional que va cambiando a medida que se confrontan con ella ejemplos y no ejemplos del concepto. De Villiers (2004) denomina, respectivamente, definición descriptiva y constructiva a estos dos procesos, que otros autores nombran como estructural y procedimental (Zaslavsky y Shir, 2005). De todas formas, incluso en el proceso descriptivo, la primera definición que se proporciona va a sufrir un proceso de refinamiento, similar al proceso constructivo, en el que la búsqueda de eliminación de la ambigüedad y la capacidad de discriminar la equivalencia entre dos definiciones resultan esenciales (van Dormolen y Zaslavsky, 2003). Esto último también ha sido descrito como aspecto esencial por Okazaki (2013). Junto a estas aproximaciones didácticas, se definen las matemáticas escolares y, en particular, las definiciones escolares, como el resultado de la transposición del conocimiento formal al contexto de Educación Primaria. En este proceso de adecuación del saber matemático para su enseñanza se reelaboran las definiciones con fines específicos de enculturación matemática básica (Carrillo et al., 2016). Para Pascual et al. (2019) es coherente flexibilizar la consideración de algunas características básicas de una definición, como minimalidad y precisión, en un contexto de matemática escolar.

Algunos estudios han demostrado que los profesores de matemáticas tienen dificultades para establecer definiciones formales de conceptos matemáticos, aunque puedan proporcionar ejemplos de ellos. Estos estudios muestran cómo parecen percibir el significado de la definición, pero les cuesta proporcionar una (Özyıldırım-Gümüş y Şahiner, 2017). Algo similar se ha descrito con futuros profesores que, tras haber recibido formación específica sobre la definición de polígono siguen mostrando dificultades en la identificación de atributos imperativos o relevantes, como la existencia de un único interior continuo, lo que les genera dificultades ante polígonos compuestos o complejos, así como en la discriminación entre dos definiciones (Pascual et al., 2019).

En este trabajo nos centraremos en analizar cómo futuros profesores perciben, antes de la formación específica, las diferencias entre varias definiciones dadas, las diferentes formas que pueden usarse para clasificar un grupo de figuras planas y su capacidad de argumentar cuándo determinadas figuras planas dadas pueden ser utilizadas en el proceso de enseñanza del concepto de polígono. Esto nos informa de las herramientas que tienen estos EPM para la elección de una definición óptima de polígono y de su capacidad para discriminar sus propiedades.

Elementos metodológicos

Como se ha indicado, el objetivo de esta parte de la investigación es conocer las ideas previas de los futuros maestros acerca de las diferencias entre varias definiciones dadas y su definición de polígono, de las diferentes formas que pueden usarse para clasificar un grupo de figuras planas y su capacidad de discriminar sus propiedades, y de su argumentación sobre la idoneidad de determinadas figuras planas en el proceso de enseñanza del concepto de polígono.

Se trata de una investigación de corte interpretativo (Bryman, 2001) con la que pretendemos acercarnos a comprender los significados en las respuestas a un cuestionario inicial que realizaron los EPM participantes. Asimismo, se estructura en forma de estudio exploratorio (Hernández et al., 2010), de forma que permite arrojar luz sobre las ideas previas de los EPM para ayudar a la toma de decisiones en la formación inicial docente. Los informantes pertenecían a dos grupos de, respectivamente, 57 y 63 estudiantes para maestro de Primaria de la Universidad de Huelva que no habían recibido formación previa sobre didáctica de la geometría. Se les pidió responder a un cuestionario compuesto por dos actividades de elección múltiple y una actividad de respuesta abierta. En la primera actividad (Figura 1. Actividad 1) se les proporcionaban seis posibles definiciones de polígono y debían elegir las que les parecieran acertadas:

Figura 1.

Actividad 1

Selecciona la/s opciones que piensas que son correctas.

- a) Un polígono es una figura plana con borde.
- b) Un polígono es una línea continua con ángulos entre sus partes.
- c) Un polígono es la región plana delimitada por una línea quebrada donde puedo distinguir lo que está dentro de lo que está fuera.
- d) Un polígono es un conjunto de vértices y lados con área.
- e) Un polígono es la región plana delimitada por una línea poligonal cerrada que tiene la misma cantidad de vértices, lados y ángulos.
- f) Un polígono es una región delimitada por una línea poligonal cerrada, de manera que, dados dos puntos cualesquiera del mismo, el segmento que los une siempre está dentro de dicha región.

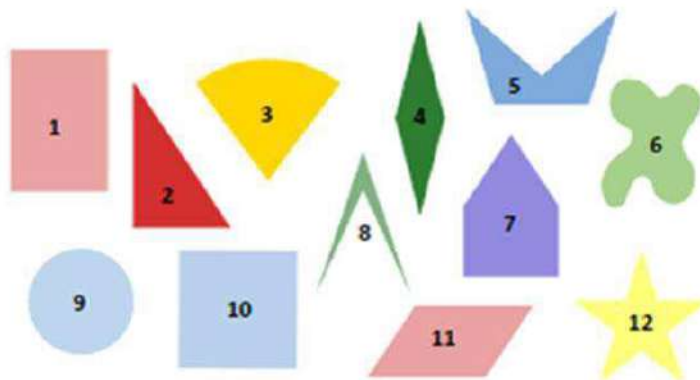
En la segunda actividad (Figura 2. Actividad 2) se les preguntaba acerca de las diferentes formas en que podría clasificarse un grupo de figuras planas. Aunque no se había previsto que explicaran la respuesta, algunos añadieron texto aclaratorio:

Figura 2.

Actividad 2

Señala de cuántas formas diferentes podrías clasificar las figuras que ves en la imagen:

- a) No se pueden clasificar
- b) Solo se pueden clasificar de una forma
- c) Se pueden clasificar de dos formas
- d) Se pueden clasificar de más de dos formas

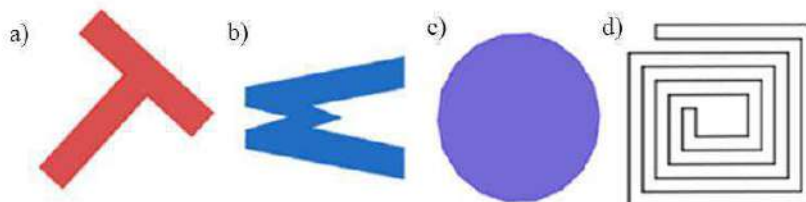


En la tercera actividad (Figura 3. Actividad 3) se les mostraba cuatro figuras planas y se les pedía seleccionar cuáles consideraban más adecuadas para trabajar el concepto de polígono en Primaria, argumentando su elección:

Figura 3.

Actividad 3

Imagina que eres maestro/a en ejercicio y te proponen las siguientes figuras:



Selecciona cuáles de ellas te parecen adecuadas para enseñar a tus alumnos lo que es un polígono. Justifica por qué la/s seleccionas y justifica por qué no seleccionas el resto

Las respuestas a las dos primeras actividades fueron codificadas en una hoja Excel con objeto de tener una valoración global cuantitativa de las opciones elegidas, anotando, en su caso, aquellas opciones que acompañaban alguna explicación. De la tercera se realizó un análisis de contenido atendiendo a los argumentos dados sobre las características de las figuras.

Resultados

Mostraremos los resultados separando las respuestas obtenidas en las tres actividades en cada uno de los grupos de clase.

En relación con la primera actividad, solo responden con una única opción 22 de los 57 EPM del primer grupo, y 19 de los 63 EPM del segundo grupo, siendo 15 y 10, respectivamente, los casos en que esa única respuesta es la e), y 7 y 8 donde la única respuesta es la f). Solo un EPM del segundo grupo proporciona como única respuesta la opción d), como muestra la tabla 1.

Tabla 1

Síntesis del recuento de respuestas a la primera actividad

Grupo	Respuestas				
	Opción d	Opción e	Opción f	Más de una opción	Sin respuesta
Grupo 1	0	15	7	34	1
Grupo 2	1	10	8	44	0

Con más de una opción responden 34 EPM en el primer grupo y 44 en el segundo. Las combinaciones de respuestas son muy variadas y no muestran un patrón en ninguno de los dos casos.

En relación con la segunda actividad, la respuesta mayoritaria es la opción d), con 38 y 44 respuestas, respectivamente. Se da la circunstancia de que, en el segundo grupo, algunos EPM añadieron texto para explicar cuáles podrían ser esas formas de clasificar, señalando, por ejemplo, que se pueden clasificar en *regulares, irregulares y no polígonos*, o en *regulares e irregulares*, en cóncavos y convexos, o *en función del número de lados*. 10 y 16 EPM, respectivamente, solo ven dos formas; y 4 y 2, respectivamente, una única forma. Sólo un EPM en cada grupo no identifica forma alguna de clasificación. Dos EPM del primer grupo y uno del segundo no responden (ver tabla 2).

En cuanto a la tercera actividad, en el primer grupo, la opción a) forma parte de casi todas las respuestas, combinada con las opciones b) y c) con argumentos de progresión. En 4 casos excluyen la opción a), y la opción d), sola o combinada, es la que más se excluye, con argumentos de dificultad o complejidad (solo en cuatro casos argumentan que *no es polígono*). Cuando excluyen la opción c) es por entender que la figura *es un círculo*. Los argumentos de exclusión más significativos, extraídos de las respuestas de los EPM, son que las figuras de las opciones a) y c) *no tienen puntos colineales*, mientras que las de las opciones b) y d) sí los tienen; que la figura de la opción b) *es más difícil de comprender al no tener ángulos rectos*; o que la figura de la opción d) *no tiene ningún interior*. En el caso del segundo grupo también la opción a) forma parte de casi todas las respuestas, e igualmente se combina con las opciones b) y c) con argumentos de progresión. También la opción d), sola o combinada, es la que más se excluye, con argumentos de dificultad o complejidad (en 5 casos argumentan que *no es polígono* y en tres que *no es cerrada*). Como en el otro grupo, cuando excluyen la opción c) es por entender que la figura es un círculo. El argumento de exclusión más significativo en este grupo es que las opciones a), b) y d) *son irregulares y, por lo tanto, no son polígonos*.

Tabla 2

Respuestas a la actividad sobre formas de clasificar

Grupo	Formas de clasificar				
	Más de dos formas	Solo de dos formas	Solo de una forma	De ninguna forma	Sin respuesta
Grupo 1	38	10	6	1	2
Grupo 2	43	16	2	1	1

Discusión de resultados y conclusiones

El hecho de que elijan más de una opción en la primera actividad pone de manifiesto dos aspectos: de un lado la necesidad de completar una opción con propiedades que aparecen en otras y, de otro, la dificultad de encontrar la equivalencia entre elementos de cada una de las opciones. Además, algunas opciones muestran dificultad en la identificación de los atributos imperativos, como *poligonal cerrada*, que excluye las opciones a) y b) (dentro de las opciones de 14 y 15 EPM, respectivamente), *región plana*, que excluye la opción d) (dentro de las opciones de 22 y 29 EPM, respectivamente). Admitiendo que el término *delimitada* de la opción c) implica el carácter cerrado, esta opción no excluye polígonos complejos (con un interior no unívoco). La opción f) excluye a los polígonos cóncavos. Como señalan Pascual et al. (2019), la opción e) podría considerarse válida por estar a medio camino entre una definición formal y una escolar. Una EPM no elige ninguna pues dice no entender el significado y pasa a definir polígono como *superficie plana limitada por una*

línea poligonal cerrada. La línea poligonal cerrada es un conjunto de segmentos unidos sucesivamente por sus extremos y, además, se considera cerrada cuando su principio y su fin coinciden. Descarta la opción c) y, sin explicar por qué, no le parece correcta la f).

En el caso de la segunda actividad, el texto añadido por algunos EPM del segundo grupo indica lo que parece estar detrás de la respuesta mayoritaria (en los dos grupos). No parece que entre esas opciones estén características de los polígonos como la simetría, la posición de sus diagonales, En las respuestas de la tercera actividad, la mayoría admite que todos son polígonos, lo que muestra capacidad de identificación de imágenes complejas del concepto, aunque se tengan dificultades para definirlo; además se observa toma de conciencia de la propia complejidad didáctica.

En general, en concordancia con otros estudios similares (Bernabeu, Moreno, y Llinares, 2021; Bernabeu, Llinares y Moreno, 2021) los resultados muestran la dificultad en la identificación de atributos relevantes en el proceso de definir, aunque se tengan imágenes precisas del concepto, llegando a darse algunos casos en los que se expresa abiertamente la dificultad de comprender el significado de algunas de las definiciones aportadas en el cuestionario. Lo primero se puede justificar en el hecho de que la práctica de definir que han vivido los EPM ha sido descriptiva, es decir, han desarrollado la imagen del concepto antes de formular la definición, como muestra la respuesta a la tercera pregunta. Esta falta de experiencias del proceso constructivo deriva en que no hayan gozado de oportunidades para ir excluyendo y generalizando a través de ejemplos adecuados para construir una definición. Además, se puede conjeturar la dificultad al comparar definiciones, lo que nos permite situar a los EPM en un nivel previo al de deducción informal (Haj-Yahya, 2022), nivel en el que deberían formular definiciones significativas y proporcionar argumentos informales para justificar sus razonamientos, además de establecer relaciones entre propiedades. Ello nos refuerza la idea de que los EPM deben tener oportunidades de abordar el proceso de definir desde una opción constructiva.

En este trabajo hemos analizado ideas previas de maestras y maestros en formación sobre la definición de polígono. Las dificultades encontradas avalan la pertinencia del diseño de tareas formativas centradas en la práctica matemática de definir, no solo por los objetivos pedagógicos que se alcanzan (Edwards y Ward, 2008), sino por el impacto que tiene en las aulas de Educación Primaria la formación de su profesorado.

Referencias bibliográficas

- Bernabeu, M., Moreno, M., y Llinares, S. (2021). Primary school students' understanding of polygons and the relationships between polygons. *Educational Studies In Mathematics*, 106, 251–270. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10012-1>.
- Bernabeu, M., Llinares, S., y Moreno, M. (2021). Levels of Sophistication in Elementary Students' Understanding of Polygon Concept and Polygons Classes. *Mathematics* 9(16), 1966. <https://doi.org/10.3390/math9161966>.
- Bryman, A. (2001). *Social Research Methods*. Oxford University Press.
- Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Montes, M. A., Escudero-Ávila, D. I., y Flores-Medrano, E. (Coords.) (2016). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros de Educación Primaria*. Paraninfo.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236–153. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>.
- De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703–724. <https://doi.org/10.1080/0020739042000232556>
- Edwards, B., y Ward, M. B. (2008). The role of mathematical definitions in mathematics and in undergraduate mathematics courses. En M. P. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and Teaching in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 223–232). Mathematical Association of America.
- Haj-Yahya, A. (2022). Students' conceptions of the definitions of congruent and similar triangles, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(10), 2703–2727. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1902008>
- Haj-Yahya, A., Hershkowitz, R., y Dreyfus, T. (2014). Investigating students' geometrical proofs through the lens of students definitions. En S. Oesterle, P. Liljedahl, C. Nicol, y D. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 3, pp. 217–224). PME.
- Hernández, R., Fernández, C., y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación (6ª ed.)*. McGraw-Hill
- Mariotti, M. A., y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219–248. <https://doi.org/10.1023/A:1002985109323>
- Okazaki, M. (2013). Identifying situations for fifth graders to construct definitions as conditions for determining geometric figures. En A. M. Lindmeier y A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 3, 409–416. PME.
- Özyıldırım-Gümüş, F., y Şahiner, Y. (2017). Investigation on how pre-service elementary mathematics teachers write and use mathematical definitions. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 9(3), 523–552.
- Pascual, M. I., Codes, M., Martín, J. P., y Carrillo, J. (2019). Cómo definen los estudiantes para maestro: análisis de sus definiciones de polígono. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano, y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 463–471). Valladolid
- Pimm, D. (1993). Just a matter of definition. *Educational Studies in Mathematics*, 25(3), 261–277. <https://doi.org/10.1007/BF01273865>
- Schwab, J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury y N. Wilkof (Eds.), *Science, Curriculum and Liberal Education: Selected Essays* (pp. 229–272). University of Chicago Press.
- Van Dormolen, J., y Zaslavsky, O. (2003). The many facets of a definition: the case of periodicity. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(1), 91–106.
- Van Hiele, P. M., y van Hiele, D. (1958). A method of initiation into geometry. En H. Freudenthal (Ed.), *Report on methods of initiation into geometry* (pp. 67–80). Walters.
- Zaslavsky, O., y Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317–346.

Tareas con GeoGebra y desempeño competencial en carreras de ingeniería

Betina WILLINER

**Universidad Nacional de La Matanza
San Justo, Buenos Aires, Argentina
bwilliner@unlam.edu.ar**

Resumen

Este artículo trata sobre la implementación de una tarea con software GeoGebra en el aula de matemática de carreras de ingeniería y el análisis del desempeño competencial de los alumnos que la realizaron. Forma parte de una investigación cuyo objetivo general es analizar qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de la guía del profesor. He trabajado con tareas clasificadas en cuatro niveles de acuerdo con su demanda cognitiva, con la interacción alumno-software y con la relación entre conceptos matemáticos que cada una propone. Aquí, se analiza la influencia del GeoGebra en el desarrollo de la competencia matemática en una tarea de nivel 4 en una comisión de Análisis Matemático II de carreras de ingeniería. Los resultados revelaron que los alumnos tuvieron buen desempeño en la capacidad fundamental “uso de herramienta” en cuestiones ligadas a la resolución de la tarea acorde a lo que indicaba la consigna. Cuando esta capacidad se combinó con el razonamiento y la argumentación, el nivel de desempeño no fue tan satisfactorio. Los estudiantes pudieron ver la situación explorando con el software, sin embargo, la mayoría no consiguió resolver la tarea satisfactoriamente.

Palabras clave: GeoGebra. Tareas. Competencia. Cálculo.

Introducción

Este artículo trata sobre la implementación de tecnología en el aula de matemática universitaria a través de tareas con el software GeoGebra (GG) y el desarrollo competencial puesto en juego. Más específicamente se centra en el análisis de una tarea llevada a cabo en una comisión de Análisis Matemático II de carreras de ingeniería de la Universidad Nacional de la Matanza (UNLaM).

Numerosos estudios dan cuenta de resultados favorables cuando se incorpora software, en particular GG, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En cuanto a estudios en habla hispana, Cenas Chacón et al. (2021) realizaron una revisión de artículos sobre el uso de este software a nivel universitario. La búsqueda se limitó a estudios de no más de cinco años de antigüedad, en revistas indexadas y que se refieran al aprendizaje de los alumnos. Encontraron 21 artículos de los cuales pudieron extraer que la mayor utilidad de GG es que le permite al alumno la comprensión y el descubrimiento de nociones a través de la visualización de imágenes y organización de datos y el análisis de manera más detallada de contenidos matemáticos en menor tiempo. Esto favorece a que se centre luego en procesos de reflexión, de razonamiento y de resolución de problemas.

Wassie y Zergaw (2018) seleccionaron artículos en revistas indexadas, conferencias e informes técnicos, desde 2002 a 2018, revisados por pares y publicados en inglés. Como reflexión general indican que la integración inteligente de este software en un aula adecuada crea un entorno flexible que involucra a los estudiantes y mejora el aprendizaje cooperativo.

A pesar de esto, la Educación Matemática sigue demandando estudios empíricos sobre cómo implementar el software para lograr aprendizaje en los estudiantes (García López et al., 2021, Wassie y Zergaw, 2018). El aporte sobre la forma de integrar GG en las clases de matemática, explorando su potencialidad resulta pertinente para la comunidad científica, por una parte, pero también para la comunidad educativa que desee desarrollar y evaluar experiencias de aula innovadoras basadas en el uso de tecnología.

El trabajo fue realizado por docentes de las asignaturas Análisis Matemático I y II de carreras de ingeniería de UNLaM. Desde el año 2007, junto al equipo nos dedicamos al estudio sobre la incorporación de tecnología en el aula a través de tareas. En un comienzo se trabajó con Wolfram Mathematica y, en la actualidad, se migró a GG. En todos estos años de indagación, en equipo, pudimos dar cuenta de que muchas de las tareas implementadas y también encontradas en la bibliografía tienen una demanda cognitiva media. En general, consisten en un applet diseñado por el docente o una serie de preguntas que guían al estudiante para realizar acciones con el programa. Ejemplos de éstas obran en Rodríguez et al. (2020), García Cuéllar et al. (2018) y González et al. (2018).

En virtud de las potencialidades disponibles en GG surgió como inquietud si, luego que el estudiante realiza tareas con las características descriptas anteriormente, es capaz de efectuar otro tipo de manipulación con el software y resolver tareas con demanda cognitiva más alta; por tanto, la pregunta formal fue: *¿qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de realizar los pasos que le indica el profesor?*

Se comenzó una investigación cuyo objetivo es diseñar e implementar tareas con el propósito anteriormente planteado. A su vez, el marco teórico elegido para analizar y evaluar el aprendizaje matemático de los estudiantes, luego de haber realizado las tareas con el software, es el de competencia matemática (CONFEDI, 2018; Lupiáñez y Rico, 2008 y OCDE, 2017). Se destaca que numerosos estudios corroboran el potencial del software GG para ayudar a los estudiantes a desarrollar capacidades fundamentales que aportan a tal competencia. Ejemplos de éstos son: García López et al. (2021) sobre competencia matemática general; Costa Llobet (2011) sobre matematización, Barrera Mora y Reyes Rodríguez (2018) sobre manejo de representaciones y razonamiento, entre otros.

En este artículo se presenta una de las tareas desarrolladas dentro de la investigación, su análisis preliminar en cuanto a las capacidades fundamentales promovidas, los resultados obtenidos en una de las comisiones de la materia y las conclusiones alcanzadas.

Marco teórico

Uso de tecnología en el aula universitaria a través de tareas

Uno de los softwares más utilizados en estos momentos en matemática es GG (en todas sus versiones). Barahona et. al. (2015), a partir de sus investigaciones realizadas con la incorporación de GG como herramienta tecnológica en el aprendizaje de la matemática, estimulan a los docentes al uso de esta tecnología en situaciones de visualización y de exploración, en clases interactivas, en diseño de material colaborativo y como apoyo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

GG es uno de los softwares de geometría dinámica más divulgado en las últimas dos décadas como herramienta complementaria para la enseñanza de la matemática que tiene la ventaja de ser de código abierto y adaptable a todos los niveles educativos (Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018). Incluye álgebra, geometría, cálculo, estadística, hoja de cálculo, gráficos con la posibilidad de incorporar actividades dinámicas. Su interfaz es de fácil uso. Se ha convertido en una comunidad con millones de usuarios en casi todos los países del mundo en la que comparten sus recursos y experiencias en apoyo a la educación en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas. Esto contribuye a la innovación en la enseñanza y aprendizaje en casi todas las latitudes (GEOGEBRA, 2020).

Además, GG brinda una serie de aplicaciones para usar en el celular que son gratuitas y disponibles para iOS, Android, Windows, Mac, Chromebook y Linux, lo que asegura la utilización en diversos dispositivos.

Aquí, se incorpora GG a través de tareas matemáticas. En el trabajo se adhiere a la definición que brindan Pochulu y Font Moll (2022) como toda situación de aprendizaje propuesta por el profesor como detonante de la actividad matemática del alumno, la cual está formada por una secuencia de momentos didácticos, los que incluyen desde la planificación de las actividades hasta los procesos comunicativos y la resolución.

A su vez, se toma la postura de Groenwald (2021) que, citando a Smith y Stein (1998), clasifica las tareas acordes a su demanda cognitiva en:

- Nivel 1: consisten en reproducir fórmulas, reglas y procedimientos ya aprendidos o ya establecidos. No son ambiguas, implican reproducir con exactitud algo visto anteriormente.
- Nivel 2: son algorítmicas. Utilizan procedimientos cuyo uso es obvio acorde a la información dada. No requieren explicaciones.
- Nivel 3: se usan procedimientos con el fin de lograr la comprensión en el estudiante. Se utilizan diferentes representaciones (gráfica, analítica, etc.) y los alumnos deben involucrarse con ideas conceptuales.
- Nivel 4: apelan a un pensamiento complejo y no algorítmico. Requieren que los estudiantes exploren y comprendan procesos matemáticos, que verifiquen, que comuniquen las ideas producidas.

En cuanto al diseño de tareas matemáticas con software, varios autores (Barahona et al., 2015, Campos Nava y Torres Rodríguez, 2018, Fiallo y Parada, 2014) coinciden en que existe una fase de exploración en la que predomina la habilidad visual y manipulativa y el alumno puede realizar conjeturas. Luego se pasa a una fase de formalización o institucionalización de los contenidos, siendo primordial la presencia del docente. A su vez, Muñoz-Escolano (2016) sintetiza las conclusiones del Seminario sobre enseñar matemática con GG que organizó el Centro Internacional de Encuentros Matemáticos (CIEM) en 2015; entre las cuales se recomienda que las tareas tengan dos momentos: un primer momento exploratorio con el software para favorecer la comprensión de la tarea y la aplicación eficaz de la técnica; y un momento posterior que consista en la resolución con lápiz y papel para favorecer la consolidación de lo realizado.

Competencia Matemática

El aprendizaje de los estudiantes se analiza mediante el desarrollo de la competencia matemática (CONFEDI, 2018; Lupiáñez y Rico, 2008, OCDE, 2017). “La competencia matemática es la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos. Incluye razonar matemáticamente y utilizar conceptos, procedimientos, herramientas y hechos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos” (OCDE, 2017, p.64). Esta competencia global se articula con siete capacidades fundamentales: comunicación, matematización, representación, razonamiento y argumentación, diseño de estrategias para resolver problemas, uso de operaciones y lenguaje simbólico y uso de herramientas.

Definimos las que se usan en este artículo:

- Comunicación (C): la lectura e interpretación de enunciados, preguntas, tareas u objetos le permite al estudiante formar un modelo mental de la situación. Durante el proceso de resolución, puede ser necesario resumir y presentar los resultados intermedios o finales.
- Razonamiento y argumentación (RA): implica procesos de pensamiento que exploran y conectan los elementos del problema para realizar inferencias a partir de ellos, comprobar una justificación dada, o proporcionar una justificación de los enunciados o soluciones a los problemas.
- Utilización de operaciones y lenguaje simbólico y formal (UOL): implica la comprensión, interpretación, manipulación y utilización de expresiones simbólicas en un contexto matemático y utilización de constructos formales basados en definiciones, reglas y propiedades.
- Uso de herramienta (UH): implica conocer y saber utilizar herramientas (físicas o tecnológicas) como ayuda a la actividad matemática y ser conscientes de sus limitaciones.

Metodología

El estudio estuvo guiado por los siguientes interrogantes: *¿qué tipo de tareas diseñar para que el alumno gradualmente incorpore el software a su actividad matemática sin necesidad de realizar los pasos que le indica el profesor? ¿cómo influye ese trabajo con GG en la competencia matemática de los estudiantes?*

En la primera etapa de la investigación se analizaron diversas tareas matemáticas con uso de GG en otros estudios y en propios. En particular, se analizó la demanda cognitiva de la tarea acorde al marco teórico y al tipo de interacción alumno-software (entendiendo por esto último al conjunto de acciones desarrolladas por el estudiante cuando utiliza el programa).

Como resultado de esta etapa se logró la siguiente clasificación (de acuerdo a la clasificación vertida en el Marco Teórico):

- Nivel 1: consisten en actividades donde el docente, junto a los alumnos, reproduce fórmulas, reglas y procedimientos, explica algún concepto nuevo usando el software a través del televisor del aula o computadora. Los estudiantes lo pueden seguir (o no) en sus dispositivos móviles. No son ambiguas. La interacción alumno-software es casi nula, se limita a hacer lo que dice el profesor o mira lo que éste hace en el televisor del aula.
- Nivel 2: son algorítmicas. Utilizan procedimientos cuyo uso es obvio acorde a la información dada. No requieren explicaciones. La interacción alumno-software consiste en utilizar algún comando conocido.
- Nivel 3: se usan procedimientos con el fin de lograr la comprensión en el estudiante. Se utilizan diferentes representaciones (gráfica, analítica, etc.) y los alumnos deben involucrarse con ideas conceptuales a través de pasos guiados por la consigna de la tarea o un applet diseñado por el docente. La interacción alumno-software es guiada por una consigna o por un applet.
- Nivel 4: requieren un pensamiento complejo y no algorítmico. Demandan que los estudiantes exploren diversas situaciones con el software, comprendan procesos matemáticos, relacionen conceptos estudiados, que verifiquen y que comuniquen las ideas producidas. La interacción alumno-software es alta, no se le indica lo que debe hacer para poder resolverlas.

Luego, en una segunda etapa, fueron diseñadas tareas de distinto nivel, contemplando tanto acciones con unos del software como con lápiz y papel, las cuales fueron elaboradas con el objetivo de influir positivamente en el desarrollo de la competencia matemática y en el uso flexible de la herramienta GG.

Contexto

La tarea que se muestra en este artículo se implementó en una comisión del turno mañana de la asignatura Análisis Matemático II formada por 30 estudiantes. Esta asignatura es cuatrimestral, de cuatro horas semanales y comprende los temas: teoremas de funciones derivables, teorema de L'Hopital, estudio de funciones, integrales indefinidas y definidas. Su acreditación es por promoción o mediante examen final. Los alumnos participantes cursaron el cuatrimestre anterior Análisis Matemático I, también cuatrimestral, de cuatro horas semanales, que contempla los temas: funciones, límite funcional, derivada y polinomios de Taylor. Es importante consignar que en ambos cuatrimestres fue utilizada GG como herramienta de trabajo en el aula y fuera de ella. Se implementaron tareas de nivel 1 que consistieron, por ejemplo, en la presentación del programa, el uso de los primeros comandos, las posibilidades de configuración, la definición de funciones por trozos, el uso del deslizador, entre otras. Esto se hizo mediante el televisor del aula y los dispositivos móviles de los alumnos. Las tareas algorítmicas de nivel 2 se hicieron en clase y consistieron en realizar cálculos, graficar, hallar raíces de funciones, calcular derivadas, extremos de funciones, etc. Las tareas de estos niveles ayudan al estudiante a familiarizarse con la herramienta, su interfaz y sus comandos. Las tareas de nivel 3 consistieron en consignas guiadas o involucraron un applet diseñado por los docentes. También se pusieron en juego tareas de nivel 4 (Williner y Favieri, 2023)

Seguidamente, se brinda la consigna de la tarea presentada en este artículo, su descripción y su análisis preliminar. Fue enviada a los estudiantes por el servicio de mensajería de la Universidad, y los mismos tuvieron un período de 48 horas para su resolución.

Tarea

Consigna

Un rectángulo tiene un vértice en (0,0), un lado sobre el eje x y otro lado sobre el eje y. El vértice opuesto a (0,0) está sobre la parábola $y = 2x^2 - 9x + 12$ con $0 \leq x \leq 3$. ¿Cuál es el área máxima posible para el rectángulo en ese intervalo?

Trabajo con GeoGebra: es libre, pero damos las siguientes sugerencias:

Para explorar con GeoGebra la situación del problema puedes graficar la parábola en el intervalo considerado, un punto móvil en la misma y un rectángulo formado como indica la consigna. Luego de analizar la situación, puedes también trabajar en GeoGebra la función a optimizar y buscar su extremo.

Justificar analíticamente en papel lo obtenido.

Descripción

Esta tarea reúne las condiciones de diseño ya que existe primero una etapa de manipulación y visualización con el programa y otra en entorno de lápiz y papel para formalizar lo estudiado. La consideramos de nivel 4. En efecto: se utilizan diferentes representaciones (esquema de la situación, gráfico y representación analítica), los alumnos se involucran con un problema de optimización a través de la construcción que deben realizar con el software y deben utilizar procedimientos conocidos para justificar analíticamente lo visto en GG.

En la resolución analítica se encuentran dos extremos relativos: máximo en abscisa $x = 1$ y área del rectángulo formado igual a 5 unidades de área y mínimo en abscisa $x = 2$ y área del rectángulo formado igual a 4 unidades cuadradas. La función tiene un máximo absoluto en el punto de abscisa $x = 3$ con área del rectángulo formado (que termina siendo un cuadrado) igual a 9 unidades de área.

Análisis preliminar de capacidades específicas

En los cuadros analizamos las capacidades específicas que promueve la tarea y aclaramos a qué capacidad fundamental contribuye. Realizamos un análisis para lo realizado con el software y otro para la producción en lápiz y papel.

Capacidad específica Archivos en GG	Capacidad fundamental
Ingresa en GG la función cuadrática	UH/C
Arma un rectángulo con Vértices (0,0); (x, f(x)), (x,0) y (0, f(x))	UH/C
O arma un rectángulo a través de un punto móvil y otros puntos que dependen de éste (Salvo (0,0))	UH/C
El rectángulo varía y conserva su figura cuando x varía entre 0 y 3	UH/R
Muestra de alguna manera la variación del área	UH
Ingresa la función área a optimizar	UH/RA
Busca los PC de la función área	UH
Aplica método para saber si es máximo o mínimo	UH
Utiliza comando Extremo o Máximo o Mínimo para obtener el extremo relativo	UH

Cuadro 1. Capacidades específicas y fundamentales. Archivos en GG

Capacidad específica Archivos en lápiz y papel	Capacidad fundamental
Explica en palabras lo que realizó o va a realizar definiendo las variables que intervienen	C
Define la función área del rectángulo	RA
Comunica lo que hizo en GG para obtener el máximo relativo	C
Analíticamente busca el máximo relativo primero buscando PC y luego aplicando método	UOL
Compara lo que obtiene analíticamente si hizo las dos cosas	UH/RA
Saca como conclusión que el máximo absoluto está en $x = 3$	UH/RA/C
Justifica su conclusión	RA

Cuadro 2. Capacidades específicas y fundamentales. Archivos lápiz y papel

Resultados

Se analizaron las producciones de 30 alumnos. Cada alumno presentó dos archivos: uno en lápiz y papel con la justificación de todo lo realizado, la conclusión extraída y fundamentada, y el otro en extensión ggb con todo lo planteado en GG, este último se envió por mensajería a través de la plataforma de la Universidad.

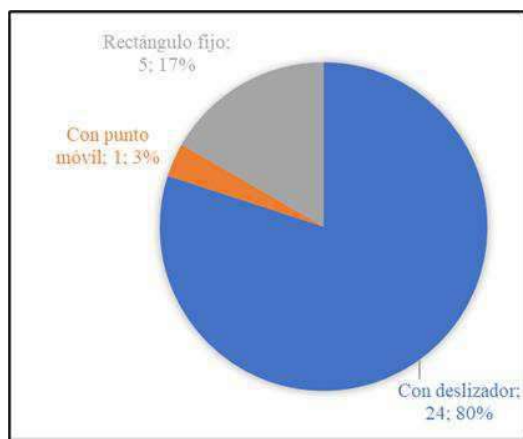
Las capacidades específicas definidas en el cuadro 1 y 2 se valoraron con B (bien), R (regular), M (mal) y No (no lo hizo), acorde a la rúbrica mencionada previamente.

Seguidamente, se muestran, por cada capacidad específica, las frecuencias obtenidas. En algunos casos, se presentan gráficos para exponer los resultados.

En cuanto a los archivos en GG todos los alumnos ingresaron la función cuadrática, siendo 24 los que crearon un rectángulo usando un deslizador, representando a la abscisa del punto móvil, variando entre 0 y 3. Un alumno utilizó la herramienta punto móvil para construir el rectángulo variable, y 5 alumnos diseñaron un rectángulo que se desarmaba al mover algún punto.

Respecto a la capacidad específica: *muestra de alguna manera que el área del rectángulo varía*, 9 alumnos, mediante texto en la ventana gráfica, mostraron cómo el área iba cambiando, otros 6 dejaron el cálculo del área sólo en la ventana algebraica y algunos no evidenciaron esta capacidad.

A continuación se muestran los dos últimos resultados en los gráficos:



Capacidad específica Construcción del rectángulo



Capacidad específica Muestra la variación del área

Figura 1. Frecuencias absolutas y relativas de dos capacidades específicas.

19 alumnos ingresaron la función a optimizar, pero solo 5 son quienes buscaron los extremos usando GG con el comando Extremo o Máximo.

Con respecto a las producciones en lápiz y papel, 19 alumnos explicaron con palabras lo que hicieron o plantearon en GG en forma correcta, 7 alumnos se expresaron en forma regular y 4 alumnos no lo hicieron. Todos definieron la función a optimizar en función de la abscisa x de uno de los puntos. En relación a la búsqueda de los extremos relativos, 25 lo hicieron bien, encontrando los puntos críticos y luego aplicando el método de la derivada segunda o del cambio de signo de la derivada primera en el contexto del problema. Ninguno de los 5 que trabajó con GG retomó lo hecho en el programa, sino que lo volvió a hacer.

Fueron 16 alumnos quienes extrajeron bien la conclusión en cuanto a que el área máxima posible es 9 unidades de área, correspondientes a un cuadrado de lado $x = 3$, sólo 8 justificaron bien esta conclusión.

Del análisis efectuado sobre los archivos en GG se pudo extraer que un 67% de los estudiantes cambió el color de las funciones o de los segmentos que formaron el rectángulo en cuestión, un 23% utilizó otras etiquetas (no las dadas por default) y por otro lado, un 40% utilizó texto en la ventana gráfica. Esto refleja, en parte, un manejo de la herramienta en sí misma, con sus comandos y configuraciones. Además, la forma de presentar trabajos tiene que ver con la motivación e interés personal, el gusto o no por entregarlos de la mejor manera posible, etc.

En un análisis cualitativo de las producciones de los alumnos se pudo obtener que de los 16 alumnos que mostraron de alguna forma la variación del área del rectángulo, 7 alumnos dedujeron que el área máxima estaba en el rectángulo de abscisa $x = 3$ y lo justificaron bien; en tanto que los 9 alumnos restantes concluyeron que el área máxima estaba en el máximo relativo.

A modo de ejemplo, se muestra la producción de un alumno que advirtió la diferencia de lo obtenido analíticamente con lo visto en el software, pero lo aceptó, quizás, sin cuestionarlo.

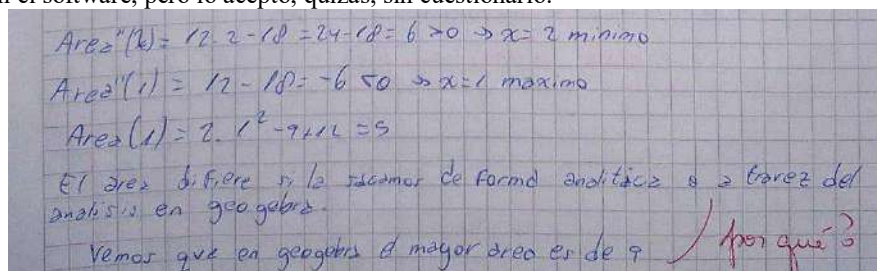


Figura 2. Respuesta de un alumno

Seguidamente, se consigna la producción de otro alumno, que había graficado la función área y definido un texto con ese valor variando, y apeló al concepto de función en contexto para justificar la diferencia de lo que el mismo obtuvo y lo que vio en GG.

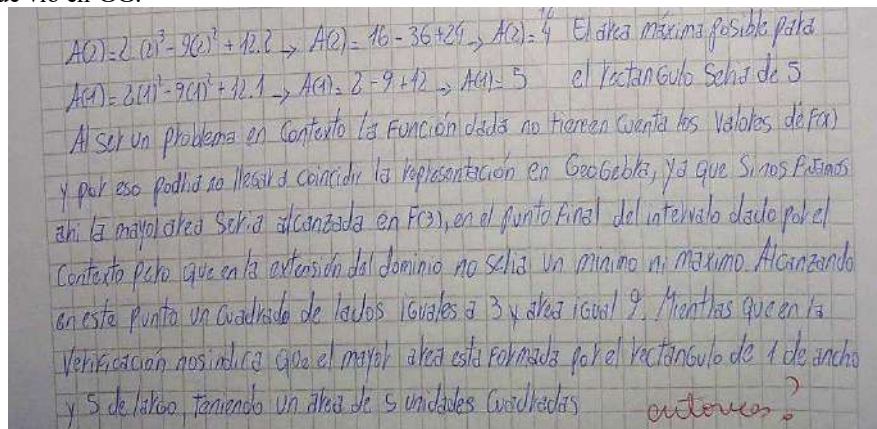


Figura 3. Respuesta de otro alumno

Discusión de los resultados

Algunas capacidades específicas surgidas en el análisis preliminar no se manifestaron en las producciones de los alumnos: por ejemplo, buscar extremos usando la derivada y el comando Resuelve en GG, retomar lo que se hace en el programa o, si hizo las dos cosas, compararlo.

La mayoría de los alumnos no usó el programa para calcular los extremos relativos. Puede ser que se hayan limitado sólo a la consigna (por más que era libre) o que hayan entendido que todo ese desarrollo debía estar en la producción en lápiz y papel. Los que lo hicieron con el comando Extremo o Máximo no lo retomaron en la producción escrita, esto es, no hicieron ninguna comparación entre lo obtenido en el software y lo realizado por ellos.

Respecto a la capacidad fundamental UH podemos decir que, en general, los estudiantes evidenciaron un buen desempeño en la mayoría de las capacidades específicas establecidas en el cuadro 1 que tienen que ver con un manejo ligado a la consigna. Justamente la posibilidad de usar el software para establecer los extremos relativos de la función área (no establecida en la consigna) sólo la utilizó el 17% de los estudiantes.

En cuanto esa capacidad fundamental (UH) se pone en juego para poder visualizar que el área máxima estaba en el extremo absoluto y no en el relativo, los resultados no fueron tan favorables. En este caso esta capacidad se combina con RA que implica procesos de pensamiento que exploran y conectan los elementos del problema para proporcionar una justificación de la solución.

En los archivos de lápiz y papel, los alumnos evidenciaron buen desempeño en las otras capacidades.

Conclusiones

En toda la bibliografía se encuentra la potencialidad del software para explorar distintas situaciones. Como indican Bayazit y Aksoy (2010), la ventana algebraica se actualiza inmediatamente en la gráfica, característica que permite comprender los vínculos conceptuales entre las representaciones de un concepto matemático. En esta oportunidad esa conexión la hicieron la mitad de los alumnos, pero sólo un 26% realizó una argumentación correcta.

Se puede considerar esta situación como un efecto sorpresa en los alumnos, tal como lo definen Arcavi y Hadas (2000). Estos autores indican que la experimentación que realiza el alumno con el software se puede acompañar con un tipo de pregunta para que haga predicciones explícitas sobre algún fenómeno estudiado pero que luego haya diferencia con el verdadero resultado. La sorpresa se convierte en un disparador para que el alumno vuelva a analizar su predicción. En esta tarea, varios alumnos pudieron reflexionar sobre el resultado, pero luego de haber conocido la corrección de su producción.

Si bien, como fue indicado en la introducción del artículo, la bibliografía en su mayoría establece que el uso del GG permite al alumno la comprensión y el descubrimiento de nociones mediante la visualización de imágenes, en este caso no fue así. El equipo sostiene que la orientación del docente es fundamental. Esta misma tarea realizada en el aula con la guía del profesor a través de preguntas o sugerencias quizás hubiese tenido resultados diferentes. En cuanto al desarrollo de las capacidades fundamentales, se concluye un buen desempeño en UH, UOL, C y en menor medida, RA.

Con todo lo expresado previamente, resta seguir con el proyecto de investigación, diseñando, implementando y analizando tareas con GG de diferente nivel acorde al marco teórico con el objetivo que el alumno pueda incorporar el software como una herramienta que lo ayude a lo largo de su proceso de aprendizaje.

Referencias Bibliográficas

- Arcavi A. y Hadas, N. (2000). *El computador como medio de aprendizaje: ejemplo de un enfoque* <http://www.scribd.com/doc/15782300/LA-PC-COMO-MEDIO-DE-APRENDIZAJE>Arcavi2000.
- Barahona, F., Barrera, O., Vaca, B. y Hidalgo, B. (2015). GeoGebra para la enseñanza de la matemática y su incidencia en el rendimiento académico estudiantil. *Revista Tecnológica ESPOL (RTE)*, 28 (5), 121-132.
- Barrera Mora, F. y Reyes Rodríguez, A. (2018). El rol de la tecnología en el desarrollo de entendimiento matemático vía la resolución de problemas. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 41-72.
- Bayazit, I. y Aksoy, Y. (2010). Connecting Representations and Mathematical Ideas with GeoGebra. *GeoGebra: The New Language for the Third Millennium*, 1(1), 93-106.
- Campos Nava, M. y Torres Rodríguez, A. A. (2018). Diseño de Tareas de Aprendizaje Matemático con GeoGebra: Mecanismos Articulados. *Pädi. Boletín Científico del Instituto de Ciencias Básicas e Ingeniería*, 10, 80-85.
- Cenas chacón, F. Y., Gamboa Ferrer, L. R., Blaz Fernández, F. E. y Castro Mendocilla, W. E. (2021). GeoGebra: herramienta tecnológica para el aprendizaje significativo de las matemáticas en universitarios. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 5 (18), 382-390.
- CONFEDI. (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en La República Argentina "libro rojo de CONFEDI"* https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf
- Costa Llobet, J. (2011). Plataforma de matematización en un entorno GeoGebra dentro de un planteamiento didáctico "desde abajo hacia arriba". *Enseñanza de las ciencias*, 29(1), 101-114.
- Fiallo, J. y Parada S. (2014). Curso de precálculo apoyado en el uso del GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional. *Revista Científica*, 20, 56-71.
- García Cuéllar, D., Martínez Miraval, M. y Flores Salazar, J. (2018). Genesis instrumental de la razón de cambio instantánea mediada por GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31 (2), 1876-1883.
- García López, M, Romero Albaladejo, I. y Gil Cuadra, F. E. (2021). Efectos de trabajar con GeoGebra en el aula en la relación afecto-cognición. *Enseñanza de las Ciencias*, 39(3), 177-198.
- GEOGEBRA. (2020). *¿Qué es GeoGebra?* <https://www.geogebra.org/about>.
- González, C., Vigo, K., Saravia, N. y Advíncula, E. (2018). Una secuencia didáctica para la comprensión del concepto de derivada mediada por el software GeoGebra. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1352-1358.

- Groenwald, C.L.O. (2021). Educación Matemática y Tecnología: planificación de tareas de investigación centradas en el aprendizaje de los estudiantes. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 63, 1-16.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA*, 3(1), 35-48.
- Muñoz-Escolano, J. (2016). Crónica del encuentro: Enseñar matemáticas con GeoGebra: retos, roles, resultados. *Revista Suma*, 81.
- OCDE. (2017). *Marco de Evaluación y de Análisis de PISA para el Desarrollo: Lectura, matemáticas y ciencias, Versión preliminar*. OECD Publishing, París.
- Pochulu, M. y Font Moll, V. (2022). Herramientas y constructos del enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos para el diseño y análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje. En Rodríguez, M.; Pochulu, M. y Espinosa, F. (coordinadores). *Educación matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 2*. Los Polvorines: Universidad Nacional de General Sarmiento, p. 15-48.
- Rodríguez, L., Bravo, J.L., Pérez, A. y Rodríguez, N.C. (2020). El GeoGebra como recurso didáctico para la comprensión de las formas indeterminadas de límite. *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 33 (1), 751-762.
- Wassie, Y.A. y Zergaw, G.A. (2018). Capabilities and Contributions of the Dynamic Math Software, GeoGebra—a Review. *North American GeoGebra Journal*, 7(1), 68-86.
- Williner, B. y Favieri, A. (2023). Tareas con GeoGebra en el aula universitaria: matematización horizontal y vertical. *Números 113*, 81-93.

Uso de TIC en estudiantes iniciales del nivel superior que resuelven problemas matemáticos

Gustavo CARNELLI, Martín CHACÓN
Universidad Nacional de General Sarmiento
Los Polvorines, Argentina

gcarnelli@campus.ungs.edu.ar, machacon@campus.ungs.edu.ar

Resumen

La inclusión de recursos tecnológicos para favorecer el aprendizaje de la matemática es uno de los temas que tiene un interés creciente en la investigación en educación matemática y también en la actividad docente. Nos propusimos avanzar aquí en el conocimiento de los recursos tecnológicos a los que apelan estudiantes iniciales del nivel superior cuando resuelven problemas matemáticos y cómo y para qué los utilizan. Entrevistamos a parejas de estudiantes de primer año de un instituto terciario de CABA en dos momentos distintos. Diseñamos dos problemas, uno del campo algebraico y otro del campo geométrico (de los que mostramos un breve análisis a priori), les dimos algunos días para que los discutieran y resolvieran y, luego, acordamos una entrevista en la que les pedimos que nos contaran la resolución y todo lo utilizado en ella. Nuestra intención fue registrar qué recursos tecnológicos decidieron usar, cómo y para qué los utilizaron en las resoluciones. Encontramos que apelaron a software matemático que estaba integrado a las clases de algunas asignaturas y no en los casos en que este había tenido un uso incipiente en ellas. El buscador de Google tuvo un uso más amplio al que previmos y el uso de GeoGebra les permitió ver relaciones matemáticas que sin su uso no hubieran hallado, lo que habla de un uso imprescindible de las TIC.

Palabras Clave: TIC. Aprendizaje. Geometría. Cálculo. Resolución de Problemas.

Introducción

Uno de los temas que tiene un interés creciente en la investigación en educación matemática y también en la actividad docente es la inclusión de TIC para favorecer el aprendizaje de la matemática. En este trabajo nos propusimos avanzar en el conocimiento de los recursos tecnológicos a los que apelan estudiantes iniciales del nivel superior cuando resuelven problemas matemáticos de cierta complejidad, y cómo y para qué los utilizan.

Bajo esta idea, trabajamos con estudiantes de primer año del profesorado de Matemática del Instituto Superior del Profesorado “Dr. Joaquín V. González”, ubicado en la Ciudad Autónoma de Buenos Aires, a quienes les planteamos consignas que consideramos que configuran un problema desde la perspectiva de Polya (1989) y que promoverían un buen uso de TIC. Nuestra intención fue recabar información acerca del uso de TIC para aprender matemática. En particular, queríamos saber: ¿A qué recursos tecnológicos apelan ante la necesidad de resolver una consigna matemática compleja? ¿Para qué los usan? ¿Cómo los usan? ¿Los ayudó su uso para resolver? ¿De qué manera? Luego de darles unos días para resolver las consignas a parejas de estudiantes que seleccionamos, realizamos entrevistas en las que pretendimos avanzar sobre lo mencionado.

Para el diseño de las consignas nos basamos en determinados elementos teóricos: para que resultaran problemas en el sentido mencionado tuvimos en cuenta los desarrollos de Rodríguez (2012), Marino y Rodríguez (2009) y de Nápoles Valdés y Cruz Ramírez (2000); además, dispusimos de los criterios para evaluar la pertinencia y la significatividad en el uso de TIC en las actividades para la clase que propone Rodríguez (2022). En cuanto a una clasificación de los recursos y sus posibles usos al aprender matemática, consideramos los aportes de Bravo (2016).

Recursos tecnológicos en la clase de matemática

Antes de reflexionar sobre los recursos tecnológicos, precisamos qué entendemos por problema. Existe variada bibliografía con discusiones sobre esta noción; sin embargo, tomaremos aquella que se ajusta a lo que queremos ver, a saber:

Un *problema para un individuo* es una situación que requiere solución y éste, estando motivado (u obligado por las circunstancias académicas, personales o vitales) no posee ni vislumbra el medio o camino que conduzca a la misma, al menos en lo inmediato (Chacón, Farías, González y Poco, 2009)

De la definición se desprende que una situación es o no es un problema dependiendo del individuo que se enfrentará a ella. Además, para que resulte problema, el individuo deberá querer resolverlo y no conocer de antemano el camino.

Respecto de la inclusión de recursos tecnológicos en la enseñanza de la matemática, es amplia la producción académica. Entre otros autores, Balladares Burgos (2017) ha investigado la dinámica de los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática sustentados en las tecnologías computacionales. Expone lo importante que es la utilización metodológica de las tecnologías computacionales en la formación matemática, la que contribuye a alcanzar niveles de calidad y efectividad. Por su parte, Gamboa Araya (2007) destaca la importancia del uso de recursos tecnológicos en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la matemática siempre y cuando este proceso sea bien dirigido por el profesor. Este autor ha analizado situaciones en las que los recursos tecnológicos permiten a las/os estudiantes realizar observaciones y obtener conclusiones que se dificultan o se imposibilitan sin el uso de TIC

Otro antecedente que podemos considerar es el de Villarreal Farah (2010), que en su tesis doctoral analiza la actividad de docentes y estudiantes al involucrar el uso de TIC en la resolución de problemas matemáticos abiertos. En esta línea, Pizarro (2009), en su tesis de maestría, propone la utilización de un nuevo software educativo para resolver problemas de cálculo numérico y analiza su aplicación en cursos de esa asignatura.

Para nuestro interés, resulta destacada la producción de Bravo (2016), que presenta una clasificación de los recursos que pueden ser utilizados para aprender matemática, agrupándolos y asignándoles diferentes usos. Cabe destacar que esta clasificación está centrada en el uso que hacen quienes aprenden de los recursos promovidos por la enseñanza en la clase de matemática. En el primer grupo se incluyen los dispositivos personales y aplicaciones, como la calculadora científica, la computadora con o sin acceso a internet, y software y aplicaciones específicas de matemática para realizar operaciones, graficar, visualizar y hacer construcciones geométricas. En el segundo grupo ubica las tecnologías utilizadas asiduamente antes de la existencia de los dispositivos modernos tales como: pizarrón, tiza, lápiz, papel, útiles geométricos y libros en papel; estos son utilizados para hacer construcciones, organizar información, producir escritos y documentar resoluciones. Por último, considera la web dentro de un tercer grupo, como medio de comunicación o de consulta de sitios con contenidos matemáticos. Este recurso sirve para trabajar a distancia, comunicarse con pares, compartir materiales y buscar información. Respecto de los usos mencionados anteriormente en los distintos grupos, este autor considera pertinente categorizarlos y vincularlos a *producir matemática* (visualizar, hacer operaciones, graficar, hacer construcciones, producir materiales), a *recibir información matemática* (buscar información, aprender contenidos, leer materiales) y a *comunicar información matemática* (exponer trabajos, producir escritos con nomenclatura matemática, organizar información). Estas categorías referidas a producir matemática, recibir y comunicar información están atravesadas por una cuarta, vinculada a *favorecer la comunicación* (trabajar colaborativamente a distancia, comunicarse con otros, compartir materiales, hacer preguntas y compartir respuestas, usar aulas virtuales). En la experiencia que reportamos aquí, los recursos tecnológicos aparecen vinculados a la categoría de comunicar información matemática y también –aunque en otro plano– a la de favorecer la comunicación, ya que muy posiblemente se dé un trabajo a distancia entre las parejas de estudiantes que convocamos.

También en función de nuestro interés, podemos considerar los criterios que aporta Rodríguez (2022) para evaluar la pertinencia y significatividad en el uso de TIC en tareas matemáticas diseñadas para el aprendizaje. Entre ellos, destacamos dos: el de no perder de vista el objetivo matemático y el de imprescindibilidad, que refiere a que haya relaciones matemáticas que sin el uso de TIC permanecerían ocultas.

Este trabajo tiene como antecedente un estudio que llevamos a cabo con estudiantes de primer año de la misma institución, en el que implementamos y analizamos el uso de algunos recursos tecnológicos en la clase de matemática, tales como, aplicaciones de mensajería, aulas virtuales y plataformas de videoconferencias. A partir de los resultados obtenidos, pudimos evidenciar dificultades relacionadas con el uso del lenguaje simbólico al momento de presentar producciones o realizar consultas, la complejidad de mantener un intercambio fluido bajo una modalidad no sincrónica y la posibilidad de realizar intervenciones docentes enriquecedoras. Cabe destacar que el uso de la videoconferencia resultó beneficioso, ya que potenció la interacción entre los actores respecto de otros recursos (Carnelli y Colombano, 2022). En esa oportunidad mencionada, trabajamos con grupo de clase completo, mientras que ahora nos interesa estudiar algunos casos de estudiantes.

Descripción de la experiencia

Diseñamos dos consignas que consideramos que resultarían problemas para estudiantes que se inician en los estudios de nivel superior y que, además, promueven un uso pertinente y significativo de TIC. Afirmamos esto por haber realizado un análisis a priori que no desarrollamos en detalle por razones de extensión, pero describimos brevemente más adelante. Los dos problemas son los siguientes:

Problema 1: Dados dos segmentos, se consideran todos los cuadriláteros (convexos) que los tienen por diagonales. ¿Algunos de esos cuadriláteros tienen la misma área? ¿Hay alguno de esos que tenga la mayor área? Justificar

Problema 2: Considerar la familia de funciones $f_a: \rightarrow, f_a(x) = ax^2 + a$ ($a \in R, a > 0$). ¿Cuáles de ellas satisfacen que la intersección entre su gráfico y el de su inversa ...
 (a) es un único punto? (b) es más de un punto? (c) es vacía? Justificar

Realizamos una intervención didáctica con estudiantes del primer año del profesorado de Matemática en el Instituto Superior del Profesorado Dr. Joaquín V. González. Lo hicimos en dos momentos distintos: a fines de 2022 les propusimos a dos grupos de dos estudiantes la realización del Problema 1 y a fines de 2023 les propusimos a un grupo de dos estudiantes y a otro estudiante la realización de los dos problemas. Pensamos que el intercambio entre dos estudiantes podría favorecer la riqueza de la producción y la variedad en el uso de recursos. La selección de estudiantes fue propuesta por uno de los investigadores del equipo que tiene a su cargo una asignatura del primer año de la mencionada institución. Se invitó a estudiantes con un buen rendimiento y compromiso con su aprendizaje. En el caso del segundo grupo de 2023, se frustró la participación de un estudiante, por lo que quedó uno solo. A partir de consultas realizadas sobre el uso específico de software matemático, supimos que el curso había trabajado con GeoGebra (GGB) en Geometría I y en Análisis Matemático I, y también con Photomath en Álgebra; además, se hicieron algunas menciones a Wolfram Alpha, pero no estuvo integrado a las actividades de clase. Vale precisar que los grupos de 2022 tuvieron una cursada reducida de Geometría, que comenzó cerca del receso de invierno y que, en ambos casos, la experiencia se realizó hacia fines del año correspondiente.

Una vez que les pasamos los problemas, les dimos unos días para que los trabajaran. Les pedimos que no se comunicaran entre los grupos y que no consultaran a otras personas. Fuera de eso, podían apelar a lo que les resultara de utilidad y debían registrar esos insumos. No les comunicamos nuestro interés específico para no condicionar la resolución e, intencionalmente, no les dijimos si podían o no usar TIC. Luego, acordamos una entrevista con cada grupo por separado que fue realizada por videoconferencia, dada la dificultad de encontrar un momento común dentro de un margen razonable de días posteriores al envío de los problemas. Las entrevistas fueron grabadas y se centraron en conocer en detalle cómo resolvieron, qué utilizaron y por qué. No realizamos intervenciones que permitieran desbloquear, avanzar, aprender, etc.

Análisis a priori de los problemas

Haremos una descripción sucinta de posibles caminos, sin mayores evidencias.

Resoluciones sin TIC del Problema 1

A partir de la fórmula que permite obtener el área A de cualquier cuadrilátero convexo de diagonales de longitud D y d y que forman un ángulo α : $A = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d \cdot \text{sen}\alpha$, puede analizarse que para que los cuadriláteros de diagonales con longitud fija tengan igual área debe ocurrir que sus diagonales se corten formando el mismo ángulo. Y de un análisis del comportamiento de la función seno, puede concluirse que los que tienen mayor área son aquellos que sus diagonales son perpendiculares. La fórmula anterior no suele ser enseñada en la escuela secundaria y no figura en los diseños curriculares, al menos de la ciudad y de la provincia de Buenos Aires. Tampoco la hemos encontrado en distintos libros destinados a la escuela secundaria, ni manuales de materias de materias iniciales del nivel superior.

La fórmula puede deducirse si se introduce un objeto auxiliar. Al trazarse las paralelas a las diagonales por los cuatro vértices del cuadrilátero, resulta un paralelogramo tal que sus lados consecutivos son congruentes a las diagonales y el

ángulo entre ellos es congruente al ángulo entre ellas (ver *Figura 1*). Resulta que el área del cuadrilátero tiene es la mitad del área del paralelogramo. Puede obtenerse el área del paralelogramo a partir de los lados y el ángulo comprendido usando trigonometría del triángulo rectángulo.

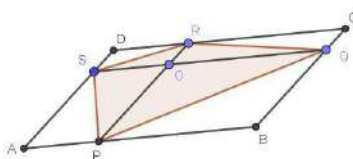


Figura 1

Creemos que esta deducción es dificultosa, sobre todo por la necesidad de la introducción de un objeto auxiliar.

Resoluciones con TIC del problema 1

Podría hacerse una búsqueda en internet. Al leer el problema, no es explícito que el ángulo entre las diagonales es importante, con lo que una posible búsqueda podría contener el pedido de fórmula del área de los cuadriláteros convexos a partir de sus diagonales. En diferentes búsquedas no ha aparecido la fórmula. Salvo en un caso, algo escondida entre los resultados de búsqueda. Al encontrarla se hace un análisis como el anterior. Si se desconociera el comportamiento del seno, podría hacerse un gráfico con algún software dando valores específicos a D y d .

Usando GGB, por ejemplo, pueden introducirse dos segmentos de longitud fija que serán las diagonales, luego dibujar el cuadrilátero y pedir el área. Al realizar exploraciones podría advertirse que tienen igual área aquellos cuadriláteros cuyas diagonales se cortan formando ángulos congruentes.

Resoluciones sin TIC del Problema 2

Se busca la intersección entre dos familias de curvas. Puede plantearse una ecuación de grado 4 que surge a partir de igualar la expresión de la función dada y su inversa:

$$ax^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$$

Al manipular, la expresión que surge es $a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a = 0$, pero su resolución es inconducente debido a la falta de conocimiento disponible para resolverla.

Por otro lado, puede considerarse la simetría entre una función y su inversa respecto a la recta $y = x$, y entonces, se puede estudiar la ecuación de grado 2 $ax^2 + a = x$. El análisis del discriminante revela que el único valor real positivo que satisface la ecuación es $a = \frac{1}{2}$. Del mismo análisis puede interpretarse para qué valores a hay ninguna o más de una solución. Si $a < \frac{1}{2}$ hay más de dos puntos de intersección, si $a > \frac{1}{2}$ no hay puntos en común.

Resoluciones sin TIC del Problema 2

Puede utilizarse el software GGB para explorar la intersección de las curvas. Mediante una animación, puede observarse que hay un valor para el cual hay un único punto común, y que para valores menores o mayores que este, no hay puntos comunes o hay dos puntos comunes, respectivamente. Ese valor es $a = \frac{1}{2}$. Esta exploración permite una comprensión global de la situación y facilita la resolución analítica. Por ejemplo, el software puede dar la fórmula inversa y plantear la primera ecuación mencionada en la resolución sin TIC. También, podría advertir la que la intersección buscada, es la misma que entre la curva original y la recta de ecuación $y = x$ y continuar como lo mencionado en la resolución sin TIC. Por otro lado, es posible retomar la ecuación de grado 4 y utilizar un motor de cálculo, por ejemplo, Wolfram Alpha. El software ofrece una factorización de la expresión y soluciones para las dos ecuaciones que surgen al igualar a 0 cada cuadrática: $(ax^2 + a - x)(a^2x^2 + a^2 + ax + 1) = 0$. La visualización en las gráficas podría facilitar la interpretación de los símbolos en las ecuaciones. Es posible lograr las mismas respuestas ya mencionadas.

Síntesis de las resoluciones en los grupos

A continuación, presentamos una síntesis de las resoluciones de los cuatro grupos.

Problema 1

Grupo 1 2022. Partieron de situaciones particulares que les resultaban familiares: cuadriláteros con diagonales congruentes y que se intersecan en su punto medio; dijeron que podía ser un cuadrado, un rectángulo o un trapecio isósceles (este último no cumple esa propiedad). Expresaron que con esto no llegaron a ninguna conclusión. Luego, pasaron al caso de que no se intersecaran en su punto medio.

Asumieron que el área de los cuadriláteros se calculaba como el semiproducto de las diagonales, que dijeron conocer de la escuela secundaria. Confirmaron en internet que la fórmula existía, usando el buscador de Google (esta fórmula es conocida para rombos y romboides y su alcance es para cualquier cuadrilátero de diagonales perpendiculares). En la búsqueda, encontraron otra que contenía al seno de un ángulo, pero no los convenció y la descartaron porque la que tenían era simple y la recordaban (se refieren a la usada en el análisis a priori). En ningún momento del intercambio detectaron contradicciones sobre esto, a pesar de que se los consultó explícitamente sobre la validez para cualquier cuadrilátero. La aplicaron a rombos, romboides y cuadriláteros con diagonales perpendiculares. Dijeron que la fórmula valía para esos casos. Concluyeron que no importaba dónde se intersecaban las diagonales, el área era la misma.

Luego pasaron al caso de diagonales no perpendiculares. Pensaron en paralelogramos y razonaron usando un dibujo a mano alzada como el de la *Figura 2*, en el que trazaron paralelas a las diagonales del paralelogramo inicial, con lo que quedó determinado un nuevo paralelogramo.

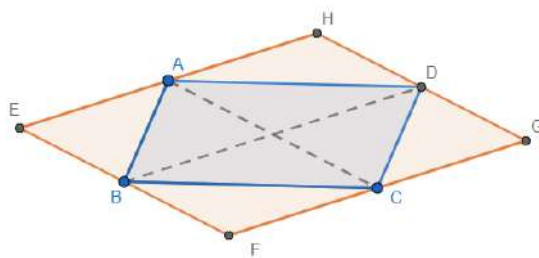


Figura 2

Afirmaron que no hay ninguno con mayor área: todos tienen la misma. Para explicar esto se basaron en que la fórmula que usaron solo dependía de las longitudes de las diagonales. Sobre la base del dibujo explicaron que el área del paralelogramo inicial es la mitad del área de la figura exterior. Como eso pasa para todas las figuras, todas tienen la misma área. No advirtieron que esto es falso. Solo realizaron pruebas con algunos paralelogramos fijos, generalizaron erróneamente y lo tomaron como válido.

Cuando fueron consultados acerca de por qué no apelaron a GGB, dijeron que su uso en Geometría I no estaba integrado a la clase, por lo que no se sentían seguras con su manejo para abordar este problema que veían complejo.

Grupo 2 2022. Comenzaron por analizar para qué cuadriláteros disponían de una fórmula para el área a partir de sus diagonales. Concluyeron que esto lo tenían solo para los rombos. Como el cuadrilátero tenía diagonales fijas, partieron del caso en que estas medían 4 y 5. No conocían fórmulas para el área de un cuadrilátero dadas las diagonales, por lo que decidieron realizar una búsqueda en internet. Usando el buscador de Google, encontraron $A = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \text{sent}$, siendo t el ángulo entre ellas. La aplicaron en ejemplos; entre ellos, la usaron con un romboide de diagonales 4 y 5 y área 10 y verificaron que el ángulo era recto. Consideraron otros cuadriláteros de diagonales 4 y 5 y área 10. Para identificar el caso de mayor área probaron varios ejemplos cambiando el ángulo entre las diagonales. Concluyeron que la mayor área se obtenía cuando el seno tomaba su máximo valor (1), es decir, cuando el ángulo era recto. No discutieron otros valores para las diagonales, pues entendieron que iba a ocurrir lo mismo.

Igual que el grupo anterior, no apelaron a GGB por las mismas razones.

Grupo 1 2023. Comenzaron analizando casos, lo que inicialmente les resultó abrumador, ya que pensaron en si las diagonales eran iguales o no, si se cortaban en su punto medio o no, etc. Realizaron una exploración en GGB con situaciones variadas. Al mover los vértices vieron un caso “raro”, que es cuando el cuadrilátero se transforma en un triángulo y lo descartaron, aunque les quedó la duda acerca de si debían estudiarlo.

Tomaron el caso de diagonales perpendiculares. A partir de la exploración en GGB, con la herramienta *área* conjeturaron que el área era la mitad del producto de las diagonales. Esto los invitó a ver si no había una fórmula para el área a partir de las diagonales, pero lo pensaron para un cuadrilátero cualquiera. Con lápiz y papel, probaron que $A = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \text{sent}$, siendo t el ángulo entre ellas. Hicieron esto dividiendo al cuadrilátero en dos triángulos a partir de una de las diagonales. En el análisis a priori, mostramos una deducción diferente a ésta. A partir del análisis de la fórmula, probaron que el área es máxima cuando el seno toma su máximo valor, esto es 1, es decir cuando las diagonales son perpendiculares.

En un trabajo paralelo con lápiz y papel, uno de los integrantes hizo comparaciones entre los cuatro triángulos que determinan las diagonales, pero no llegó a nada, por lo que decidieron abandonar ese camino.

Grupo 2 2023 (individual). Comenzó por analizar casos. En primer lugar, se planteó si las diagonales eran iguales o no, pero luego decidió quedarse con los dos casos de intersección: perpendiculares o transversales no perpendiculares. Hizo una exploración en GGB y usó la herramienta *área* para estudiar cómo variaba el área de los cuadriláteros. Observó que el área no variaba al cambiar el punto de intersección y sin cambiar el ángulo que formaban y que el área cambiaba al modificar ese ángulo. Conjeturó que el área es máxima cuando las diagonales son perpendiculares y también que todos los cuadriláteros con las diagonales perpendiculares tienen la misma área, sin importar en qué punto se intersecan.

Luego, decidió probar lo conjeturado con lápiz y papel. Dividió a un cuadrilátero general en los dos triángulos que quedan determinados por una de las diagonales. Así, el área del cuadrilátero resulta $A = \frac{b}{2} (h_1 + h_2)$, siendo b la base común y h_1 y h_2 las dos alturas, por lo que el área es máxima cuando las alturas son máximas, lo que ocurre cuando las diagonales son perpendiculares.

Su resolución se centró en la búsqueda del área máxima, pero no reparó en que también se preguntaba si había distintos cuadriláteros que tuvieran igual área (con las diagonales no necesariamente perpendiculares). Pese a que en su análisis observó que el área se mantenía constante si no cambiaba el ángulo entre las diagonales, no formuló una conjetura sobre esto. Cuando se lo consultó sobre la pregunta no atendida, reconoció que se le pasó contestarla y, en el momento, no pudo relacionarlo con lo hecho para dar una respuesta.

Problema 2:

Grupo 1 2023. Realizaron algunos intentos hasta definir una forma de resolver. Uno de los intentos fue resolver buscar la fórmula de la familia de inversas y plantear la ecuación $f_a(x) = f_a^{-1}(x)$, pero resultó una ecuación de grado 4 que no podían resolver y lo abandonaron porque sabían de la existencia de una fórmula compleja que no tenía uso en las clases. Otro intento fue trabajar con las derivadas de ambas familias, pero no obtuvieron conclusiones útiles. Un tercer intento fue plantear el área encerrada entre las dos familias, mediante integrales, pero no resultó fructífero.

Ante la situación, decidieron explorar en GGB. Probaron con algunos valores de a y vieron qué sucedía. Luego, usaron un deslizador para el parámetro y esto les permitió entender los distintos casos de intersección y cuándo se daban. Con esto pudieron dar una respuesta al problema, pero sin justificación analítica.

Entonces, decidieron buscar propiedades de la inversa en la web. Mediante el buscador de Google, entraron a Wikipedia (porque fue el primer resultado de la búsqueda). Ahí vieron lo de la simetría del gráfico con el de su inversa, que no conocían. Entonces, dedujeron que lo que pretendían justificar podía hacerse con el estudio de la ecuación $f_a(x) = x$. Analizaron el signo del determinante y dedujeron que para $a = 0,5$ se intersecan en $(1; 1)$ y que para $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ no hay intersección y que para $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ hay dos puntos. Esto coincidió con lo que habían visto en GGB.

Asumieron que la exploración en GGB les permitió ver los tres casos y que no hubieran podido resolver sin el panorama del problema que le dio.

Grupo 2 2023 (individual). Comenzó por revisar el tema de Función Inversa. Para eso, recorrió el Google Classroom que usaban en Análisis I, donde tenían materiales dados por el docente y recortes del libro Cálculo I, de Larson, Hostetler y Edwards. Luego, comenzó con el estudio del problema. Vio que la familia de funciones era inversible con el dominio y co-dominio presentados. Imaginó cómo eran las parábolas según el valor de a y decidió estudiar un caso: tomó $a = 2$, buscó la inversa y la intersección.

Luego, halló la familia de inversas y decidió estudiar la situación en GGB. Esto le permitió ver la variación de la intersección, lo que consideró decisivo para resolver el problema. Vio que con $a = 0,5$, se intersecaban en un punto y lo comprobó analíticamente.

Dijo que casi de casualidad se dio cuenta de que los gráficos de la función y de su inversa eran simétricos respecto de la recta de ecuación $y = x$ (hasta ahí no lo había usado ya que no conocía la propiedad). Dijo que en una simetría axial los únicos puntos dobles pertenecen al eje de simetría, por lo que buscar la intersección entre la función y su inversa (que deriva en una ecuación de grado 4) era equivalente a buscar la intersección entre la función y la identidad. Analizó el discriminante de esa ecuación analíticamente y dedujo que solo para $a = 0,5$ se intersecaban en un punto. Si bien no se pedía, no buscó el punto de intersección. Completó, luego, con la exploración de los otros casos. Comentó que también igualó la inversa con la identidad, como comprobación.

También intentó otra forma de resolver, que dejó inconclusa. Vio que la recta de ecuación $y = x$ es tangente a la función y a la inversa en el caso de un único punto de intersección, por lo que lo asoció con derivadas. Derivó la función y su inversa, buscó para qué valores tenían la misma derivada, pero lo abandonó.

Resultados

Sobre el Problema 1:

Sin dudas, la consigna resultó un problema para los cuatro grupos. De las entrevistas podemos advertir que les resultó motivador enfrentarse a las dos situaciones, y que no conocían inicialmente el camino a seguir. En todos ellos, la heurística utilizada para abordar la consigna fue la de analizar casos particulares, aunque estos no fueron inicialmente exhaustivos ni producto de un análisis sistemático.

Grupo 1 2022. Dentro de una resolución poco organizada, usaron el buscador de Google para confirmar una fórmula que conocían, pero de un alcance limitado que no reconocieron. Descartaron la fórmula de validez general que encontraron, pues se impuso la confirmación de la que era conocida. Como consecuencia de analizar una fórmula para el área que solo dependía de las diagonales, pudieron concluir que el área se mantenía constante, sin importar en qué punto se intersecaran. Llama a la atención que no hayan puesto en duda el resultado de igualdad de área para cuadriláteros con las mismas diagonales y que no hayan hecho ninguna comparación entre las dos fórmulas para el área, siendo que resulta bastante evidente que la que usaron es un caso particular de la otra. Podemos destacar el uso de la heurística, *introducir un elemento auxiliar* (Marino y Rodríguez, 2009) cuando, partiendo del caso particular paralelogramo, trazaron las paralelas a las diagonales obteniendo otro paralelogramo (Figura 2).

Grupo 2 2022. El uso de TIC se dio con el buscador de Google, lo que resultó decisivo para resolver la situación. Con la fórmula encontrada solo explicaron cuándo se daba el valor máximo, pero no detectaron que distintos cuadriláteros mantenían el área constante si no se modificaba el ángulo entre las diagonales. El análisis que realizaron es "estático" (en el sentido de no haber utilizado GGB. Creemos que esto pudo deberse a reducirlo al uso de una fórmula, y la falta de experiencia previa en el uso de GGB).

Grupo 1 2023. La exploración en GGB les permitió conjeturar la relación del área con las diagonales, en el caso en que son perpendiculares. Es interesante destacar que no decidieron probar esa conjetura, sino que se sintieron convocados a

buscar sin TIC una relación entre el área y las diagonales para cualquier tipo de intersección entre ellas, la que obtuvieron y probaron correctamente.

Grupo 2 2023 (individual). Consideró que la exploración en GGB resultó decisiva para comprender la variabilidad del área. Ante la consulta acerca de lo imprescindible del uso del software, dijo que sentía que no hubiera podido resolver el problema, pero que hubiera hecho intentos de otro tipo, pues la situación le interesó y quería resolverla. Destacó lo potente de GGB y explicó que adquirió más habilidad para explorar situaciones geométricas con él, además de usar por primera vez la herramienta *área*, que buscó ante la necesidad de la situación.

Sobre el Problema 2:

También podemos decir que la consigna resultó un problema para los dos grupos. En ambos casos hicieron intentos y exploraciones sin TIC hasta que tomaron la decisión de acudir a GGB (no conocían de antemano el camino a seguir). También en ambos casos, el estudio de la situación en GGB fue decisivo para obtener un panorama claro de la situación que, además, les daba una respuesta completa al problema. Los dos grupos consideraron que debían justificar analíticamente.

Grupo 1 2023. Recurrieron al buscador de Google con un objetivo preciso: conocer propiedades de la función inversa. Su uso resultó decisivo ya que obtuvieron la propiedad de simetría que no conocían, pese a que lo encontraron en un sitio de dudosa confiabilidad.

Grupo 2 2023 (individual). Utilizó la heurística de analizar casos particulares (uno), con la intención de acercarse al conocimiento de la situación. La exploración en GGB resultó decisiva para comprender los tres casos posibles de intersección y, también, para ver la condición de tangencia en el caso de un único punto de intersección, que le permitió abordar de otro modo el problema, pese a que no lo completó. Hubo otros usos de recursos como el Google Classroom, con la intención de revisar información teórica del contenido matemático.

A modo de cierre

En esta intervención nos propusimos ver qué uso dan de las TIC estudiantes iniciales del nivel superior cuando resuelven problemas matemáticos. En primer lugar, podemos decir que las situaciones propuestas resultaron problemas en todos los casos. Esto quedó claro en las entrevistas cuando expusieron las decisiones que tomaron para resolverlos. También aparecieron variedad de heurísticas, que comentamos brevemente por razones de extensión (analizar casos particulares, introducir un objeto auxiliar, etc.).

Encontramos que el uso de buscadores en la web tuvo una presencia mayor a la que imaginamos: si bien habíamos previsto que fuese usado para buscar una fórmula para el área de un cuadrilátero a partir de sus diagonales, también fue usado con otros fines como buscar resultados teóricos sobre función inversa. Nosotros supusimos que conocían la propiedad de simetría en los gráficos, lo que no resultó así. Consideramos virtuoso el uso dado en este caso, aunque podemos cuestionar que se utilizó una fuente que no puede considerarse confiable.

En cuanto al uso del software matemático, sobre GGB nos encontramos con que quienes lo usaron, reconocieron que resultó decisivo para llegar a resolverlo y que, sin su uso, no hubieran podido resolver. Esto se enmarca en el criterio de imprescindibilidad en el uso de TIC que plantea Rodríguez (2022). En el caso de los grupos de 2022, que no tenían incorporado su uso, reconocieron no animarse a usarlo. Uno de estos grupos no dio una respuesta satisfactoria al problema, mientras que el otro sí, pero luego de obtener información valiosa en la web con el uso de buscadores. En este sentido, señalamos la importancia de que desde la enseñanza se integre el uso de TIC a las propuestas didácticas. En los casos en que esto se verificó, aparecieron buenas resoluciones y usos valiosos de las TIC; además, en algunos casos, encontraron nuevas funciones del software que no conocían, como el cálculo de áreas de las figuras.

Como cierre, podemos decir que el uso de GGB favoreció la búsqueda de pruebas matemáticas (otro de los criterios de Rodríguez (2022)). Esto se vio en un modo muy explícito cuando uno de los grupos, a partir de la exploración en GGB, conjeturó una fórmula para el área de un cuadrilátero a partir de sus diagonales perpendiculares y, luego, se decidió a probarla, pero en un caso más general.

Referencias bibliográficas

- Balladares Burgos (2017). *Educación digital y formación del profesorado en modalidad semipresencial y virtual (b-learning y e-learning)*. [Tesis doctoral].
dehesa.unex.es/bitstream/10662/6072/6/TDUEX_2017_Balladares_Burgos.pdf
- Bravo, D. (2016). *Nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el Colegio del Castillo: descripción del uso actual y propuesta de proyecto de actualización tecnológica*. [Tesis de licenciatura]. UTN Regional Buenos Aires.
https://www.researchgate.net/publication/339182469_Nuevas_tecnologias_en_la_ensenanza_y_aprendizaje_de_la_matematica_en_el_Colegio_Del_Castillo_descripcion_del_uso_actual_y_propuesta_de_actualizacion_tecnologica
- Carnelli, G. y Colombano, V. (2022). Los recursos tecnológicos en cursos de Matemática de primer año del nivel superior: uso, evidencias y primeros análisis. *Memorias del Tercer Simposio de Educación Matemática - Virtual*. Universidad Nacional de Luján.
- Chacón, M.; Farías, S.; González, V., y Poco, A. (2009). Un procedimiento para establecer criterios para elaborar problemas. *Memorias del 10º Simposio de Educación Matemática*. Edumat.

- Gamboa Araya, R. (2007). Uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 2(3), 11-44.
- Marino, T. y Rodríguez, M. (2009). Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de Matemática de nivel pre-universitario. *Paradigma XXX* (2), 165-186.
- Nápoles Valdés, J. y Cruz Ramírez, M. (2000). La resolución de problemas en la escuela. Algunas reflexiones. *Función Continua* 8, 21-42.
- Pizarro, R. (2009). Las TICs en la enseñanza de las Matemáticas. Aplicación al caso de Métodos Numéricos. [Tesis de maestría]. sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/4152/Documento_completo.pdf?sequence=1
- Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (2.ª ed.). Editorial Trillas.
<https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf>
- Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En Pochulu, M., & Rodríguez, M. (comps). (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Volumen 1. Ediciones UNGS y EDUVIM. <https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf>
- Rodríguez, M. (comp.). (2022). *Perspectivas metodológicas para la enseñanza y la investigación en educación matemática*. Ediciones UNGS. 3º edición. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306324_completo.pdf
- Villarreal Farah, G. (2010). *Caracterización del uso de la tecnología, por profesores y alumnos, en resolución de problemas abiertos en matemática en el nivel de secundaria*. [Tesis doctoral]. Universitat de Barcelona. https://www.tdx.cat/bitstream/handle/10803/82071/GVF_TESIS.pdf;jsessionid=C41C9F645824011640B12C8EA22F358D?sequence=1

Actividades para el aprendizaje de la matemática con TIC: discusión acerca de un uso pertinente y significativo

Gustavo CARNELLI, Martín CHACÓN

Universidad Nacional de General Sarmiento

Los Polvorines, Argentina

gcarnelli@campus.ungs.edu.ar, machacon@campus.ungs.edu.ar

Resumen

La inclusión de TIC en las actividades para el aprendizaje de la matemática tiene un interés creciente en educación matemática. Por esto, resulta necesario disponer de criterios para evaluar su buen uso. Hay autores que han avanzado en este sentido. Tomamos una de estas producciones, que hemos utilizado como referencia en experiencias de enseñanza. Uno de los criterios propuestos es el de imprescindibilidad en el uso de TIC, que se basa en que en la resolución deben surgir relaciones matemáticas que sin el uso de TIC no se advertirían. Nos hemos encontrado con interpretaciones muy cercanas al uso coloquial del término y, por lo tanto, muy restringidas y exigentes para el análisis. Nuestra intención es tomar este criterio para discutirlo, precisarlo y ampliarlo. Para ello diseñamos dos actividades, una de contexto geométrico y otra de cálculo, y presentamos resoluciones que podrían dar estudiantes que se inician en los estudios superiores. A partir de su análisis, proponemos que el criterio se amplíe a contemplar la posibilidad de que la resolución con TIC permita una visión panorámica del problema, de modo que permita comprenderla y favorezca el diseño de una estrategia de resolución sin TIC y, también, a que, aun obteniendo las mismas conjeturas con uso de TIC que sin su uso, se habilitan distintos caminos para llegar a ellas, lo que puede hacer la diferencia entre advertirlas o no hacerlo.

Palabras Clave: TIC. Matemática. Aprendizaje. Geometría. Cálculo.

Introducción

La inclusión de TIC en las actividades para el aprendizaje de la matemática es un asunto de interés creciente tanto en la investigación como en la planificación de la enseñanza desde hace algunos años. A pesar de que en matemática está muy difundido el uso del potente software GeoGebra (GGB) vale que precisemos, como señalan Rodríguez y Barreiro (2017), que no solo consideramos aquí el uso de software matemático, sino también otros usos. Por ejemplo, acceder a buscadores en la web para el posterior procesamiento de la información obtenida o la utilización de documentos para la producción de textos colaborativos realizados sincrónica o asincrónicamente.

Cuando nos preguntamos qué aportes puede hacer el uso de TIC en el aula de Matemática, encontramos, entre otros, a García-Utrera et al. (2014) que proponen el modelo SAMR que permite identificar qué tipo de uso se le da a la tecnología en el aula. Se trata de un conjunto jerárquico de cuatro niveles que se distribuyen en dos capas. La capa de mejora está en la fase inferior y la capa de transformación está en la fase superior. En la fase inferior tenemos los niveles de sustitución y de aumento. En el primero “se sustituye una herramienta por otra sin que exista un cambio metodológico” (García-Utrera et al., 2014, p.207). Por ejemplo, usar la calculadora científica para realizar cálculos que pueden realizarse con calculadoras no científicas. El nivel de aumento se refiere al caso en que se reemplaza una herramienta que aporta mejoras funcionales, pero con bajo impacto en los aprendizajes. Por ejemplo, el uso de la calculadora para obtener razones trigonométricas en reemplazo del uso de tablas. En la fase de transformación tenemos los niveles modificación y redefinición. El nivel de modificación hace referencia a que la incorporación de herramientas permite un rediseño de las tareas que implica algún cambio metodológico. Por ejemplo, si se pasa de una actividad que consiste en estudiar la variación de las ventas a partir de datos ficticios, a otra análoga que incluye la búsqueda de datos reales en internet. Por último, una propuesta está en el nivel de redefinición si “se crean nuevas actividades y ambientes de aprendizaje que, sin el uso de la tecnología disponible serían imposibles” (García-Utrera et al., 2014, p.208). Como parte de los avances en esta temática nos interesa enfocarnos en la discusión de propuestas que puedan enmarcarse en la fase de transformación según el modelo SAMR. En particular, Rodríguez (2022) propone una serie de criterios que permiten valorar el uso de las tecnologías en la clase de Matemática y entendemos que, de valorarse un uso positivo, las propuestas se enmarcarían en la fase mencionada del modelo SARM. A continuación, presentamos una breve primera discusión sobre cómo puede entenderse la valoración del uso de TIC en el aula de Matemática. Luego, presentamos dos posibles ejemplos de consignas a partir de las cuales, finalmente, proponemos avanzar en un ajuste sobre el *criterio de imprescindibilidad* (CDI) (Rodríguez, 2022), que es uno de los criterios mencionados.

Breve primera discusión sobre cómo valorar el uso de TIC

Como indicamos, entre los criterios que propone Rodríguez (2022) para valorar la pertinencia y significatividad del uso de TIC para resolver consignas matemáticas está el CDI. Nos interesa discutir acá cómo aplicar este criterio en el análisis de una cierta actividad diseñada para el aprendizaje de la matemática. Más precisamente, queremos pensar formas de decidir si una actividad dada cumple con el criterio.

Comencemos por una referencia a qué se entiende por la pertinencia y por la significatividad. Según Rodríguez (2022), la inclusión de TIC en las actividades debe ser pertinente en el sentido de que “no es que de ahora en más en todas las clases de Matemática y en cada tema, todas las tareas deban incluir siempre el uso de TIC” (p.73). A propósito, según la Real Academia Española, pertinente es *que viene a propósito*. Y sobre la significatividad, Rodríguez (2022) se refiere a que “lo matemático que el alumno aprenda sea valioso” (p.73). Por significativo, la Real Academia Española dice que es que *tiene importancia por representar o significar algo*. Creemos que existe una concordancia entre los significados coloquiales de las palabras pertinente y significativo y el significado que la autora les otorga.

Nuestra experiencia con el uso de este material teórico en la enseñanza de asignaturas de educación matemática y en cursos para docentes de matemática nos ha llevado a interesarnos en profundizar sobre el tema. Sobre el CDI, Rodríguez (2022) se refiere a que “lo matemático que se pone en juego cuando usamos TIC no aparece si no usamos las nuevas tecnologías” y que se pone de manifiesto “si surgen relaciones matemáticas que sin el uso de TIC no se advertirían –y no porque no se pueda abordar la tarea sin las TIC–” (p.79). En este momento corresponde destacar que el uso de TIC al que nos referimos (y Rodríguez también) es al que se hace al aprender matemática en las clases y no al que se hace al enseñar matemática. Por esto, es necesario pensar en los conocimientos disponibles de quienes van a resolver las actividades, pues de eso va a depender, en parte, si se cumple o no el CDI.

Nuestra impresión, producto de la experiencia docente, es que el criterio es tomado en una interpretación muy exigente, como ligado al uso coloquial de la palabra imprescindible (según la Real Academia Española: *dicho de una persona o de una cosa de la que no se puede prescindir*). Tomado en forma extrema, únicamente darían positivo en este criterio, tareas tales como la demostración de la llamada conjetura de los cuatro colores, o de la conjetura débil de Goldbach, que fueron demostradas utilizando computadoras en algún momento del

proceso. Por otra parte, una forma errónea de entender el cumplimiento del criterio, y que también hemos advertido en nuestra experiencia docente, es la siguiente: si la consigna parte de proponer un escenario digital como podría ser dar una actividad que utilice un *applet* en GGB, entonces, el CDI se cumple por el solo hecho de requerir el entorno tecnológico. De aceptarse esto, que una actividad persiga un uso pertinente y significativo de TIC sería independiente de la riqueza matemática de la propuesta.

Más allá de que los criterios para valorar el uso de TIC son ideas orientadoras para ayudar a pensar y evaluar las actividades que proponemos para el aula, aprovechamos la oportunidad para discutirlo y realizar un aporte. En lo que sigue, diseñamos algunas consignas para el aprendizaje que nos parecen interesantes para discutir lo que planteamos.

Dos consignas para discutir el CDI

Consideremos la siguiente consigna, que hemos pensado para trabajar con estudiantes iniciales del nivel superior.

Dados dos segmentos, se consideran todos los cuadriláteros (convexos) que los tienen por diagonales. ¿Algunos de esos cuadriláteros tienen la misma área? ¿Hay alguno de esos que tenga la mayor área? Justificar.

¿Qué es lo central para resolver la situación? Ver que el área depende solo del ángulo que forman las diagonales. Analicemos si se cumple el CDI. Entendemos que sí, dependiendo del contexto –como siempre–. Veamos por qué.

Una resolución posible es por la vía de la fórmula de cálculo del área de un cuadrilátero cualquiera a partir de sus diagonales: $A = \frac{1}{2} D \cdot d \cdot \text{sen} \alpha$ (semiproducto de las diagonales por el seno del ángulo que determinan). Asumimos que no es una fórmula de uso en las aulas del nivel secundario ni del nivel universitario inicial. Por lo tanto, para llegar a ella, hay que deducirla o realizar una búsqueda en la web. Cabe aclarar que para esto hay que decidir primero qué escribir en el buscador. Por ejemplo, si se pone *área de cuadriláteros irregulares*, no aparece la fórmula, pero sí aparecen videos que calculan el área de cuadriláteros irregulares a partir de las medidas de los lados y de algún ángulo interior. Estas resoluciones consisten en dividir el cuadrilátero en triángulos. También aparece la fórmula de Herón, que relaciona el área de triángulos en función de las longitudes de sus lados. La fórmula que nos interesa aparece muy “escondida” si en el buscador se escribe *área de cuadriláteros irregulares en función de sus diagonales*. De todas maneras, aun encontrándola, es necesario interpretarla en relación con las condiciones del problema y, sabiendo (o averiguando o explorando) el comportamiento de la función seno, quienes resuelven podrían concluir correctamente. En este sentido, entendemos que las TIC habrían sido necesarias para obtener una relación entre los objetos del problema que permitan hacer un análisis y posterior conclusión. La tarea puede enriquecerse si se pone en duda la validez de tal fórmula encontrada y se propone la búsqueda de alguna justificación. De todas maneras, entendemos que la búsqueda de fórmulas que vinculen los objetos (o datos) de un problema no es un uso de los más enriquecedores. Sin embargo, cumpliría con el CDI, pues habilita el acceso a un conocimiento matemático que no se disponía de otra manera. Vale señalar que no hemos encontrado una resolución al copiar el problema en el buscador.

Es posible utilizar alguna inteligencia artificial como ChatGPT-4 de OpenIA. Lo hemos realizado, pero dado lo reciente de su uso en nuestra sociedad, y la complejidad de la interacción que hemos tenido, preferimos dejar para otro momento un análisis que incluya su uso.

Es posible una resolución sin TIC que implica incluir elementos auxiliares. Si se trazan por los vértices las paralelas a las diagonales, queda un paralelogramo. Ver la *Figura 1* en la que el cuadrilátero inicial es *PQRS* y el paralelogramo es *ABCD*. Es posible justificar que el área del cuadrilátero es igual a la mitad del área del paralelogramo. Luego, las longitudes de dos lados consecutivos del paralelogramo son congruentes a las diagonales del cuadrilátero y el ángulo entre éstas es igual a uno de los ángulos del paralelogramo. Así, puede calcularse el área del paralelogramo como $A = D \cdot d \cdot \text{sen} \alpha$, donde *D* y *d* son las longitudes de dos lados consecutivos, y α es el ángulo entre ellos. Finalmente, se obtiene la fórmula que indicamos al principio y se prosigue como allí.

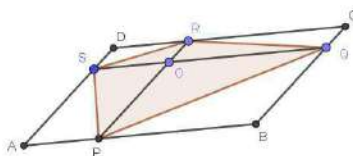


Figura 1

Otra resolución posible consiste en partir de una exploración de la situación en GGB. Por ejemplo, se insertan dos deslizadores a y b . Se dibujan dos segmentos dada su longitud, el segmento \overline{PQ} de longitud a y \overline{AB} de longitud b . Se los puede trasladar de modo que se corten. Se dibuja el cuadrilátero $PAQB$ y se pide a GGB el área del cuadrilátero (ver *Figura 2*).

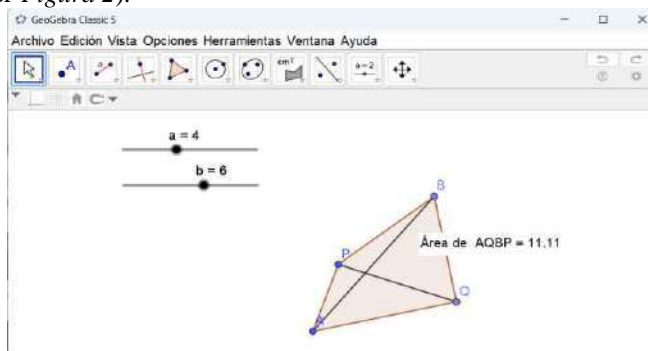


Figura 2

Apelando al espectro de ejemplos que permite recorrer el software, son posibles las siguientes dos conjeturas: usando la herramienta *Área* puede verse que, si se mantiene el ángulo entre las diagonales y se varía el punto de intersección entre ellas, el área es constante; además, puede verse que el área es máxima cuando las diagonales son perpendiculares. Ambas conjeturas deben probarse, luego, usando propiedades de las figuras. Pueden arrastrarse los cuatro vértices. Dependiendo de cuál haya sido el primer punto elegido para definir cada segmento, hay uno de los puntos que permite mover el segmento conservando la inclinación. Y hay otro que rota el segmento alrededor del primer punto. En este caso, los puntos A y P permiten trasladar el respectivo segmento y los puntos B y Q permiten rotarlo. Así, es posible ver la variación del área de acuerdo con lo que se mueva. Por ejemplo, si se mueve Q desde la recta PA hasta la recta PB se ve algo como lo de la *Figura 3*:

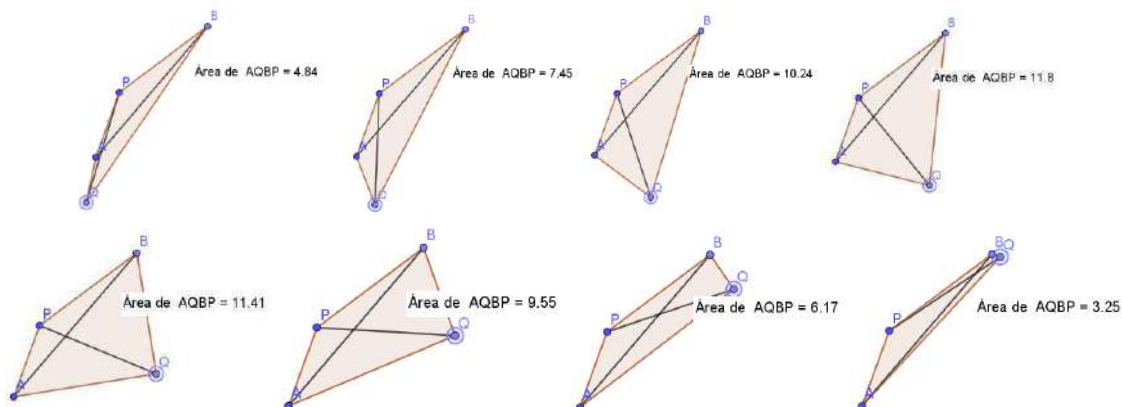


Figura 3

Se observa que el área crece hasta cierto punto y luego comienza a decrecer. Algo similar sucede si el que se mueve es B , que es el que permite rotar al segmento \overline{AB} alrededor de A . También ocurre algo similar si se hace el mismo análisis, pero para otras longitudes de segmentos.

Si se mueve ahora el punto P y se dejan fijos los otros tres puntos, el segmento \overline{PQ} se traslada y se observa que el área no varía, como puede verse en la *Figura 4*:

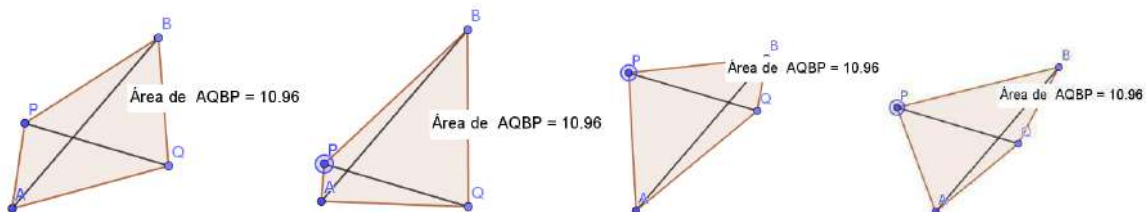


Figura 4

Algo similar ocurre si se mueve el punto A , trasladando el segmento \overline{AB} . Se observa que el área no se modifica si se conserva la inclinación de las diagonales.

Conjeturas:

Los cuadriláteros que tienen sus diagonales de igual longitud y que se cortan con un mismo ángulo tienen igual área. Si el ángulo aumenta de 0° a 90° el área aumenta y si aumenta de 90° a 180° , el área disminuye.

Entonces, en la primera y última formas de encarar el problema, se cumple que lo matemático que se pone en juego no aparecería sin el uso de TIC, o estaría muy oculto. Como puede observarse, la riqueza matemática en una y otra forma de resolver es de diferente naturaleza y la significatividad estará vinculada a los objetivos que se persigan. Además, podemos asumir que este problema no es resoluble sin TIC para estudiantes iniciales del nivel superior, aunque esto no es condición para el cumplimiento del criterio. Sin embargo, esta consideración podría cuestionarse si alguien que lo resuelve pensara en encontrar una fórmula para el área de un cuadrilátero cualquiera y, en vez de realizar una búsqueda, se ensayara una deducción, por ejemplo, como la hemos mostrado. Este camino es complejo para estudiantes iniciales, pero no es inaccesible, por lo que podemos aceptar que no sería una resolución típica. En conclusión, aquí hay caminos diferentes que el uso de TIC habilita, aun cuando las conjeturas a las que se accedan sean las mismas que sin uso de TIC.

Veamos otro ejemplo, también para trabajar en primer año del nivel superior.

Considerar la familia de funciones $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = ax^2 + a$ ($a \in \mathbb{R}, a > 0$). ¿Cuáles de ellas satisfacen que la intersección entre su gráfico y el de su inversa...

- (a) ...es un único punto?;
- (b) ...es más de un punto?;
- (c) ...es vacía?

¿Qué es lo central para resolver la situación? Es necesario ver que hay un valor del parámetro para el cual la intersección entre ambas curvas es un único punto, que para valores mayores que él hay dos puntos comunes y que para valores menores que él no hay ningún punto común. Analicemos si se cumple el CDI. Entendemos que sí, aunque con matices. Veamos por qué.

En una resolución sin TIC puede buscarse la intersección entre ambas familias de curvas. Para ello, previamente se obtiene la expresión de la familia de inversas y se plantea la ecuación correspondiente para buscar la intersección. Sin entrar en detalle respecto del dominio de validez, la ecuación que resulta es

$$ax^2 + a = \sqrt{\frac{x-a}{a}}$$

Manipulando la expresión se obtiene la siguiente ecuación de grado 4 (sin término cúbico), con un parámetro.

$$a^3x^4 + 2a^3x^2 - x + a^3 + a = 0 \quad ()$$

La fórmula resolvente de ecuaciones de grado 4 no es un conocimiento disponible en el nivel que trabajamos y no estamos ante un caso particular para que el que se disponga de formas de resolución alternativas. Por lo tanto, esta resolución es inconducente.

Por otro lado, apelando a que los gráficos de una función inversible y de su inversa son simétricos respecto de la recta de ecuación $y = x$, se deduce que el razonamiento aplicado a las funciones puede usarse para la familia dada y la función identidad. Así, la ecuación con un parámetro que puede estudiarse es de grado 2:

$$ax^2 + a = x$$

Mediante el análisis del discriminante, se llega a que el único real positivo que lo cumple es $a = \frac{1}{2}$. Luego, mediante la resolución de las inecuaciones $ax^2 + a > x$ y $ax^2 + a < x$ (la primera para que no haya puntos comunes y la segunda para que haya dos puntos comunes) se llega a que $a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y $a \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, respectivamente. Esto muestra que el problema puede resolverse sin usar TIC. Sin embargo, es necesario apelar a y/o explorar vínculos sobre una función y su inversa. De todas maneras, nos interesa ver qué aportes habilitaría una resolución con TIC.

Mediante una exploración en GGB, que no requiere del cálculo previo de la inversa pues la realiza el software, puede verse mediante una animación con el uso de deslizadores que hay un valor para el cual hay un único punto común y que para valores menores que él no hay puntos comunes y que para valores mayores que él hay dos puntos comunes. Estas conjeturas deben luego probarse sin TIC. Por ejemplo, se ingresa un deslizador a , la función y se pide su inversa (ver *Figura 5*).

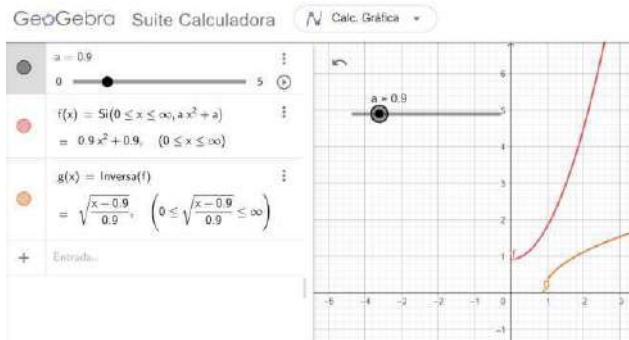


Figura 5

Luego, si se mueve el deslizador, se ve que en algunos casos las curvas se intersecan. Cuando lo hacen, con la herramienta *Intersección*, nos muestra uno de los puntos. GGB también nos muestra las coordenadas de ese punto A (ver Figura 6).

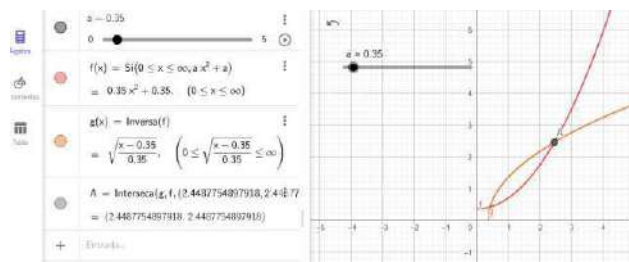


Figura 6

Puede conjeturarse lo siguiente:

Cuando $a = 0.5$, hay un único punto de intersección.

Cuando $a < 0.5$, hay dos puntos de intersección.

Cuando $a > 0.5$, no hay puntos de intersección.

Un detalle interesante es que (al menos en la versión online que usamos) las coordenadas del punto de intersección no se muestran exactamente como (1,1) (ver Figura 7).

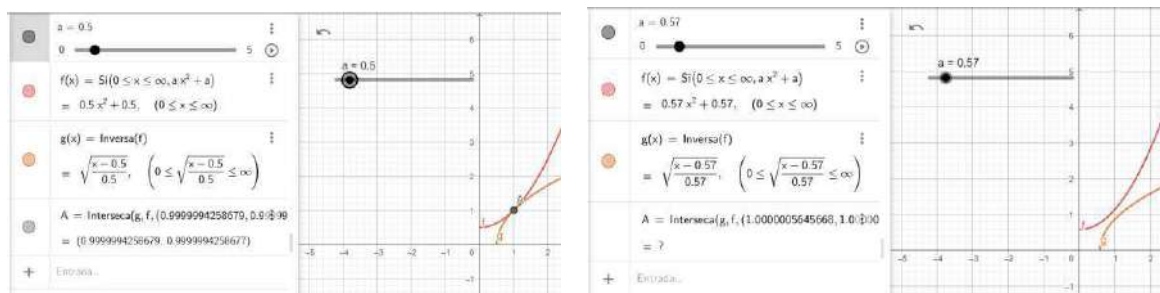


Figura 7

A partir de esta resolución con TIC se conjetura que su uso permite una comprensión panorámica, global, integral de la situación y que organiza la resolución analítica que consiste en encontrar un valor crítico y dos intervalos determinados por ese valor. Además, la exploración permitiría ver que lo que ocurre entre las dos familias de funciones también ocurre entre la familia dada y la función identidad, lo que resulta decisivo para una resolución analítica.

Puede pensarse en otra resolución con TIC. Se retoma la ecuación () y se utiliza el motor de cálculo Wolfram Alpha para ver qué sucede con la solución. En este caso, se obtiene lo que se ve en la Figura 8:



Figura 8

En particular, el software ofrece una factorización de la expresión como producto de dos expresiones cuadráticas (la última de la imagen de la izquierda) y cuatro expresiones (las primeras cuatro de la derecha) para las soluciones en x con $a \neq 0$, que resultan de aplicar la fórmula resolvente de las ecuaciones cuadráticas a cada una de las expresiones de la factorización. A partir de la visualización en las gráficas, y con la conjetura sobre la respuesta, se vería facilitada la interpretación de los símbolos que Wolfram Alpha aporta. Puede estudiarse qué sucede con la cantidad de soluciones analizando los discriminantes. Más allá de lo mencionado, es posible manipular la expresión que el software ofrece mediante la propiedad distributiva y obtener que efectivamente se trata de una factorización posible de la expresión original. El camino inverso no es nada sencillo con las técnicas de factorización más difundidas.

En síntesis, aceptamos que se cumple con el CDI en esta situación, aun cuando mostramos que la misma conjetura pueda alcanzarse con su uso y sin su uso, porque las resoluciones mostradas consisten en distintos caminos que quedan o no habilitados dependiendo de los conocimientos e ideas que tengan quienes resuelvan. Por otro lado, nos interesa destacar que la exploración con GGB permite una comprensión panorámica del problema y favorece el diseño de una estrategia de resolución que podemos entender, en una interpretación amplia del criterio, que son relaciones matemáticas que aparecen en la resolución sin TIC, pero no del mismo modo.

Consideraciones finales

Como dijimos, nuestra inquietud en relación con el CDI se originó en que observamos que tanto docentes en formación continua como estudiantes de profesorado los interpretan en un sentido muy exigente a la hora de decidir una valoración positiva en el uso pertinente y significativo de TIC, más cercano al significado coloquial. Entonces, al valorar el uso de TIC una cierta actividad matemática proponemos utilizar la expresión *criterio de imprescindibilidad* y evitar usos como *las TIC son (o no son) imprescindibles*.

Además, proponemos que el CDI para valorar el uso de TIC en una actividad para el aprendizaje se pone de manifiesto si...

- surgen relaciones matemáticas que sin TIC no se advertirían (y no porque la actividad no pueda resolverse sin TIC) tal como Rodríguez (2022) lo propone ó
- da una visión panorámica de la situación, de modo que permite comprenderla, y favorece el diseño de una estrategia de resolución sin TIC ó
- aun obteniendo las mismas conjeturas con su uso que sin su uso, se habilitan distintos caminos para llegar a ellas, lo que puede hacer la diferencia entre advertirlas o no hacerlo.

Con lo desarrollado aquí pensamos que hacemos un aporte a la discusión sobre el uso de TIC para el aprendizaje de la matemática y, así, incentivar el diseño de actividades que puedan enmarcarse en la fase de transformación que mencionamos al comienzo, con vistas a favorecer una enseñanza que promueva una actividad matemática más rica.

Referencias Bibliográficas

- Barreiro, P. (2015). *Fases de integración de nuevas tecnologías en la formación de profesores de Matemática*. [Tesis de Maestría,], Universidad Nacional del Comahue https://www.researchgate.net/profile/Patricia_Barreiro2/project/Tesis-de-Maestria7/attachment/594beed41042bfede16052d9/AS:508086054866944@1498148563779/download/Tesis+de+Maestr%C3%ADa_VF.pdf?context=ProjectUpdatesLog
- Bravo, D. (2016). *Nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de la matemática en el Colegio del Castillo: descripción del uso actual y propuesta de proyecto de actualización tecnológica*. [Tesis de licenciatura,], UTN Regional Buenos Aires https://www.researchgate.net/publication/339182469_Nuevas_tecnologias_en_la_ensenanza_y_aprendizaje_de_la_matematica_en_el_Colegio_Del_Castillo_descripcion_del_uso_actual_y_propuesta_de_actualizacion_tecnologica
- Carnelli, G. & Colombano, V. (2022). *Los recursos tecnológicos en cursos de Matemática de primer año del nivel superior: uso, evidencias y primeros análisis*. Tercer Simposio de Educación Matemática Virtual. Universidad Nacional de Luján. <http://www.sem-basicas.unlu.edu.ar/?q=node/63>
- García-Utrera, L., Figueroa-Rodríguez, S. & Esquivel-Gómez, I. (2014). *Modelo de Sustitución, Aumento, Modificación, y Redefinición (SAMR): Fundamentos y aplicaciones. Los Modelos Tecno-educativos: Revolucionando el aprendizaje del siglo XXI*. https://www.researchgate.net/publication/273754983_Modelo_de_Sustitucion_Aumento_Modificacion_y_Redefinicion_SAMR_Fundamentos_y_aplicaciones
- Rodríguez (coord). (2022). Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en Educación Matemática*. Universidad Nacional de General Sarmiento. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876306324_completo.pdf
- Rodríguez, M. & Barreiro, P. (2017). Consideraciones sobre la formación de matemática y su apropiación de las nuevas tecnologías. En Cabello, R. y López, A. (eds). *Contribuciones al estudio de procesos de apropiación de tecnologías*. Ediciones del Gato Gris. <https://www.delgatogris.com.ar/wp-content/uploads/2017/10/Cabello-y-L%C3%B3pez-eds-Contribuciones-al-estudio-de-procesos-de-apropiaci%C3%B3n-de-tecnolog%C3%ADas.pdf>

ISBN 978-631-6582-10-2



9 786316 582102