DEPARTAMENTO CIENCIAS BASICAS

UNIVERSIDAD NACIONAL DE LUJÁN

VI SEM-V

VI SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Memorias

“Investigación y Aprendizaje En Educación Matemática”

Conferencias y Artículos

MAYO’2025

VI SIMPOSIO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA VIRTUAL

Memorias del VI SEM-V

Mayo’2025

Editor Científico: Jorge E. SAGULA

Compilador: Jorge E. SAGULA

Editor Gráfico: Diego O. AGUDO

Sagula, Jorge Enrique
VI Simposio de la educación matemática virtual: memorias: investigación y aprendizaje en educación matemática : conferencias y artículos / Jorge Enrique Sagula. - 1a ed. - Luján: Universidad Nacional de Luján, 2025.
Libro digital, PDF

Archivo Digital: descarga y online
ISBN 978-987-9285-55-8

1. Matemática. I. Título.
CDD 510.72

Prólogo

Los días 15 y 16 de mayo de 2025, en su mes histórico, en modalidad virtual sincrónica, y con vertiginoso ritmo académico, tendrá su recorrido en la Educación Matemática, el VI SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual), migración del histórico SEM (Simposio de Educación Matemática) que nació a fines del siglo pasado, en el mes de mayo del año 1999, en el Centro Regional Chivilcoy de la Universidad Nacional de Luján. El modelo creado representa el enlace entre la Educación Matemática y la comunidad, reflejada en todos sus niveles educativos.

La idea original, concebida en 1998 y testeada en distintos escenarios de la Educación Superior no sólo en ámbitos universitarios de Argentina sino en distintos países de América y Europa, y como consecuencia de mis participaciones en diferentes espacios de Educación Matemática fuera de Argentina, permitió sembrar semillas cognitivas y regarlas con diferentes enfoques y modalidades para potenciar a la Matemática en un país tenedor de Tres (3) Premios Nobel en Ciencias, y cuyo derrotero en Matemática, en general, tuvo momentos de alto reconocimiento y posicionamiento en varios países americanos y europeos, y aún hoy, lo sigue siendo, más allá de todo tipo de avatares.

La disruptiva pandemia CoViD-19, en el posicionamiento de la virtualidad como medida de reducción del aislamiento, permitió el renacimiento del constructo del SEM, pero ya sin la sociabilización en persona de los docentes e investigadores, sino mediados por la Modernidad Líquida, pero potenciando los sentidos de la visualización, del habla, de la audición y en muchos casos, del tacto en la escritura, y así poder trabajar en Aprendizaje por Refuerzo, de modo de propender a la mejora continua sin singularidades de la Educación en general; esclareciendo la intervención de los cuatro mismos sentidos que se utilizan en clases convencionales en un proceso de construcción del conocimiento en la modalidad presencial. Así, el encuentro de profesores-investigadores, en distintas líneas y desde distintos enfoques y puntos de vista, ha permitido mantener encendida “la llama del aprendizaje” en el campo de la Educación Matemática, y en varios espacios interdisciplinares, en búsqueda de la transdisciplinariedad permanente.

Prólogo

Por tal razón, y comprometido con el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje en el campo de la Educación Matemática, ratifico el compromiso inicial, y así las cosas, el SEM luego de haber cumplido el año 2024 un cuarto de siglo, precisamente comenzó en el siglo pasado y vislumbró al siglo de la comunicación y la potenciación del conocimiento, y entonces, desde la Universidad Nacional de Luján, se acercará a la Comunidad de la Educación Matemática esta nueva edición, el VI SEM-V, para potenciar su derrotero, con su leitmotiv: "INVESTIGACIÓN Y APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA", cuyo objetivo es la trascendencia, y por ende, la aplicación del conocimiento en todos los niveles educativos, con el propósito de enriquecer a la disciplina y generar ramificaciones en distintas disciplinas.

Jorge E. SAGULA
Chivilcoy, 7 de abril de 2025.

VI Simposio de Educación Matemática-Virtual (VI SEM-V)
“INVESTIGACIÓN Y APRENDIZAJE EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Universidad Nacional de Luján
Sede Chivilcoy y Sede Luján, Argentina
Modalidad Virtual Sincrónica
15 y 16 de mayo de 2025

Director Académico
Jorge E. SAGULA

PROGRAMA GENERAL
Jueves 15 de mayo de 2025

08:30-09:00 horas
CEREMONIA INAUGURAL

Jorge R. GUELFFI
Director Centro Regional Chivilcoy, UNLu, Argentina

Walter F. PANESSI
Rector, Universidad Nacional de Luján (UNLu), Argentina

Emma L. FERRERO
Directora-Decana, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján (UNLu), Argentina

Jorge E. SAGULA
Director Académico VI SEM-V
Universidad Nacional de Luján (UNLu), Argentina

09:00-10:30 horas
PANEL DE APERTURA
“EL PROBLEMA DE LA ÉTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA”

Disertación PA-1
Hacer referencia a la ética en la praxis docente
Bruno D'AMORE
Doctorado de Investigación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
Accademia delle Scienze di Bologna, Italia

Programa General

Disertación PA-2
Ética y Didáctica de la Matemática
Martha Isabel FANDIÑO PINILLA
Grupo de Investigación NRD, Departamento de Matemática,
Universidad de Bologna, Italia

Disertación PA-3
Ética y Pensamiento Matemático
Rodolfo VERGEL CAUSADO
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

Disertación PA-4
¿Por qué considerar la ética en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?
Adriana LASPRILLA HERRERA
Secretaria de Educación, Bogotá, Colombia

Presentador-Moderador
Jorge E. SAGULA
Universidad Nacional de Luján, Argentina

10:30-11:15 horas
CONFERENCIA CA.1
Algunas componentes del Aprendizaje de la Matemática
Bruno D'AMORE
MESCUD-Universidad de Bologna, Italia
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

11:15-12:00 horas
CONFERENCIA CA.2
Investigações atuais em Modelagem Matemática e Resolução de Problemas
Vanilde BISOGNIM
Eleni BISOGNIM
Universidade Franciscana de Santa Maria (UFN), Rio Grande do Sul, Brasil

12:00-14:00 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-1
MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN ENTORNOS TECNOLÓGICOS

CONFERENCIA CENTRAL GTD-1
Modelización Matemática en la enseñanza por competencias en profesionales de ciencias económicas

La modelización matemática desempeña un rol clave en la enseñanza por competencias, al permitir que los estudiantes de ciencias económicas articulen el conocimiento matemático con la resolución de problemas propios de su campo profesional. En esta instancia, presentaré experiencias de modelización en la enseñanza de ciencias básicas, orientadas al desarrollo de habilidades analíticas y argumentativas en entornos tecnológicos.
A partir del diseño de actividades donde los estudiantes construyen modelos matemáticos para la toma de decisiones financieras, el análisis de costos y la optimización de recursos, se examina cómo estas estrategias favorecen una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y fortalecen competencias esenciales para la gestión económica. Los resultados evidencian que la modelización no solo mejora la apropiación del conocimiento matemático, sino que también promueve un pensamiento cuantitativo y basado en evidencia, necesario para abordar problemáticas complejas en la toma de decisiones. Finalmente, se reflexionará sobre los desafíos y oportunidades que implica integrar la modelización matemática en la formación de profesionales en ciencias económicas.

Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Universidad Católica de Salta, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.1
Enseñanza de la matemática en la formación inicial de profesores universitarios en biología: estudio de modelos matemáticos

En el marco de una investigación en curso, se analiza la enseñanza de la matemática en la formación universitaria de profesores de biología, en el contexto de las prácticas tradicionales en una universidad nacional de Argentina. Se han diseñado e implementado dos recorridos de estudio e investigación (REI), centrados en el estudio de preguntas fuertes que permiten vincular la matemática con otras disciplinas y así, favorecer el estudio de modelos matemáticos en contextos biológicos. Como material de análisis, se consideran los datos de estas implementaciones realizadas en los años 2023 y 2024 con estudiantes de primer año del Profesorado Universitario en Biología, en la asignatura Matemática. Los resultados parciales muestran avances significativos en la construcción y reconstrucción de saberes matemáticos y no matemáticos, emergentes en el proceso de búsqueda de respuestas a la pregunta generatriz. Se espera que este estudio constituya un insumo para la planificación y análisis de prácticas de enseñanza de la matemática en carreras donde la biología es central, así como una contribución a la investigación en Educación Matemática.

Gretel A. Fernández von METZEN
Universidad Nacional de Misiones, Argentina
Verónica PARRA
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Argentina

GDISERTACIÓN INVITADA GTD-1.2
Análisis del problema de tráfico y movilidad en el transporte urbano en la ciudad de Medellín por medio de la modelización matemática con Álgebra Lineal

El estudio del tráfico y la movilidad urbana en Medellín se ha vuelto esencial para enfrentar los retos del transporte sostenible. Utilizando álgebra lineal para modelar el flujo de tráfico, este trabajo examina el impacto social y ambiental de la congestión vehicular en la ciudad. Se formularon sistemas de ecuaciones que reflejan el comportamiento del tráfico en diferentes zonas, considerando factores como la contaminación y el tiempo perdido en el transporte. Los resultados de diferentes modelos y la simulación con algunas herramientas informáticas revelan que la optimización de rutas de autobuses y la promoción del uso de transporte público podrían reducir significativamente la huella de carbono de la ciudad. Este enfoque matemático no solo ayuda a mejorar la eficiencia del transporte, sino que también promueve un desarrollo urbano más sostenible y responsable, además la enseñanza del Álgebra Lineal con estudiantes de ingenierías influye en una matemática más realista.

Fermín Rafael ÁLVAREZ MACEA
Universidad de Antioquia, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-1.3
Modelización Matemática en Educación a Distancia

El trabajo con modelización matemática en educación a distancia suele considerarse inviable cuando se trata de grandes volúmenes de estudiantes. Sin embargo, esta experiencia muestra cómo es posible diseñar propuestas donde los propios estudiantes seleccionan subtemas dentro de una temática común, favoreciendo un aprendizaje activo y significativo. En particular, se presenta una actividad desarrollada con más de 3.800 estudiantes en la que se les plantea analizar y fundamentar, desde el punto de vista matemático y económico, en qué momento es conveniente faenar o vender un animal destinado al consumo de carne.

Para abordar esta cuestión, los estudiantes investigan sobre diferentes razas, recopilan datos relevantes, proponen modelos matemáticos para describir el crecimiento y la ganancia de peso en función del tiempo mediante herramientas como GeoGebra, analizan la rentabilidad de distintas decisiones y evalúan la sensibilidad del modelo ante variaciones de parámetros. Además, la actividad se enriquece a través del intercambio en foros de discusión, donde los estudiantes analizan y mejoran las producciones de sus pares, simulando dinámicas del mundo laboral. Esta experiencia evidencia que, incluso en entornos masivos de educación a distancia, es posible integrar la modelización matemática de manera efectiva para el desarrollo de competencias profesionales.

Estefanía CALVO
Universidad Nacional de Villa María, Argentina

15:00-15:45 horas

CONFERENCIA CA.3

Conhecimento matemático-pedagógico de professores da Educação Básica

Claudia L. OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana do Brasil, Brasil
Universidade Franciscana de Santa Maria (UFN), Rio Grande do Sul, Brasil
Presidente SBEM, Brasil

15:45-16:30 horas

CONFERENCIA CA.4

Aprender a mirar situaciones de enseñanza de las matemáticas: ¿ves lo mismo que yo? Un reto en la formación de los futuros docentes

María del Mar MORENO MORENO
Universidad de Alicante, España

16:30-18:30 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-2

FORMACIÓN DE PROFESORES EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-2

Sobre la formación en Educación Matemática de Docentes de Matemática

Los docentes problematizan la formación planteada en asignaturas de educación matemática que recibe un futuro docente de matemática.

Aquí, desarrollaré la presentación alrededor de dos ejes: el primero que alude a los contenidos de educación matemática que forman parte de los planes de estudio de la formación docente y, el segundo, referido a la metodología de trabajo que el formador plantea en las clases.

Además, se articularé la presentación con aportes de distintos autores de la comunidad científica y, en la medida de lo posible, se incluirán ejemplos ad hoc.

Mabel RODRÍGUEZ
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.1

¿Clases de Matemáticas en una asignatura de Didáctica de la Matemática?: Cuando, por qué y para qué. Una experiencia en formación de maestros

Esta disertación considera la implementación de una serie de actividades dentro de un modelo pedagógico diseñado para la formación inicial de maestros en educación matemática, específicamente para aquellos que enseñarán en educación básica primaria. El modelo propone tres fases: diagnóstica, preparatoria e inmersiva. En esta presentación, se aborda la fase preparatoria, con el propósito de dar respuestas a cuándo, por qué y para qué podrían incluirse clases de matemáticas en una asignatura de Educación Matemática en la formación inicial de maestros.

Las actividades fueron diseñadas para estudiantes del programa de formación complementaria en una Escuela Normal Superior en Bogotá, Colombia. La implementación de esta fase dentro del curso de didáctica de la matemática busca situar a los futuros maestros en una experiencia de aprendizaje basada en la resolución de problemas desde un enfoque constructivista. Mediante esta aproximación, los participantes asumen el rol de estudiantes en una clase de matemáticas, lo que les permite reflexionar sobre su propio aprendizaje y fortalecer sus conocimientos matemáticos. Este proceso es clave para su futura práctica docente, ya que les brinda herramientas para comprender y abordar los desafíos de la enseñanza en educación básica primaria.

Rubén E. ESCOBAR SÁNCHEZ
Universidad Antonio Nariño, Colombia
Escuela Normas Superior Distrital María Montessori, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.2
Profesionalización Docente: una experiencia en formación inicial de Profesores de Matemática

En esta disertación procederé a describir una experiencia de profesionalización docente llevada a cabo en formación inicial de profesores de la Universidad Nacional de General Sarmiento. Su aspecto central es que los estudiantes participan en distintas actividades de inmersión en el rol docente a la vez que adquieren contenidos de educación matemática.
En una primera instancia se plantea cuál es la problemática que da lugar a esta propuesta, el contexto de trabajo en la materia y se explica la base que sustenta a esta experiencia, para luego describir tres actividades que fueron utilizadas en el año 2024. En particular, se ha seleccionado una de ellas para desarrollar y analizar con más detalle las cuestiones que fueron trabajadas, surgidas en clases. Por último, se explica cuál es el rol del formador durante el proceso, de qué forma se realiza el seguimiento de cada estudiante y se muestra, a modo de ejemplo, cómo fue diseñado un examen final de la materia.
Para finalizar el trabajo, se dejan indicadas algunas sugerencias que contribuyen a delinear nuevas situaciones de la práctica profesional docente que podrían formar parte de la propuesta en una nueva edición de la materia.

Paula LEONIÁN
Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina

DISERTACIÓN INVITADA GTD-2.3
Fortalecimiento del desarrollo profesional de docentes de Matemática del nivel medio: experiencias y perspectivas desde un ciclo de formación en Paraguay

La indagación de las perspectivas ministeriales en contraste con las prácticas docentes, arrojó como resultado la necesidad de fortalecimiento de las capacidades del profesor de matemática de educación media del sistema educativo paraguayo. Para atender esta situación dentro del marco de la ejecución de un proyecto de investigación cofinanciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Paraguay) se diseñó e implementó un dispositivo de formación a los efectos de fortalecer las competencias del docente para la enseñanza de la matemática. El mismo consistió en un Diplomado en Educación Matemática, dirigido a docentes en actividad de los departamentos Itapuá, Misiones y Ñeembucú.

Se trabajó con un grupo de docentes en el estudio y análisis de consignas provistas por la instancia ministerial para su uso en clases. En el Diplomado se problematizó la formulación de actividades y su potencial para trabajarlas en clases bajo la resolución de problemas o modelización matemática. Asimismo, en un segundo momento, los docentes asistentes estuvieron enfrentados a diseñar un plan de clases para su posterior implementación. En esta disertación se presentan los puntos más relevantes de esta experiencia. Como resultados, se comparten las percepciones sobre cómo los participantes abordaron las consignas propuestas del cursado y el proceso que recorrieron los docentes para la elaboración del plan de clase, desde el cual se advierte la necesidad de fortalecer el conocimiento especializado de matemática de los profesores.

Adilio Gabriel LEZCANO
Universidad Nacional de Pilar, Paraguay

18:30-19:15 horas
CONFERENCIA CA.5
Innovación como resultado de investigación de la Visión Etnomatemática de Ubiratán D'Ambrosio
José Alfredo CASTELLANOS SUÁREZ
Universidad Autónoma Chapingo, México

Viernes 16 de mayo de 2025

09:00-09:45 horas
CONFERENCIA CA.6
Dialéctica entre la ética comunitaria y el desarrollo de pensamiento matemático
Rodolfo VERGEL CAUSADO
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

09:45-10:30 horas
CONFERENCIA CA.7
La historia de las matemáticas como fuente para encontrar argumentos para abordar discrepancias conceptuales en la enseñanza
Roberto VIDAL CORTES
Universidad Alberto Hurtado, Chile

10:30-11:15 horas
CONFERENCIA CA.8
Competencia Argumentativa en formadores de futuros docentes de matemática como herramienta para el logro de aprendizaje
Marcos BARRA BECERRA
Universidad Alberto Hurtado, Chile

11:15-12:00 horas

CONFERENCIA CA.9

ABP en cursos de alta matrícula: del sueño a la realidad

Gabriel R. SOTO

Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, Argentina

12:00-14:00 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-3
ANÁLISIS BASADOS EN PROYECTOS
EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-3

Tecnología en Educación Matemática

El propósito de esta Conferencia yace en abundar sobre las posibilidades de uso y beneficios que brinda el uso de tecnologías en las prácticas docentes; algunos de esos beneficios son:

Visualización de conceptos abstractos: La tecnología permite representar de forma visual y dinámica conceptos matemáticos que, de otra manera, serían difíciles de comprender. Herramientas como gráficos, simulaciones o software de geometría (por ejemplo, GeoGebra) permiten a los estudiantes ver en forma interactiva cómo funcionan las ecuaciones, transformaciones geométricas, o el comportamiento de funciones.

Interactividad y personalización: Las plataformas tecnológicas permiten a los estudiantes interactuar con el contenido matemático, lo que facilita el aprendizaje autónomo. Pueden practicar a su propio ritmo, recibir retroalimentación inmediata y adaptar el contenido a sus necesidades y estilos de aprendizaje.

Fomento de habilidades del siglo XXI: El uso de la tecnología en matemáticas no solo desarrolla las habilidades matemáticas, sino también habilidades digitales, de resolución de problemas y de pensamiento crítico, todas ellas esenciales en la sociedad actual. Los estudiantes aprenden a utilizar herramientas que les serán útiles en muchos otros campos.

Facilita el aprendizaje colaborativo: Las tecnologías permiten que los estudiantes trabajen juntos en proyectos matemáticos, resolviendo problemas en equipo, lo que fomenta la colaboración, la discusión y el intercambio de ideas.

Acceso a recursos educativos de calidad: Internet ofrece una gran cantidad de recursos matemáticos, desde tutoriales hasta problemas resueltos y aplicaciones interactivas. Los estudiantes pueden acceder a estos recursos en cualquier momento y desde cualquier lugar, lo que les permite enriquecer su aprendizaje fuera del aula.

Automatización de tareas repetitivas: Herramientas como calculadoras avanzadas, software de álgebra computacional y hojas de cálculo permiten a los estudiantes realizar cálculos complejos en forma rápida y precisa, permitiéndoles centrarse en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas en lugar de perder tiempo en cálculos tediosos.

Evaluación continua y personalizada: Las plataformas tecnológicas permiten realizar evaluaciones constantes y adaptativas, brindándoles a los docentes la oportunidad de seguir el progreso de cada estudiante detalladamente. Esto facilita la detección temprana de áreas problemáticas y permite una intervención oportuna.

Durante la Conferencia, se ilustrarán estas y otras ventajas, sobre todo vinculadas a la Educación por Proyectos.

Juan E. NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISEERTACIÓN INVITADA GTD-3.1
Enseñanza por proyectos en Educación Matemática
como oportunidades de aprendizaje de calidad en estudiantes de un contexto rural

La enseñanza por proyectos en Educación Matemática constituye un escenario que brinda oportunidades de aprendizaje de calidad y un acceso equitativo a las mismas. Una forma que se ha explorado, para su implementación es mediante movimientos entre distintos ambientes de aprendizaje, en el contexto de la Educación Matemática Crítica. Estos movimientos, ofrecen andamiaje a los estudiantes para desarrollar habilidades propias del pensamiento matemático. Además, el trabajo por proyectos, despierta el interés y motivación en los estudiantes, siempre que este ocupe el centro del proceso de aprendizaje. Aunque, existe una plétora de investigaciones que se reportan sobre esta metodología de enseñanza y aprendizaje, aún existen desafíos en su implementación y evaluación.

Sandra Patricia ROJAS SEVILLA
Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.2
Resolución de Problemas en la enseñanza de las matemáticas
en la educación básica y media

La resolución de problemas puede ser una buena estrategia en el proceso de enseñanza de las matemáticas, especialmente en niveles de educación básica y media, pues permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento matemático en forma gradual, sobre todo si se trabaja desde problemas simples a problemas complejos. En ese sentido, es importante plantear problemas que desafíen a los estudiantes y les permitan desarrollar habilidades de razonamiento y de resolución de problemas, es decir, la resolución de problemas como medio y como fin. Asimismo, es importante que los profesores planteen buenas preguntas para guiar el proceso de resolución de problemas y hacerlo más eficiente.

Roberto Carlos TORRES PEÑA
Universidad del Magdalena, Santa Marta, Colombia

DISERTACIÓN INVITADA GTD-3.3
Reflexión sobre el uso de herramientas digitales
en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Se pretende hacer una reflexión sobre algunos usos dados a las herramientas digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la forma en que estos usos se apartan o direccionan hacia las directrices o lineamientos planteados por las investigaciones recientes sobre este tema. La clave está en cómo estos usos pueden jugar un papel trascendental o no en la comprensión del conocimiento disciplinar, el desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

En cuanto a los usos sin trascendencia se esbozan: el uso icónico, el cambio de representaciones estáticas a ejecutables y en el peor de los casos, aquellos que tergiversan el conocimiento disciplinar. En lo atinente a los usos con capacidad de trascendencia se resaltan: el uso como validación o apoyo a la actividad demostrativa, como procesadores de grandes cantidades de datos (simulación y programación) y como instrumento de mediación cognitiva, estos últimos no son jerárquicos ni disjuntos, su alcance depende de la guía del orientador o docente. Se pretende incentivar y motivar a todos aquellos sujetos o actores implicados en la formación matemática a realizar o hacer un buen uso de estas herramientas que busquen la mediación o co-construcción de aprendizajes en los estudiantes, es decir, que brinden la posibilidad de reorganizar y amplificar su conocimiento, y dejar de lado la idea de llevarlas al aula sin un propósito determinado, esto es, sin que lleven intrínsecamente la anhelada intención de innovar.

Jaider Albeiro FIGUEROA FLÓREZ
Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, Colombia

15:00-15:45 horas

CONFERENCIA CA.10

¿Por qué es necesaria la Alfabetización Estadística?
Una síntesis de su evolución

Adriana D’AMELIO
FCE, Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
Subdirectora, ISLP “Proyecto de Alfabetización Estadística Internacional”
l IASE - ISI

15:45-17:45 horas

GRUPO DE TRABAJO-DISCUSIÓN GTD-4
EDUCACIÓN ESTOCÁSTICA

CONFERENCIA CENTRAL GTD-4

Estadística y Probabilidad en Contexto, su importancia:
una rápida vista desde el pasado hacia el futuro…

Por qué son importantes el Pensamiento Estadístico y el Pensamiento Probabilístico, y específicamente el Pensamiento Bayesiano? La respuesta es simple, pues reflejan la necesidad del cerebro que también se corresponde análogamente, Cerebro Estadístico, Cerebro Probabilístico, Cerebro Bayesiano; todos estos conceptos se desarrollaron en niveles superiores desde los estudios biológicos, y luego desde las Neurociencias como a partir del nacimiento de la Inteligencia Artificial, a mediados del siglo XX, y en medio de problemas críticos para la humanidad, distintas disciplinas se unieron para mejorar los enfoques, en forma transdisciplinar. Por cierto, ambas grandes disciplinas se necesitan y potencian en la construcción de los procesos de aprendizaje y en sus mejoras, los consecuentes procesos de meta-aprendizaje; por lo tanto, es fundamental la integración de estas disciplinas en el campo de la Educación Estadística y la Educación Probabilística, visibilizadas en el contexto de la Educación Estocástica, enseñando a pensar con el propósito de resolver situaciones de incertidumbre.

Programa General

Sin embargo, la Estadística y la Probabilidad, que en numerosas oportunidades, "a duras penas" se enseñan en algunos contextos en niveles educativos desde la enseñanza básica hasta la enseñanza superior, no son las únicas disciplinas para resolver situaciones de incertidumbre, … y otras peores, situaciones de imprecisión, pero eso constituye… otros capítulos, aunque, precisamente la mentada, hoy por hoy, Inteligencia Artificial, es la que ha permitido, mediante la interpretación de sus investigadores, utilizar muchas de esas teorías, en forma adecuada y en contexto.

El Pensamiento Estadístico se sustenta en la Teoría en Administración del estadístico William Edwards Deming, quien desarrolló el Sistema de Conocimiento Profundo, cuya esencia son los tres principios del Pensamiento Estadístico: (1) Todo trabajo ocurre en un sistema de procesos interconectados; (2) La variación existe en todos los procesos; (3) La clave del éxito se alcanza comprendiendo y reduciendo la variación del proceso.

El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad que suceda algún resultado específico. En este contexto, el Pensamiento Probabilístico posibilita identificar los resultados más probables; de tal modo, las decisiones se consideran más precisas y efectivas. El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones.

Laplace afirmó: "Es notable que una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar haya llegado a ser el objeto más importante del conocimiento humano". Comprender y estudiar el azar es indispensable, pues la probabilidad es un soporte necesario para tomar decisiones en cualquier ámbito. Esta afirmación es la base del proceso de aprendizaje, y por eso, es absolutamente necesario definir modelos de aprendizaje, y enfáticamente, el trabajo de la Educación Estocástica, en puntualizar estas ideas y formalizar el pensamiento intuitivo, a instancias del razonamiento abductivo.

En tanto que para que exista una significativa percepción de lo Estocástico, es necesario el desarrollo del Pensamiento Estadístico y Probabilístico, hecho que exige un trabajo orientado hacia las formas de razonamiento combinatorio, asociados al razonamiento probabilístico y estadístico. El Pensamiento Estocástico evoluciona continuamente por el desarrollo de la matemática y la física principalmente.

La exploración al azar, la curiosidad estocástica y la generación aleatoria de descargas neuronales juegan un rol clave en el proceso de aprendizaje, y en el aprendizaje mismo.

Jorge E. SAGULA
Profesor Titular, División Matemática, Departamento Ciencias Básicas
Profesor Asociado, División Estadística, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Científico, Workshop INCOIN
CEO y Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.1
El emerger del Pensamiento Estadístico

Pareciera ser relevante profundizar en el origen del pensamiento estadístico; esta indagación, podría arrojar luces acerca de su naturaleza. Datos apropiados constituyen el terreno donde se desarrolla este pensamiento. Al respecto, hay evidencia del esfuerzo puesto en ciertas investigaciones aplicadas acerca de una apropiada generación de los datos; por ejemplo, en investigaciones clínicas uno de los criterios de revisión de lo que se considera datos apropiados dice relación con las denominadas “definiciones operacionales” (Moses, 1992). Sin embargo, es claro que estas precisiones respecto a las mediciones que se realizan no son garantía suficiente de que los datos recabados contengan la información relevante para el estudio.
Por otro lado, en más de un estudio estadístico, los datos han sido generados inteligentemente relegando a segundo lugar el énfasis en el control del error de la medición bajo una precisión exacerbada. En particular, en esta disertación se considera el estudio de Galton (1886) y otras situaciones de interés para explorar una visión acerca del pensamiento estadístico que reconoce la existencia de este pensamiento en forma previa a los datos. Esta visión podría ayudar a precisar el rol del pensamiento estadístico en el ambiente de la ciencia de datos en general.

Héctor HEVIA
Universidad Adolfo Ibáñez,Chile

DISERTACIÓN INVITADA GTD-4.2
Inteligencia Artificial Generativa
en la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística

La perspectiva frecuentista de Probabilidad fue introducida oficialmente en los currículos brasileños con una publicación del Ministerio de Educación, de la Base Común Curricular, en el año 2018.
Esta perspectiva fue precedida por la perspectiva clásica, lo que refuerza la vista artificial de la equiprobabilidad, generando obstáculos epistemológicos, considerando la naturaleza contra-intuitiva de los fenómenos estocásticos.
En la realización de un estudio de caso, en la perspectiva Probabilística de Gal, he analizado las concepciones de los estudiantes de un curso de enseñanza media (16-18 años de edad), explorando libros didácticos, para-didácticos, juegos, simulaciones computacionales y el ChatGPT. Los resultados apuntaron hacia el desarrollo de nuevas concepciones, involucrando los conceptos de variabilidad y aleatoriedad.

Cassio GIORDANO
Universidade Federal do Rio Grande, Brasil

17:45-19:30 horas
PANEL DE CLAUSURA
EDUCACIÓN MATEMÁTICA e INCOIN:
VISIONES TRANSDISCIPLINARES

Programa General

DISERTACIÓN PC-1
La Educación Matemática en la Era de la Inteligencia Colectiva:
un Enfoque Sistémico
Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ
Universidad Nacional de Trujillo, Perú
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

DISERTACIÓN PC-2
Los problemas fundamentales del Cálculo hoy:
una Visión Transdisciplinar
Juan E. NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN PC-3
De la Resistencia a la Adopción:
¿Cómo la IA Generativa puede transformar
la práctica de los Profesores de Matemática?
Helcio SOARES PADILHA Jr.
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

DISERTACIÓN PC-4
Refinando Rutas de la Educación Matemática:
Conexiones Academia-Entorno en horizontes de Inteligencia Artificial
Rafael LORENZO MARTÍN
Dirección de Ciencia, Tecnología e Innovación,
Vicerrectoría de Investigación y Posgrado, Universidad de Holguín, Cuba
Departamento Licenciatura en Matemática,
Facultad de Informática, Matemática y Ciencias de la Información
Universidad de Holguín, Cuba
Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

DISERTACIÓN PC-5
Matemáticas más allá de las fronteras:
Transdisciplinariedad e Inteligencia Artificial
Marcel POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

DISERTACIÓN PC-6
Puente Natural desde Educación Matemática hasta INCOIN: Búsqueda Continua de Visiones Transdisciplinares

Jorge E. SAGULA
Profesor Titular, División Matemática, Departamento Ciencias Básicas
Profesor Asociado, División Estadística, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Científico, Workshop INCOIN
CEO y Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

Presentadora-Moderadora
Emma L. FERRERO
Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina

Índice Referencial

Paneles y Conferencias - Índice

Paneles y Conferencias - Índice

Paneles y Conferencias - Índice

PANEL DE APERTURA
"EL PROBLEMA DE LA ÉTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA"

Disertación PA-1
Hacer referencia a la ética en la praxis docente

La ética se presenta a veces como puente de conjunción y de debate entre la filosofía y la educación, con análisis muy precisos y significativos, incluso concretos acerca del papel del docente, incluyendo discusiones sobre la sensibilidad, el espacio ético del cuerpo y las funciones estéticas interpretadas como elementos descriptivos de una ética pedagógica.
A veces, la relación se invierte, y el debate se sitúa entre educación y filosofía; no son situaciones idénticas, sino simétricas, algunas incluso pueden ser concretas, como la presencia de la problemática de la ética en la matemática y en su enseñanza. El encuentro con el otro puede determinar la dimensión ética pero siempre de forma específica y significativa en la educación matemática.
Desde estos diferentes pero complementarios ángulos teóricos, tan específicos y significativos, se determina con precisión qué se entiende con "ética" en una situación escolar.
Un ejemplo significativo y específico se tiene en la teoría de la objetivación en la cual la educación matemática es vista como esfuerzo social volcado a la creación de sujetos que vienen a idear, imaginar y compartir formas de vida colectiva, como resultado del impulso que han recibido hacia formas potenciales de acción y de pensamiento. Es evidente cómo el contenido matemático de las acciones que se cumplen en la enseñanza de la matemática no es más que una componente, no se habla de la componente; acción no sólo sobre el saber, sino sobre el ser, tanto de llegar a concebir el proceso de enseñanza-aprendizaje como una dimensión que involucra estos dos aspectos fundamentales del individuo, saber y ser.
Dado que aquel sobre el cual este proceso de aprendizaje está construido/hipotetizado/realizado es un ser humano, los aspectos culturales deben ser parte de ese proceso; pero también deben serlo los aspectos relacionales, colectivos y sociales, éticos precisamente; y siendo este fenómeno tan absorbente en el plano humano, ninguno de los aspectos emocionales puede ser minimizado: aprendiendo, el individuo se transforma porque entra en contacto con hechos históricos culturales e históricamente situados en la sociedad.
Es por esto que se habla siempre, a este propósito, de "encuentro", dado que se ponen en contacto sistemas de pensamiento, de evoluciones vitales, de acciones que determinan la sociedad con la cual el estudiante se relaciona. Este encuentro no es sólo heterólogo, sino que también es personal. Gracias a este proceso, quien aprende entra en contacto con sí mismo, en su singularidad y en su pertenencia a una sociedad que está, ética e históricamente, descubriendo y al mismo tiempo construyendo.

Dr. Bruno D'AMORE
Doctorado de Investigación, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
Accademia delle Scienze di Bologna, Italia

Disertación PA-2
Ética y Didáctica de la Matemática

El término "ética" puede ser interpretado en referencia al conjunto de normas y de valores sobre los cuales se fundamentan las reglas del comportamiento humano en una sociedad de la cual uno es parte. Pero, puede también ser considerado como un criterio de juicio relativo a los comportamientos tanto propios como de los otros. Dado que la descripción precedente está sujeta a interpretaciones personales, son muchos quienes confunden la ética con la moral. En mi opinión, sin embargo, la ética comprende una reflexión lógica y racional sobre los eventos sociales, que en la moral no se requieren. Si se razona así, se comienza a intuir el por qué tiene sentido hablar de ética en un tema como la Didáctica.

Son obvios los aspectos institucionales, normativos y sociales: el ser humano es parte de la institución (por ejemplo: la clase, la escuela) y la ética no tiene que ver con un determinado individuo en sí, sino que tiene que ver con la relación de éste con los otros individuos dentro de la institución misma. Se trata de un tema relacional y social. Al interno de la institución, la ética guía la acción del individuo en relación con los demás y condiciona los sentimientos; y tiene profundos aspectos sociales porque lleva a evitar el deseo de satisfacer sólo los intereses personales en favor de objetivos más amplios, los objetivos sociales, precisamente. Hasta hacer del ser individual un individuo social: un juego de palabras iluminante.

Ahora bien, pensando en todos los factores emocionales, sociales, interpersonales que se encuentran en el trabajo didáctico, los conceptos de labor conjunta, de subjetivación, de objetivación, inducen a pensar que, más allá de lo que emerge en la labor común en aula entre docente y alumno, entre alumno y compañeros, en la sociedad concreta y no sólo en la sociedad ideal "clase", los principios éticos, relacionados con los sentimientos personales implicados en los procesos de objetivación son relevantes, complejos, y, al mismo tiempo, espontáneos, y forman parte de aquello que a veces, ingenuamente, se llama aprendizaje.

Es así como adquiere sentido completo la idea que algunos estudiosos de didáctica de la matemática centren sus análisis en el tema de la ética, en particular para quienes se inspiran en aquellas teorías de la didáctica de la matemática que se aglutinan bajo el nombre de teoría de la objetivación, en la cual se promulgan ideas que no encuentran espacio en teorías precedentes relacionadas con las interacciones sociales que se desarrollan en aula y a la idea que aprender (la matemática) significa formar parte de una sociedad, desarrollar un conocimiento y una conciencia histórica de pertenencia.

Dra. Martha Isabel FANDIÑO PINILLA
Grupo de Investigación NRD, Departamento de Matemática,
Universidad de Bologna, Italia

<u>Disertación PA-3</u>

Ética y Pensamiento Matemático

Esta disertación se centra en discutir la incidencia de las formas de interacción y cooperación humana en el desarrollo del pensamiento matemático. Investigaciones en el campo de la Educación Matemática han documentado diferentes formas de interacción social en el aula y sugieren profundizar en el problema sobre cómo estas formas inciden en la evolución del pensamiento matemático de los estudiantes (Lasprilla, 2021; Bayona y Vergel, 2025; Vergel y León, 2024). Asumiendo la perspectiva de la ética como la forma de la alteridad (Radford, 2021), más específicamente mi propósito es abordar una discusión sobre la incidencia de los vectores de una ética de orientación comunitaria (responsabilidad, cuidado del otro, compromiso con el trabajo conjunto) en los procesos de pensamiento matemático, por caso, generalizaciones que elaboran estudiantes de la escuela primaria (Vergel et al., 2022), formas de pensamiento proporcional (Moreno & Vergel, 2024), entre otros casos. En términos de profundizar la discusión, mi objetivo es apoyarme en un ejemplo de análisis de tipo multimodal para ilustrar la movilización no solo de recursos cognitivos, sino también, de recursos físicos y perceptuales cuando se abordan ideas matemáticas. En particular, la reflexión educativa subraya la incidencia de los componentes analíticos o vectores de una ética de orientación comunitaria en los procesos de generalización que realizan los estudiantes y en el tránsito a generalizaciones de nivel superior

Dr. Rodolfo VERGEL CAUSADO
Universidad Distrital Francisco José de Caldas de Bogotá, Colombia

<u>Disertación PA-4</u>

¿Por qué considerar la ética en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas?

La ética es un tema transversal en todo proceso de enseñanza y aprendizaje (Ortega, 2004).

Esto significa que, independientemente de la asignatura o del nivel educativo, es fundamental reflexionar sobre el papel de la ética en la manera en que actuamos y, aún más, en el ejercicio de la profesión docente.

En particular, dentro de la Educación Matemática, el estudio de la ética ha cobrado relevancia desde distintos enfoques, como la Teoría de la Objetivación (TO) y la Educación Matemática Crítica. La enseñanza de las matemáticas no puede limitarse únicamente al desarrollo de conceptos matemáticos, ya que los procesos de enseñanza-aprendizaje también involucran la formación de subjetividades y la constitución de identidad como seres humanos.
Desde la perspectiva de la TO, se propone una ética comunitaria, cuyo propósito es reformular los lazos sociales entre los individuos con la visión de una comunidad genuinamente humana y solidaria. Esta ética busca definir, de manera constante y en medio de inevitables tensiones, lo que puede ser una vida buena y justa para todos (Radford, 2018).
En este sentido, la reflexión sobre los aspectos éticos que influyen en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sigue en desarrollo. Esto cobra aún más importancia en contextos como el de Latinoamérica, donde la violencia y las agresiones han marcado gran parte de la historia. Ante esta realidad, resulta cada vez más evidente la necesidad de fomentar la empatía y fortalecer las relaciones humanas en el ámbito educativo.

Dra. Adriana LASPRILLA HERRERA
Secretaria de Educación, Bogotá, Colombia

Presentador-Moderador

Lic. Jorge E. SAGULA
Universidad Nacional de Luján, Argentina

VI SEM-V

PANEL DE CLAUSURA
EDUCACIÓN MATEMÁTICA e INCOIN: VISIONES TRANSDISCIPLINARES

Disertación PC-1
La Educación Matemática en la Era de la Inteligencia Colectiva: un Enfoque Sistémico

En la era de la Inteligencia Colectiva, la Educación Matemática debe ir evolucionando hacia la integración de la colaboración y el intercambio de saberes: conocimientos formales y estructurados, contextuales y experienciales, metodológicos y pedagógicos, como pilares fundamentales para un aprendizaje significativo, capaces de potenciar su aplicación en otras disciplinas, contribuyendo a la mejora de la calidad de vida de las personas en un mundo mejor.

Desde el Enfoque Sistémico, propongo la redefinición de la Enseñanza Matemática, dejando el Modelo Tradicional basado únicamente en la transmisión de conceptos y fórmulas, hacia un proceso integral de construcción colaborativa del conocimiento aplicable. Esto supone potenciar la Inteligencia Colectiva y generar un ecosistema educativo dinámico en el cual, tanto los estudiantes, como los docentes, las instituciones, la tecnología y las disciplinas–saberes, interactúen, a partir del Modelado de Procesos hacia la generación de valor, el uso de Diagramas para visualizar las interrelaciones y Estructuras de Conocimiento, e incluso creando Redes de Aprendizaje de modo que el intercambio de ideas, enriquecido con el enfoque de la Dialéctica, permitan la transformación a partir del desarrollo de Competencias Transversales, mediante la utilización del Pensamiento Analítico, Crítico y Creativo en contextos, que empodere a los estudiantes para afrontar problemas complejos de la vida real, buscando se pueda adaptar a entornos interdisciplinares. Esta idea yace en que la Enseñanza Matemática, se convierta en un Motor de Modernización Educativa, orientado a la optimización de recursos y a la mejora continua de la calidad formativa.

Este enfoque, a mi juicio, fortalece la comprensión de los fundamentos matemáticos y empodera al estudiante a partir del liderazgo de sus docentes, en aras de afrontar desafíos del mundo real en forma colaborativa e innovadora, aportando a la construcción de un futuro educativo resiliente y más adaptativo, en el cual la convergencia de ideas y la sinergia de conocimientos impulsen una verdadera Nueva Era en la Educación Matemática.

Dr. Grover E. VILLANUEVA SÁNCHEZ
Escuela de Postgrado, Universidad Nacional de Trujillo, Perú
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

Disertación PC-2
De la Resistencia a la Adopción: ¿Cómo la IA Generativa Puede Transformar la Práctica de los Profesores de Matemática?

En esta disertación, exploraré cómo la Inteligencia Artificial Generativa, en particular, mediante herramientas como ChatGPT, puede ser una aliada poderosa en la enseñanza de la matemática. A partir de experiencias con profesores en diferentes contextos educativos, abordaré los desafíos y resistencias comunes frente a la incorporación de la IA en la educación, así como estrategias efectivas para su adopción.

En el contexto de la exposición, analizaré casos concretos en los cuales la IA ha optimizado la planificación de clases, facilitando la personalización del aprendizaje, pudiendo promover el desarrollo del pensamiento matemático. Además, reflexionaré sobre los límites y las precauciones necesarias para un uso pedagógico crítico y ético, destacando el rol insustituible del docente como mediador del conocimiento.

El propósito es que tanto educadores como futuros docents, puedan comprender cómo la IAG puede integrarse significativamente a su práctica, superando barreras y potenciando la enseñanza de la matemática.

Mg. Helcio SOARES PADILHA Jr.
Universidade Luterana do Brasil, Brasil

Disertación PC-3

Los problemas fundamentales del Cálculo hoy: una Visión Transdisciplinar

Es bien sabido que el Calculus tiene dos problemas fundamentales: dada una curva y un punto perteneciente a ella, construir la recta tangente a la curva que pasa por dicho punto y calcular el área de una figura, no expresable en términos de figuras elementales. El primero se resuelve en el Cálculo Diferencial, en tanto que el segundo, en el Cálculo Integral. El objetivo de esta disertación reside en ilustrar cómo, a la luz del desarrollo de los conceptos clásicos de derivada de una función en un punto e integral definida, se han "modificado" las interpretaciones geométricas en los nuevos marcos obtenidos, hecho que ha conllevado una relación biunívoca entre diversas áreas de la Matemática y la Educación Matemática, que transciende cada disciplina en particular y lleva a un enfoque convergente, donde el desarrollo matemático en un área tan actual como el Cálculo Generalizado, repercute en nuestras prácticas docents, en particular y la Educación Matemática, en general.

Dr. Juan NÁPOLES VALDES
Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Disertación PC-4

Refinando Rutas de la Educación Matemática: Conexiones Academia-Entorno en horizontes de Inteligencia Artificial

La integración de la Inteligencia Artificial (IA) en la Educación Matemática no sólo permite optimizar los procesos de enseñanza-aprendizaje, sino que también habilita a los estudiantes para enfrentar los retos y aprovechar las oportunidades de la era digital. En este contexto, la automatización, la toma de decisiones basadas en datos y la innovación tecnológica son elementos clave que contribuyen al éxito profesional. En el presente existe un cambio cultural significativo en las formas de enseñar, aprender y abordar el proceso educativo escolarizado. Esta transformación demanda una revisión de las metodologías tradicionales, especialmente en la Educación Matemática, un área crucial para el desarrollo de las competencias del siglo XXI.

La convergencia de la Educación Matemática y las tecnologías inteligentes, como la IA, cobra especial relevancia en la era de la Educación 4.0, un entorno en el cual la digitalización redefine las formas de vivir y trabajar. La necesidad de cerrar la brecha entre la academia y el entorno profesional se vuelve más urgente, y la IA emerge como un puente fundamental que facilita esta conexión. Al integrar la IA en el currículo de matemáticas, los estudiantes adquieren habilidades necesarias en áreas como análisis de datos, modelización matemática avanzada y optimización de procesos. Estas competencias son esenciales para desenvolverse en la economía digital y otras dinámicas del entorno contemporáneo.

Este enfoque pone de manifiesto la importancia de adaptar las metodologías educativas a los avances tecnológicos mediante la convergencia de las inteligencias humana y artificial, enfoques más integradores, de manera de desdibujar las fronteras disciplinarias establecidas. Al incorporar herramientas de IA en la enseñanza de las matemáticas, se busca personalizar y hacer más eficiente el aprendizaje, permitiendo que los estudiantes accedan a una educación más interactiva y relevante para los desafíos del mundo real. Este proceso de integración tiene un impacto profundo en el ámbito educativo, pues no sólo mejora la calidad de la enseñanza matemática, sino que también prepara a los futuros profesionales para operar en entornos laborales que exigen dominio de tecnologías avanzadas. Al mismo tiempo, contribuye a la construcción de un sistema educativo más alineado con las exigencias de la Industria 4.0, que requiere soluciones inteligentes, adaptativas y eficientemente interconectadas entre la teoría y la práctica.

Dr. Rafael LORENZO MARTÍN
Dirección de Ciencia, Tecnología e Innovación,
Vicerrectoría de Investigación y Posgrado, Universidad de Holguín, Cuba
Departamento Licenciatura en Matemática,
Facultad de Informática, Matemática y Ciencias de la Información,
Universidad de Holguín, Cuba
Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

Disertación PC-5

Matemáticas más allá de las fronteras: Transdisciplinariedad e Inteligencia Artificial

Se explorará el potencial de la Inteligencia Artificial como herramienta para brindar ayudas a los docentes en el diseño de tareas matemáticas transdisciplinarias, superando los tradicionales ejercicios basados en realidades artificiales y alejadas de la experiencia cotidiana. La IA permite no sólo acceder a investigaciones actualizadas en Educación Matemática, sino también comprender aplicaciones reales de la matemática en diversos campos científicos, algo que resulta complejo, incluso en la formación de profesores. A partir de esta capacidad, es posible diseñar problemas auténticos y significativos que despierten el interés del resolutor, promoviendo un aprendizaje más profundo y conectado con el mundo real.

Dr. Marcel D. POCHULU
Universidad Nacional de Villa María, Argentina
Universidad Tecnológica Nacional, FRVM, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Disertación PC-6

Puente Natural desde Educación Matemática hasta INCOIN: Búsqueda Continua de Visiones Transdisciplinares

Un puente existe si existen conceptos que requieren conexión o que se pueden conectar, pero un puente natural trasciende al concepto, pues existe una visibilidad manifiesta o bien, oculta que tan solo quien es capaz de percibir el context; pues entonces, la Educación Matemática es lo que incumbre a este SEM, desde hace 5 años SEM-V, en sus ya 18 ediciones, bajo distintas miradas, con diferentes enfoques, en distintos niveles educativos, con distintos constructos, con diferentes percepciones, pero en la búsqueda de la mejora en la transformación del conocimiento matemático en procura de la comprensión y el aprendizaje creciente desde la propia matemática en sus distintas integraciones, pero cabe preguntar, ¿qué es **INCOIN**? **INCOIN** es la síntesis de Inteligencia Colectiva–Convergencia Interdisciplinaria. ¿Cómo se produjo su nacimiento? Es la evolución manifiesta del Equipo **COIN** (Convergencia Interdisciplinaria), que concebí, en un momento aciago, en el contexto de la Pandemia CoVid-19, a partir de la resiliencia en julio'2020, y al poco tiempo, generó la concreción del I Workshop INCOIN, en febrero'2021, en modalidad virtual sincrónica, con la participación de especialistas, profesores-investigadores de ocho (8) países: Argentina, Brasil, Chile, España, Estados Unidos, Perú, Paraguay y Suecia, con el propósito de cubrir un amplio espectro de disciplinas, enfatizando en Inteligencia Artificial, Matemática, Estadística, Probabilidad, Investigación de Operaciones, Teoría de la Decisión, como principales, en aras de trabajar en investigación aplicada, postgrado, extensión y transferencia, con enfoque interdisciplinario contextualizado en la Tecnología de la Información y del Conocimiento, pero desde ese momento a hoy (febrero'2025) se desarrollaron veinticinco (25) ediciones del Workshop **INCOIN**, recorriendo: Argentina, Chile, Perú, Ecuador, Colombia, Brasil, México y Uruguay; específicamente, **INCOIN** tuvo un heredero, **INCOIN LEARNING**, constituyendo una vision más profunda, su primer Workshop (noviembre'2024) fue en Chile…Y realmente, los puentes se han multiplicado, y siguen su proceso natural de crecimiento, porque las visiones se expanden transdisciplinarmente, enfatizando en las intersecciones, unions no necesariamente clásicas sino también difusas, entre Matemática, Estadística, Probabilidad, Investigación de Operaciones, Industria 4.0, Big Data Science e Inteligencia Artificial, en amplios arcos, no sólo focalizando en Educación Superior sino en la transferencia a distintos ámbitos, y buscando fomentar la colaboración y el diálogo entre diferentes disciplinas, siendo el objetivo principal **impulsar el desarrollo de la Educación Superior** mediante la sinergia entre la Inteligencia Colectiva y la Convergencia Interdisciplinaria, tanto para potenciar la investigación, el postgrado y la extensión, amén de la transferencia educativa y de consultoría, por eso existe "un puente natural", y su expansión en búsqueda de nuevas fronteras, … hacia la transdisciplinariedad en forma continua.

Lic. Jorge E. SAGULA
Profesor Titular, División Matemática, Departamento Ciencias Básicas
Profesor Asociado, División Estadística, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Científico, Workshop INCOIN
CEO y Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING

Moderadora
Lic. Emma L. FERRERO
Directora Decana-Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina

Algunas componentes del aprendizaje de la Matemática

Bruno D'AMORE[1,2], Martha Isabel FANDIÑO PINILLA[1]

[1] N.R.D. c/o Dipartimento di Matematica, Università di Bologna, Italia
[2] Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia

Resumen

En este texto se examinan diversos componentes del aprendizaje de la Matemática, considerado como un conjunto de aprendizajes específicos, con el objetivo de evidenciar aspectos de la evaluación de los aprendizajes alcanzados.

Palabras clave: Aprendizaje de la Matemática. Saber. Concepto. Algoritmo. Problema. Comunicación. Registros Semióticos.

Diversas componentes en el aprendizaje de la Matemática

En nuestra opinión, el aprendizaje de la Matemática no es algo univoco, pues comprende como mínimo 5 tipologías de aprendizajes diferentes, aunque no libre de superposiciones:

aprendizaje conceptual (noética);

aprendizaje algorítmico (calcular, operar, efectuar, solucionar, ...)

aprendizaje de estrategias (resolver, conjeturar, deducir, inducir, ...)

aprendizaje comunicativo (definir, argumentar, demostrar, validar, enunciar, ...)

aprendizaje y gestión de las representaciones semióticas (tratar, convertir, traducir, representar, interpretar, ...).

Esta división no debe ser tomada literalmente, dado que estas componentes se entrelazan reforzándose la una con la otra; sin embargo, dicha división ofrece una indudable comodidad de análisis y de lectura interpretativa de los errores, es decir, de aquellas manifestaciones de malestar cognitivo a las cuales sería bueno remediar positivamente, de forma eficaz. No es ni menos garantizado que su unión logre abarcar todas las componentes del aprendizaje matemático y que, por lo tanto, un análisis mucho más profundo no evidencie otras componentes necesarias. Para consideraciones más vasta y profunda, se puede ver Fandiño Pinilla (2010).
Seguidamente, se detallarán estas componentes.

El aprendizaje conceptual

Debemos iniciar declarando que los conceptos de la Matemática tienen un carácter específico, en relación con las otras disciplinas y en particular con otras ciencias.
En las llamadas *ciencias experimentales* se puede recurrir a hechos, objetos, medidas, cosas, ... es decir se pueden indicar instrumentos, materiales concretos, hechos que son el objeto mismo del tratamiento o de la referencia ostensiva de lo que se está diciendo. En Matemática no: los conceptos de la Matemática revisten un aspecto ideal, pueden ser considerados, según las diferentes filosofías que se elaboran, abstractos, ideales, lingüísticos, resultados de acuerdos interpersonales, descubrimientos, inventos creativos etcétera, pero *no* caen bajo los sentidos.
Aristóteles afirmaba que una "cosa", es decir un objeto entendido en la acepción más ingenua, tiene tres características que la definen:

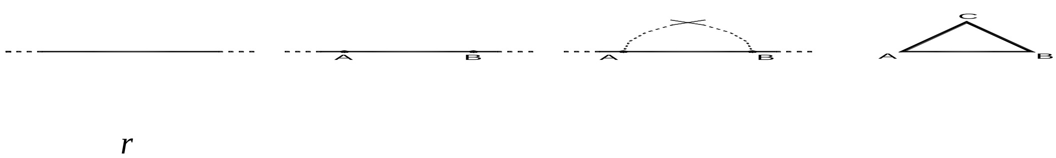
1. es tridimensional,
2. se percibe a través de los sentidos del ser humano
3. es separable de las otras "cosas".

Una recta no es tridimensional, no puede ser percibida por ninguno de los sentidos, no puede ser separada concretamente de los otros conceptos; por tanto, la recta no es una "cosa", ni lo es el número tres, ni el área, ni la división, ni la demostración, ni la implicación material, ...
Lo único que el ser humano está en grado de hacer, respecto a un concepto matemático que quiere evocar, es de elegir una representación en un registro semiótico oportuno, y trabajar sobre esta representación.
Si aceptamos un punto de vista ontológico, entonces tiene sentido, como es común entre los matemáticos, llamar "objetos" a los conceptos de la Matemática, en el sentido apenas delineado (para saber más, véase D'Amore, 2003b).
Los objetos de la Matemática no existen en la realidad concreta; entonces en Matemática lo único que podemos hacer es elegir un registro semiótico y *representar* dicho objeto en este determinado registro.
Lo que se aprende a manejar en Matemática, por tanto, no son tanto los objetos sino sus *representaciones* semióticas; incluso si el objetivo principal es alcanzar la noética, es decir el aprendizaje conceptual.
Debemos decir también que la actividad semiótica es parte constitutiva del aprendizaje, hace parte del funcionamiento cognitivo en Matemática, su función no es únicamente la de apropiarse o la de comunicar conceptos adquiridos por otra vía. No podemos no concordar con Duval (1993) que: «*No existe noética sin semiótica*», y esto tal vez no sólo en el aprendizaje de la Matemática.
Hay miles ejemplos bien conocidos por los cuales reenviamos a Duval (1993) y a Fandiño Pinilla (2010).
Es bien conocido que en semiótica son tres las operaciones fundamentales:
representación: elección de los elementos distintivos del objeto que se va representar y elección del registro semiótico en el cual se va a representar;
tratamiento: transformación de una representación semiótica en otra, en el mismo registro semiótico.
conversión: transformación de una representación semiótica en otra, en registros semióticos diferentes.
La construcción cognitiva de los objetos matemáticos está estrechamente ligada a la capacidad de usar *varios* registros de representación de dichos objetos.
Podemos, por tanto, declarar que el alumno ha logrado el aprendizaje conceptual de un determinado objeto cuando está en grado de:
elegir los rasgos distintivos de un concepto y *representarlo* en un determinado registro;

tratar dichas representaciones al interno de un mismo registro;
convertir dichas representaciones de un registro en un registro diverso.
Podemos considerar que un concepto está construido desde el punto de vista cognitivo cuando el alumno está en grado de:
identificar las propiedades del concepto que se pueden utilizar en un determinado contexto y por tanto de representarlo de manera adecuada según la situación;
transformar dicha representación si la situación lo exige;
usarlo en modo oportuno en una pluralidad de situaciones, incluso después de transformaciones de conversión.

El aprendizaje algorítmico

En general se piensa en un algoritmo como en una sucesión finita de pasos predeterminados, mecánicos, no necesariamente aritméticos, elementales, que llevan de un estadio a un otro en un cierto proceso.
Por ejemplo, pasamos de la solicitud: 32×6=?, a la respuesta:
6×2 da 12; escribe 2 y memoriza 1;
6×3 da 18; agrega el 1 que tenías memorizado obteniendo 19;
escribe 19 antes del 2 que habías escrito antes;
lee el número obtenido: 192.
Se trata de cuatro pasos elementales, mecánicos, que permitieron dar respuesta 192 a la pregunta inicial.
Se trata, por tanto, en nuestro ejemplo, de dar respuesta a una operación aritmética, afrontar y llevar a término un cálculo, aplicar fórmulas conocidas.
Pero, existen otros géneros de algoritmos, no sólo aquellos aritméticos.
Por ejemplo, supongamos de tener que diseñar el triángulo equilátero de lado AB con regla y compás:



En una recta *r* son datos los dos puntos A y B;
se centra el compás en A con abertura AB y se traza un arco en uno de los dos semiplanos de origen *r*;
se centra el compás en B con abertura AB y se traza un arco en el mismo semiplano;
los dos arcos o sus prolongaciones se interceptan en el punto C;
se une C con A;
se une C con B;
se obtiene el triángulo equilátero ABC de lado AB, solicitado.
Se trata de 6 pasajes elementales.
La realización de cada uno de estos pasajes es mecánica, pero requiere, a la base, una total conciencia de lo que está sucediendo; por ejemplo: ¿Por qué la longitud de AC coincide con aquella de AB?
Un ejemplo conocido también por los niños es el siguiente: con regla y compás, diseñar el hexágono regular que tiene como lado el segmento AB. El Lector lo puede afrontar por sí mismo.

El aprendizaje estratégico

Es sabiamente típico de la actividad didáctica la de potenciar y dar importancia a procedimientos y estrategias que se ponen en acto cuando se resuelve un problema. De hecho, se requiere convencer a los estudiantes que lo que cuenta es el proceso más que el resultado y, en la actividad estratégica de resolución de problemas, esto es lampante. Nos valemos de lo que sigue a continuación de D'Amore (1993) que presenta reflexiones teóricas que no se refieren a un especifico nivel escolar.
Resolver problemas y saber elegir como actuar en situaciones problemáticas puede ser un vehículo excelente para la formación de conceptos. Pero, en concreto, no es muy claro que es lo que se quiere decir *exactamente* con esta expresión. Un óptimo intento de explicar este punto se debe a Gérard Vergnaud (1990) a la bien conocida obra del cual reenviamos.

El aprendizaje comunicativo

Este aspecto del aprendizaje matemático, muchas veces olvidado u omitido, busca evidenciar la capacidad de expresar ideas matemáticas, justificando, validando, argumentando, demostrando o haciendo uso de figuras, diseños, esquemas o gestos para comunicar.

En muchas ocasiones se encuentran estudiantes que dan la impresión de haber construido el concepto, saben efectuar los cálculos, incluso pueden resolver un problema, pero tienen dificultad precisamente en comunicar la Matemática: *saber comunicar la Matemática es una meta cognitiva específica, no banalmente implícita en los otros aprendizajes.*

En el pasado este aprendizaje específico fue omitido, dado por descontado, no examinado de manera conforme; pero, en los últimos 15 años se desarrolló una sensibilidad particular hacía esta exigencia sobre la cual nuestro grupo de investigación insiste en los cursos de formación y en diversos textos. En particular se sugiere la lectura del texto de L. Radford y S. Demers (2006).

El aspecto es mucho más complejo de cuanto se piensa y por tanto debe ser tomado desde muy lejos.

En primera instancia, se trata de saber elegir el tipo de lenguaje con el cual se va a comunicar la Matemática, es decir decidir cuál es el más oportuno, caso por caso:

lenguaje natural, oral o escrito; / lenguaje simbólico específico, cuando es disponible; / diseños, figuras; / esquemas; / íconos; / lenguajes no verbales en general; / …

Saber describir una figura, las propiedades de una función, las características de una sucesión numérica, las reglas de un algoritmo o las fases de su aplicación ... constituyen verdaderas metas de lograr y por tanto necesitan de aprendizajes explícitos y, de consecuencia, de enseñanzas explícitas y de situaciones oportunas.

Si no se hacen consideraciones específicas y oportunas, puede ser didácticamente peligroso insistir sólo en la elección de los términos de usar, o sobre la exactitud sintáctica o semántica; para muchos estudiantes esto aparece sólo como una manía (inútil) del docente.

Algunos docentes confunden dicha escritura "correcta", un seudo rigor, con la eficacia de la comunicación; pero esto, simplemente, no es verdad, como lo ha demostrado ampliamente la investigación.

La comunicación en el aula se presenta generalmente en la dirección: docente   estudiante y, en muchas ocasiones, el docente actúa como si la comunicación se hubiera dado totalmente, así como la recepción. Pero el lenguaje adulto es, en sí mismo, diverso del lenguaje del estudiante.

Por ejemplo, muchos estudiantes de los últimos años de la escuela secundaria, e incluso de los primeros años de universidad, confunden dos términos matemáticos que tienen significados totalmente diversos, *definición* y *demostración*, lo cual es una manifestación evidente de que la recepción del mensaje no se dio correctamente:

una definición sirve para presentar verbalmente un concepto; por tanto, una definición tiene que ver con términos, palabras;

una demostración sirve para mostrar como un enunciado es verdadero, admitiendo otros enunciados como verdaderos, sobre la base de una sucesión de deducciones basadas sobre una lógica; por tanto, una demostración tiene que ver con enunciados, frases.

Ejemplos de definición:

cuadrado es un rombo que tiene los ángulos congruentes;

si a y b son números naturales con a 0, *a es divisor de b* si existe un número natural c tal que a $c = b$;

notemos los hechos que son constantes:

las palabras en cursiva (*cuadrado, es divisor de*) son aquellas que se quieren definir (*definiendum*); se da por descontado que todas las otras palabras del complejo proposicional que se usan (*definiens*) sean conocidas.[1]

Una cosa debe ser evitada y es el "círculo vicioso", es decir, que la palabra que se desea definir aparezca también en el aparato que se usa para su definición; por ejemplo, a veces se encuentra escrito:

un conjunto se dice *infinito* cuando contiene infinitos elementos;

el círculo vicioso debería ser evidente: aquella proposición no es una definición, es sólo una expresión sin sentido.

Ahora bien, dado que las palabras que se usan en el *definiens* deben ser conocidas, es necesario que dichas palabras hayan sido definidas en precedencia; por ejemplo, en la primera definición, la del cuadrado, las palabras "rombo", "ángulo", "iguales" (o congruentes, o superponibles etcéteras), deben estar definidas en precedencia:

rombo es un paralelogramo que tiene los lados congruentes;

ángulo es cada una de las partes de un semiplano comprendidas entre dos semirrectas que tienen el origen en común;

dos figuras de dicen *congruentes* cuando se puede transportar la una sobre la otra;

---

[1] Esta forma de dar definiciones no es unívoca, existen otras formas teorizadas por Aristóteles, se llaman: *definiciones por género próximo y diferencia específica*; por ejemplo, el género próximo de "cuadrado" es "rombo", y la diferencia específica del cuadrado respecto a los rombos es la de tener los ángulos congruentes. Obviamente la definición no es unívoca, ni obligada. Por ejemplo, se podría decir: *cuadrado* es un rectángulo que tiene los lados congruentes, cambiando el género próximo.

ahora, *rombo* e *igual* forman parte del *definiendum*, mientras aparecen nuevos términos en los varios *definiens*: paralelogramo, lado, congruente, parte, semiplano, ...
Es obvio que no se puede proceder así infinitamente, llegará el momento en el cual palabras que deberían tener la función de *definiendum* no encuentran palabras apropiadas para ser usadas como *definiens*, dado que todo diccionario es finito. ¿Qué hacer? Se decide entonces que existen palabras, términos, llamados "primitivos", es decir, que se admiten sin definición explícita. La historia de la geometría, por ejemplo, de milenios usa como términos primitivos sustantivos como: punto, recta, plano, línea o curva, superficie, espacio y otros; así como relaciones: entre, intersecar, superponer, desplazar etcétera.
La elección de los términos primitivos es necesaria, aunque no todos entiendan el por qué; se trata de una cuestión sofisticada que depende básicamente del período. Por ejemplo, la elección de los términos primitivos de David Hilbert (con referencia a su obra de geometría publicada en 1899), es relativamente diversa de la que hizo Euclides de Alejandría. Todo depende de las exigencias del período, como ya lo habíamos dicho.
¿Por qué esta larga pausa meta discursiva? Sólo para ayudar en la comprensión de la compleja cuestión que involucra la definición, y evidenciar como dicha definición se centra en la necesidad de dar un sentido, a través de un aparato lingüístico oportuno, a un concepto.
El aparato puede ser formal o no; volvamos al segundo ejemplo:
lenguaje natural:
si *a* y *b* son números naturales con *a* 0, *a es divisor de b* si existe un número natural *c* tal que *a* *c* = *b*;
lenguaje formal:
$(\forall(a,b) \in N^{+} \times N), a/b \Leftrightarrow \exists c \in N\text{:ac} = b;$
lenguaje ejemplificativo:
3 es divisor de 12 porque existe un número natural, el 4, tal que 3 4 da como resultado precisamente 12.
No existe una verdadera y propia diferencia conceptual, creemos poder decir que todo depende del nivel escolar y de las exigencias formales, por tanto, de los objetivos establecidos por la comunidad de práctica que está creando el sentido de dicho objeto matemático. Pero la comunicación matemática esperada es diversa en cada uno de los tres casos.
Si estamos hablando en los primeros niveles de escolaridad, no es necesario centrarnos en la definición, así como la práctica matemática la ha elaborado en su historia; creemos que una buena *descripción* sea más que suficiente, si es coherente y da lugar a una comunicación del concepto eficaz y significativa.
Sin embargo, la errada práctica didáctica y una especie de fijación funcional derivada del uso a-crítico de los libros de texto juegan a veces bromas de mal gusto.
Además de las definiciones de *cuadrado* dadas líneas arriba, se puede proponer la siguiente:
cuadrado es un rombo que tiene las diagonales congruentes.
¿Es una buena o una mala definición? Es decir, partiendo del género próximo "rombos", dar como diferencia específica "tener las diagonales congruentes", ¿restituye el *definiendum cuadrado* o no? Obvio que la respuesta es «Sí». Por tanto, las tres definiciones de cuadrado dadas hasta este momento son del todo equivalentes y por tanto todas correctas.

Consideremos una cuarta:
cuadrado es un rectángulo que tiene las diagonales perpendiculares;
también esta definición funciona.
Las cuatro definiciones de cuadrado dadas hasta ahora son todas correctas, definen con precisión el cuadrado; y no son las únicas:
cuadrado es un rombo cuyas medianas son ejes de simetría;
cuadrado es un paralelogramo cuyas diagonales son ejes de simetría;
y otras más.
Sin embargo ... En una investigación hecha con docentes de grado 6-7-8 en Italia, Bagni y D'Amore (1992) muestran como los docentes consideran estas definiciones "diversas" como una especie de juego lógico; sí las reconocen, pero afirman que sólo una es la "definición correcta" (la primera) siendo las otras unos juegos semánticos. Según estos docentes, entonces, existe una y sólo una definición que los estudiantes deben aprender y repetir, haciéndola propia. Se pierde un objetivo comunicativo (y también lógico y epistemológico) importante. El estudiante podría aprender como pasar de una descripción a una definición, precisamente jugando con las diversas definiciones posibles.

Aún sobre los registros de representación semiótica

Este argumento ha sido tratado teóricamente en un apartado precedente, pero aún se puede agregar algo más con respecto a la evaluación.
El uso de diversas representaciones semióticas ha estado siempre presente en nuestras escuelas, pero sólo de poco tiempo se ha vuelto objeto de investigación la cual, rápidamente, ha dado excelentes resultados.
Por ejemplo, hemos visto que, en ocasiones, los estudiantes pueden reconocer que un mismo significado puede ser expresado con diversas representaciones, en el mismo registro o en registros diversos; mientras

que, en el pasado, se daba por descontado que representaciones diversas del mismo objeto deberían ser reconocidas como equi-significativas por parte del estudiante, tanto que no existía una didáctica de la semiótica y se le consideraba adquirida espontáneamente. Hoy se ha visto que no puede ser así. Una transformación de tratamiento o una de conversión pueden cambiar radicalmente, en el cognitivo del estudiante, el sentido del objeto matemático representado, unívoco para el docente, diverso para el estudiante.

Por tanto, conocer a la Educación matemática ha convencido a muchos docentes a considerar estos aspectos como elementos de una didáctica explícita; las transformaciones semióticas no pueden ser consideradas como inherentes en los otros aspectos del aprendizaje de la Matemática; es necesario, como mínimo, evidenciarlas, acostumbrar a los estudiantes a ver diferentes representaciones, hacerlos razonar explícitamente sobre este tema, ayudarles a aprender a realizarlas correctamente, sin perder nunca el significado.

Todo esto porque se ha visto que, en más de una ocasión, el estudiante asigna significados diferentes a representaciones diversas de un mismo objeto, reconociendo en estas representaciones informaciones diversas.

Además, existe una especie de propensión natural, por parte del estudiante, a aceptar una u otra representación; por tanto, mientras que para un docente el objeto es único y las representaciones diversas pero equivalentes, las cosas no son así para el estudiante; si las diversas representaciones fuesen todas unívocas y equivalentes, no habría motivo para preferir la una a la otra y la elección sería indiferente. Pero no es así, como se puede ver, por ejemplo, en D'Amore (1998).

El uso de una única representación para un objeto matemático, por otra parte, puede crear un malentendido y el estudiante tenderá a confundir el objeto con su representación, como lo habíamos visto en la *paradoja* de Duval (Duval, 1993; D'Amore, Fandiño Pinilla, Iori, & Matteuzzi, 2013).

Por lo tanto, una única representación de un determinado objeto matemático es de evitar; pero, por otra parte, un exceso de representaciones puede provocar en los alumnos confusiones y perdida de sentido.

Existen, además, representaciones semióticas que no representan en verdad el objeto matemático que quisieran representar y terminan o con no representarlo o con representarlo equivocadamente.

Por ejemplo, el signo = la mayor parte de las veces no representa el objeto matemático relacional "igualdad", como quisiera el docente o como lo ha estructurado el saber matemático; en ocasiones, asume la característica de un símbolo de procedimiento; la igualdad en Matemática es reflexiva, simétrica y transitiva, pero el signo = en la escuela no lo es: los números que están a la izquierda son los datos, el que está a la derecha es el resultado. Todo menos que simétrica, por ejemplo.

Otros ejemplos.

Frente a la ecuación lineal $3 = x - 2$, el estudiante transforma (tratamiento) en: $- x= -2-3$; pero si = es simétrico, no sería necesario transportar x al primer miembro de la ecuación. Pero, son pocos los estudiantes que aceptan la escritura final $5 = x$ como solución de la ecuación ... ¿Y un docente? (Acerca del uso del signo = y de sus interpretaciones en aula, véase la investigación de Camici et al., 2002).

Raymond Duval sigue trabajando desde más de 30 años en el sector de las representaciones semióticas y de sus relaciones con el funcionamiento del cognitivo; sus análisis están obligando a reflexionar de una forma del todo nueva sobre el aparato cognitivo puesto en campo en el acto de aprendizaje de la matemática (Duval, 1993, 1995a, b, 1996).

Su investigación en Educación matemática se articula principalmente en dos frentes, como hemos visto en más de una ocasión:

el tema de las representaciones semióticas en general y de sus articulaciones con los diversos registros lingüísticos de la Matemática;

el tema de la argumentación y de la demostración.

En el aprendizaje conceptual se habla obviamente de conceptos y se inicia una discusión entre concepto y objeto de la Matemática. Se trata de un debate antiguo como la filosofía, pero central en nuestra prospectiva. Para decidir si un estudiante ha construido en su mente un determinado concepto, es obvio pedirse en vía preliminar: ¿qué es un concepto?. ¿Existe el concepto de número?, ¿de recta?, ¿de igualdad?, ¿de definición?, ¿de demostración?. ¿Pertenecen a la misma categoría?. ¿Cuáles de estos son objetos de la Matemática, si lo son? Si hablamos de representación semiótica de dichos objetos, ¿cuáles registros pueden ser considerados? ¿En cuáles de dichos casos se puede hablar de noética?

Modernas reflexiones sobre estas discusiones filosóficas han llevado a los filósofos a tomar partido por uno de los siguientes frentes: una visión realista o una visión pragmátista de la Matemática. La Educación matemática está decididamente interesada a tomar partido, dado que su misma característica cambia notablemente si se acepta una u otra visión, no sólo en la investigación, sino también en la actitud en aula.

Por una parte, tenemos la acción de conducir al estudiante hacia el concepto, entendiendo todo esto como una escalada, una subida hacía una meta, para la mayoría inaccesible. La acción del docente es la de acompañar hacía, conducir a, empujar al estudiante; pero no está garantizado que el recorrido termine. Por otra parte, en la visión pragmátista, es la comunidad de práctica a construir el objeto, después de

negociaciones continuas de sentido entre docente, estudiante y Saber. Por lo tanto, el objeto se construye cada vez; serán las situaciones, subjetivas, de intercambio, a decidir si y como proseguir en su profundización, en la continuación, en la creación siempre más matemática del objeto.
Por tanto, las actitudes didácticas cambias profundamente. Los "juegos lingüísticos" de Wittgenstein emergen con fuerza en las situaciones a-didácticas de co-construcción del conocimiento.
Y, así, hemos involucrado factores filosóficos, sociales, antropológicos, históricos, pedagógicos y semióticos.
En el aprendizaje algorítmico, emergen con fuerza referencias a la historia, a la Pedagogía del trabajo en grupo, a la Psicología cognitiva específica de la construcción de instrumentos de cálculo, a la Antropología que hace de toda cultura la cuna de construcciones de instrumentos específicos, a la Semiótica con la cual se representan dichos resultados. Por ejemplo, una operación aritmética se puede describir con palabras, con un esquema de bloques o mediante algoritmos. La descripción de la construcción de un pentágono regular con regla y compás exige necesariamente hechos relacionados con el lenguaje, con la Psicología (memoria a corto y medio plazo), con la Semiótica.
Para nosotros, la naturaleza misma del algoritmo produce reflexiones de carácter antropológico dado que obliga a re-examinar las culturas y las sociedades no sólo y no exclusivamente en el ámbito histórico que le es propio y clásico, sino también desde el punto de vista de la comunicación y de las posibles relaciones entre mundos diversos. No es por caso que un mismo algoritmo de división según quien lo nombres se llame división egipcia, división del campesino ruso o división canadiense dado que era usada por los habitantes autóctonos de las regiones de los Grandes Lagos al sur de Canadá en la frontera actual con USA.
El *aprendizaje estratégico* es uno de los más complejos y por esto mismo el más interesante, la cuna de los estudios de Educación matemática a su exordio. Aquí surgen investigaciones sobre qué son la intuición, la inteligencia, la creatividad y la zona de desarrollo potencial, por tanto, en plena Psicología; después investigaciones necesarias sobre cómo puede ser entendida la actividad de resolución de problemas en clave histórica y antropológica; cómo se comporta, en esta dirección, el individuo inmerso en el contexto de aula o el grupo mismo, por tanto, la Pedagogía; como se describe su propia actividad, por tanto, lingüística y semiótica.
Resolver un problema es desde siempre la actividad más interesante de la Matemática, para muchos estudiosos es esta misma actividad *la* Matemática. Pero, qué debe ser considerado un problema, ha sido objeto de estudios por mucho tiempo de pedagogos y psicólogos más que de los mismos matemáticos.
El *aprendizaje comunicativo*, que de poco ha entrado a formar parte de los aprendizajes reconocidos y necesarios, por tanto, de ser evaluados, es un ejemplo excelente de cómo nos vemos obligados a involucrar hechos pedagógicos, psicológicos, lingüísticos, semióticos y retóricos en una única actividad, como se puede deducir de la obra anticipadora de Radford y Demers (2006). No nombro la Matemática, lo recuerdo, porque se da por descontada, disciplina de base, adhesivo necesario e indispensable.
Si, además, al interno de este tipo de aprendizaje aceptamos la demostración, la validación, la argumentación, la descripción, la definición etc., entonces sabemos que el nivel de interés crece, desde todo punto de vista (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2013). Basta reflexionar un instante para entender que aquí se encuentran todas las disciplinas a las cuales hemos hecho referencia hasta este momento.
Sólo para hacer un ejemplo, sabemos que, después de la apertura de la ruta de seda entre Mediterráneo y China, los jesuitas llevaron a la corte del Gran Khan los *Elementos* de Euclides. Dicho libro, orgullo de Europa y de la Cristiandad, fue admirado por los matemáticos chinos, que apreciaron los enunciados, las figuras, las definiciones, pero que no entendieron el sentido de las demostraciones que ellos consideraron inútiles. Por tanto, una cultura puede decidir centrar toda su atención matemática en aspectos que para otras culturas son indiferentes o inútiles.
Lo mismo vale para la lógica. Imponemos desde siglos la idea que la demostración en Matemática sea la expresión más significativa de la aplicación de la lógica aristotélica; mientras que existen civilizaciones que no la usan, civilizaciones que usan otras, estudiantes de nuestras clases que inconscientemente usan la lógica hindú nyaya al puesto de la lógica aristotélica, aun habiéndola estudiada como materia de aula, en las horas de Matemática (D'Amore, 2005).
La actitud, las convicciones, las expectativas del docente son profundamente diversas, si él conoce estos aspectos, en general, pero de forma específica en el aprendizaje comunicativo.
El *aprendizaje semiótico*, hemos visto, afecta todo el proceso de aprendizaje, pero inicia con preguntas de base, extra matemáticas: ¿qué es la Semiótica en Matemática?, ¿qué se entiende con "sentido de una construcción matemática"?, ¿qué entendemos con "significado de un objeto o concepto matemático"?, ¿las representaciones son entre ellas intercambiables o el estudiante manifiesta preferencias? En tal caso, la cuestión puede ser ligada a hechos psicológicos o pedagógicos, no a hechos intrínsecos a la Matemática. ¿Cómo la historia ha considerado estas problemáticas, surgidas muchos antes de Gottlob Frege, en los ámbitos lingüísticos y filosóficos?
Reafirmando el hecho que el aprendizaje de la Matemática es un *unicum*, indivisible, alimentado por cada una de las componentes (que influencian las otras), como por otra parte hemos demostrado ampliamente, queda invariable el hecho que lo aquí presentado (es decir la división del aprendizaje matemático en 5 componentes específicas) ha sido reconocido, por los docentes que concretamente lo han probado, como

un instrumento eficaz para revelar las situaciones de aula. Lo cual, en fondo, es el objetivo de toda la investigación en Educación matemática.

Referencias Bibliográficas

Asenova, M., D'Amore, B., Del Zozzo, A., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Marazzani, I., Monaco, A., Nicosia, G. G., Santi, G. (2022). *I problemi di matematica nella scuola primaria tra ricerca didattica e prassi scolastica*. Bologna: Pitagora.

Bagni, G. T. D'Amore, B. (1992). La classificazione dei quadrilateri. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 15*(8), 785-814.

Brown, S. I. Walter, M. I. (1988). *L'arte del problem posing.* Torino: Sei.

Camici, C., Cini, A., Cottino, L., Dal Corso, E., D'Amore, B., Ferrini, A., Francini, M., Maraldi, A.M., Michelini, C., Nobis, G., Ponti, A., Ricci, M., Stella, C. (2002). Uguale è un segno di relazione o un indicatore di procedura? *L'insegnamento de la matematica e delle scienze integrate*, *25*(3), 255-270.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Prólogo de Gérard Vergnaud. Milano: Angeli. [II edición 1996]. [En español: D'Amore, B. (1997). *Problemas. Pedagogía y Psicología de la Matemática en la actividad de resolución de problemas*. Prólogo de Gérard Vergnaud. Madrid: Editorial Sintesis].

D'Amore, B. (1998). Oggetti relazionali e diversi registri rappresentativi: difficoltà cognitive ed ostacoli. [Bilingüe: italiano e inglés]. *L'educazione matematica*, 1, 7-28. [En idioma español: *Uno*, 1, 1998, 63-76].

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica de la matematica*. Prólogo de Guy Brousseau. Bologna: Pitagora. [En español: D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Prólogo de Guy Brousseau. Prólogo a la edición en idioma español de Ricardo Cantoral. México: Reverté-Relime].

D'Amore, B. (2005). L'argomentazione Matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*, *19*(4), 481-500. [En idioma español: D'Amore, B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*, 38, 83-99].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I. (2013). Sobre algunas D en didáctica de la matemática: designación, denotación, denominación, definición, demostración. Reflexiones matemáticas y didácticas que pueden conducir lejos. *Praxis & Saber*, *4*(8), 291-310.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., Matteuzzi, M. (2013). Alcune riflessioni storico-critiche sul cosiddetto "paradosso di Duval". *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *36B*(3), 207-236.

Duval, R. (1993). Registres de répresentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval, R. (1995a). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [En idioma español: Duval, R. (1995). Semiosis y pensamiento humano. Cali: Ed. Universidad del Valle].

Duval, R. (1995b). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Actes de l'École d'été*, 1995.

Duval, R. (1996). Il punto decisivo nell'apprendimento de la Matematica. la conversione e l'articolazione delle rappresentazioni. En B. D'Amore (Compilador.). *Convegno del decennale*. Actas del homónimo Congreso Nacional, Castel San Pietro Terme 1996. Bologna, Pitagora. Pp. 11-26.

Fandiño Pinilla, M. I. (2005). *Le frazioni, aspetti concettuali e didattici*. Prefacio de Athanasios Gagatsis. Bologna: Pitagora. [En español: Fandiño Pinilla, M. I. (2009). *Las fracciones. Aspectos conceptuales y didácticos*. Prólogo de Athanasios Gagatsis. Prólogo a la edición en español de Carlos Eduardo Vasco Uribe. Bogotá: Magisterio]. quiqui

Fandiño Pinilla, M. I. (2020). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della Matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prologo Giorgio Bolondi. Bologna: Pitagora. [En español: Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la Matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].

Gagné, R. M. (1965), *The conditions of learning.* New York: Holt, Rinehart & Winston Inc. [El libro fue cambiado completamente en su impostación, cuando salió en una nueva edición por los tipos de Cbs College Publishing, 1985].

Radford, L. Demers, S. (2006). *Comunicazione e apprendimento*. Prólogo de Bruno D'Amore. Bologna: Pitagora.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactiques des mathématiques*, 10, 133-169.

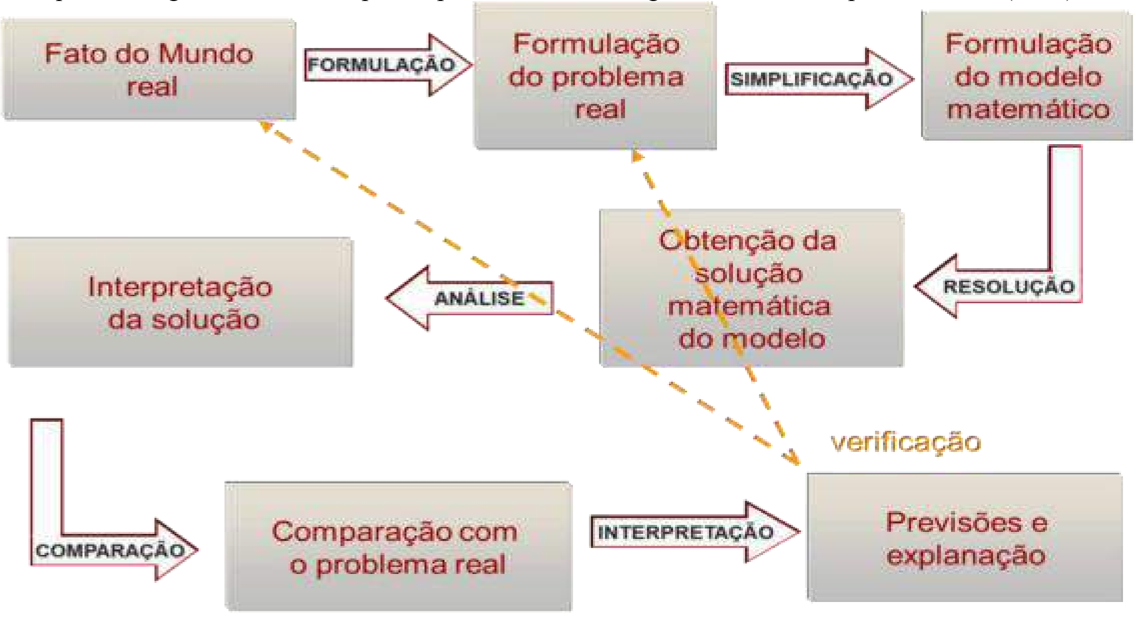
Investigações atuais em Modelagem Matemática e Resolução de Problemas

Vanilde BISOGNIN, Eleni BISOGNIN

Universidade Franciscana de Santa Maria (UFN), Rio Grande do Sul, Brasil

Introdução

A Modelagem Matemática tem se destacado, nas últimas décadas, como alternativa de trabalho em sala de aula para ensinar matemática. A importância dessa abordagem tem sido discutida no âmbito da Educação Matemática, em publicações de artigos científicos, em revistas, em anais de eventos e nos cursos de formação inicial e continuada de professores, conforme trabalhos de Doerr (2007); Kaiser, Schwarz e Tiedemann (2010); Blum (2015); Mutti e Klüber (2018); Almeida (2022), entre outros. Nesses trabalhos os autores destacam as contribuições dessa abordagem no ensino e as competências que podem ser desenvolvidas com a utilização da Modelagem Matemática.
Na literatura encontramos diferentes concepções sobre a Modelagem Matemática e suas diferentes formas de utilizá-la no ensino. Para Bassanezi (2002, p.20), "modelagem matemática é a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos" e, para Almeida e Brito (2005, p. 19) a "modelagem matemática é uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática por meio de situações-problema não matemáticas". Nossa concepção de Modelagem Matemática está em concordância com a concepção de Bassanezi (2002).
De acordo com o autor, o processo de modelagem acontece mediante diferentes etapas e, entre elas, destaca-se a problematização de situações advindas do dia a dia dos alunos. Por problematizar entende-se criar, formular, propor perguntas e problemas para serem investigados e resolvidos.
O esquema a seguir, mostra as etapas do processo de modelagem estabelecidas por Bassanezi (2002):



Fonte: Bassanezi (2002)

Nos trabalhos de Mutti e Klüber (2018); Malheiros, Forner, Souza (2020) entre outros, os autores apresentam resultados de pesquisas relativos à utilização da Modelagem Matemática, destacando-se a eficácia bem como os obstáculos oriundos, tanto do sistema escolar, quanto dificuldades dos próprios alunos no domínio do conhecimento matemático, que dificultam sua utilização nas escolas ou em cursos de formação inicial e continuada de professores. No processo de modelagem a etapa que apresenta maior dificuldade é a da problematização. Esse é um ponto que necessita de atenção especial, ou seja, necessita-se trabalhar de diferentes formas de modo que os alunos adquiram competências para formular perguntas, criar e resolver problemas.
Em geral, quando tratamos de problemas, a ênfase está centrada no processo de resolução de um problema que é proposto pelo professor, sem a preocupação de oportunizar aos alunos momentos em que eles possam cria-los. A fase de problematização no processo de modelagem requer a habilidade de propor e criar

problemas por parte dos alunos. A dificuldade em relação à criação de problemas é um dos motivos do não uso dessa metodologia de ensino na sala de aula, nos diferentes níveis de escolaridade.

A resolução de problemas, enquanto metodologia de ensino e aprendizagem, tem sido objeto de estudos e pesquisas nos últimos anos, em diferentes níveis de escolaridade. Nos estudos mais recentes, observamos uma ênfase crescente, não apenas na resolução de problemas propostos pelo professor, mas, uma crescente ênfase na criação de problemas envolvendo os alunos. De acordo com Allevato e Duarte (2020) e Malaspina (2016), a criação de problemas é tão fundamental quanto a resolução porque é possível desenvolver outras habilidades nos alunos à medida que eles se envolvem no processo de propor novos problemas. Contudo, apesar dos resultados promissores em pesquisas sobre criação de problemas, ainda existe uma escassez de estudos nesse campo, sendo este destacado como uma área emergente que requer investigações mais robustas, conforme apontam Allevato e Duarte (2020).

Autores como Freudenthal (1973), Kilpatrick (1987) e Polya (1954), têm destacado a criação de problemas como possibilidade de trabalho com alunos desde a década de 60. Em seus trabalhos, os autores afirmam que a prática de criar problemas é essencial para a construção significativa do conhecimento matemático pelos alunos porque, quando um estudante demonstra habilidade para propor um problema, ele alcança um nível elevado de raciocínio que facilita a assimilação de conceitos matemáticos. Além disso, os autores afirmam que criar um problema é um método eficaz de aprendizado, visto que a tarefa se configura como um desafio, incentivando uma aprendizagem mais engajada. Portanto, a proposta de criação de problemas em sala de aula oferece aos alunos a chance de se envolver ativamente em atividades que favorecem a compreensão dos conceitos matemáticos.

Sobre a atividade de criação de problemas Malaspina (2013), destaca que:

> [...] a atividade de criar problemas matemáticos complementa a resolução de problemas, uma vez que estimula ainda mais a criatividade e contribui para a aprendizagem de conceitos, proposições e procedimentos. Ela promove a argumentação, a reflexão e melhora a linguagem matemática (Malaspina 2013, p. 237).

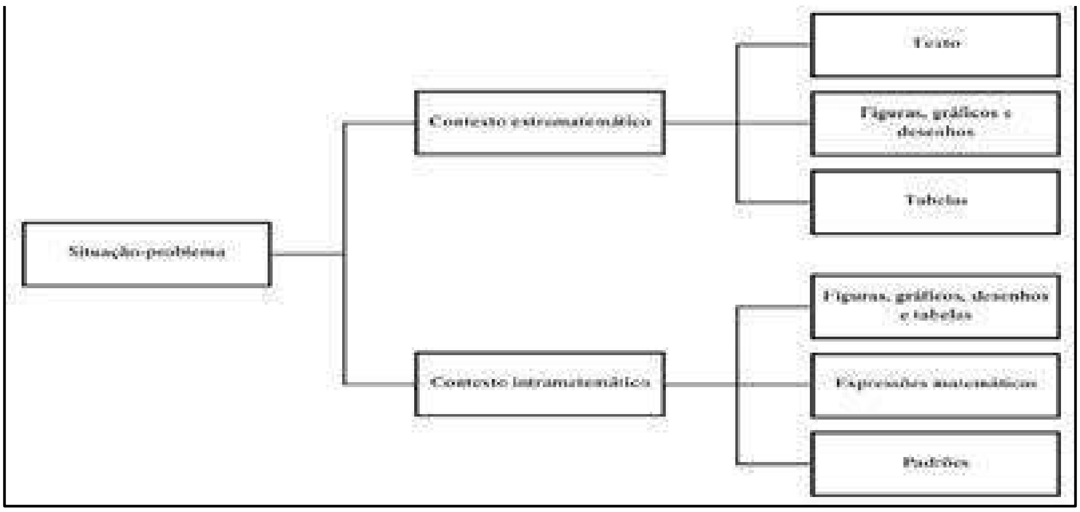
As ideias descritas acima possibilitam afirmar que, tanto a resolução quanto a criação de problemas são atividades essenciais para uma melhor compreensão do processo de modelagem e, também, da própria Matemática.

Nessa palestra pretendemos analisar como a Modelagem Matemática favorece a criação de problemas e, para tal, serão apresentadas algumas situações oriundas do contexto social e outras oriundas do contexto intramatemático, destacando o processo de formulação de problemas.

Criação de Problemas

Uma atividade de criação de problemas tem como ponto central a situação-problema que oferece o contexto e os dados que devem ser usados para obter uma solução. Esses dados podem ser provenientes de contextos extra matemáticos, relacionados à vida cotidiana dos alunos, ou intra-matemáticos, próprios do universo da Matemática. Ambas as categorias de situações-problema apresentam diversas subcategorias, que se diferenciam pela forma como os dados são apresentados, podendo ser textos, figuras, gráficos, tabelas, expressões matemáticas ou padrões. A Figura1, a seguir, ilustra os diferentes tipos de situações-problema.

Figura 1: Contexto de criação de problemas



Fonte: Adaptado de Cai, Hwang, Melville (2023)

De acordo com Malaspina (2018), quatro elementos fundamentais devem ser considerados, em uma atividade de Criação de Problemas, conforme o Quadro 1, a seguir:

Quadro 1 - Elementos fundamentais de um problema

Elementos	**Descrição**
Informação	Dados quantitativos ou dados fornecidos explícita ou implicitamente no problema
Requerimento	O que se pede para encontrar, examinar ou concluir, incluindo gráficos e demonstrações.
Contexto	Podendo ser intramatemático (puramente matemático) ou extramatemático (contexto de situação cotidiana)
Ambiente Matemático	Estrutura matemática global na qual estão localizados os conceitos matemáticos que intervêm ou podem intervir para resolver o problema, por exemplo, funções lineares, teoria dos números, geometria analítica, etc.

Fonte: Adaptado de Malaspina (2018)

Blanco e Pérez (2014) destacam diversos aspectos positivos da criação de problemas para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Entre os benefícios mencionados, estão: o aumento do conhecimento matemático, uma vez que essa prática permite aos estudantes estabelecer conexões entre diferentes conteúdos ao coletarem dados, discutirem ideias e estratégias de solução, além de escreverem e se comunicarem de forma clara; a motivação, pois a criação de problemas desperta a curiosidade e fomenta uma atitude positiva em relação à Matemática; a superação de erros, pois o processo exige que o aluno selecione as informações relevantes para a resolução do problema; a avaliação da aprendizagem, já que, ao criar problemas, o professor pode identificar as habilidades do estudante em utilizar o conhecimento matemático, seu modo de raciocinar e o desenvolvimento de conceitos; e, finalmente, a criatividade, que está diretamente relacionada à capacidade do estudante de gerar novos problemas.

Considerações finais

A proposta apresentada pretende auxiliar professores em formação inicial ou continuada, na etapa da formulação de problemas, ao utilizar a Modelagem Matemática como metodologia de ensino em suas aulas. As perguntas, indagações, levantamento de conjecturas, análise dos dados obtidos da situação real, é uma etapa importante da Modelagem Matemática e, essa etapa, está intimamente conectada com a abordagem da criação de problemas. Como destaca Malaspina (2022),a criação de problemas é base para formação do professor em Modelagem Matemática além de oportunizar uma reflexão individual e compartilhada que potencializa as competências didáticas e matemáticas dos professores e, consequentemente, contribuem para a aprendizagem dos alunos.

Referências e bibliografia

Almeida, Lourdes. W. Uma Abordagem Didático-pedagógica da Modelagem Matemática. **Vidya,** v.42, n.2, p.121-145, jul/dez, 2022.

Almeida, Lourdes. W.; Brito, Dirceu.S; Atividades de Modelagem Matemática:que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação**, v.11, n.3, p.483-498, 2005.

Bassanezi, R. C. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática**. Contexto, São Paulo. 2002.
Blanco, M. Fernanda.; Pérez, Izabel G. La invención de problemas como tarea escolar. **Escuela Abierta**. v. 17. 2014.
Blum, Werner. Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? S.J. Cho (ed.), **Proceedings** of the 12th International Congress on Mathematical Education: intellectual and attitudinal changes, Springer, New York, p.73-96, 2015.

Cai, Jinfa; Hwang, Stephen; Melville, Mattew. Mathematical Problem-Posing Research: Thirty Years of Advances Building on the Publication of **On Mathematical Problem Posing**. Chapter 7, p.1-25, 2023.
Doerr, H. What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In: Blum, W.; Galbraith, P. L.; Henn, H.; Niss, M. (Eds), **Modelling and Applications in Mathematics Education**. Springer, New York, p.69-78,2007.
Duarte, Edna Mataruco; Alleavato , Norma Suely Gomes. Formulação de Problemas no desenvolvimento de um Jogo Educacional Digital de Matemática. **Revista de Educação Matemática**, [*s. l.*], v. 17, p. e020028, 2020. DOI: 10.37001/remat25269062v17id284. Disponível em: https://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMatSP/article/view/203.Acesso em: 23 ago. 2024.
Freudenthal, Hans. **Mathematics as an educational task**. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1973.
Kaiser, Gabriele; Schwarz, B.; Tiedemann, S. Future Teachers' Professional Knowledge on Modeling. In: Lesh, R.; Galbraith, P.; Haines, C. R.; Hurford, A. (Eds.). Modeling Students' Mathematical Modeling Competences. Springer, New York, U.S.A.2010.
Kilpatrick, Jeremy. Problem formulating: where do good problem come from? In: Schoenfeld, A. H. (Ed.). **Cognitive science and mathematics education.** Hillsdale, N. J.: Erlbaum, p. 123-147,1987.
Malaspina, Uldarico**.** La creación de problemas de matemáticas en la formación de profesores**. Actas** del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, Sociedad de Educación Matemática Uruguaya, p. 117–128, 2013.
Malaspina, Uldarico. Cómo crear problemas de matemáticas? Experiencias didácticas con profesores en formación. **UNIÓN** – Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº52. p. 307-313, 2018.
Malaspina, Uldarico. Creación de Problemas. Avances y Desafíos en la Educación Matemática. **REMATEC**, Belém, v. 11, n. 21, 2016. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/283. Acesso em: 23 ago. 2024.
Malaspina, Uldarico. Estimulando la modelización matemática mediante la creación de problemas. **UNIÓN,** nº.24, p.1-11, 2022.
Malheiros, A. P. S.; Forner, R.; Souza, L. B. S. Formação de professores em modelagem e a escola: que caminhos perseguir? **ReBECEM**, 4, (1)1, p. 01-22, 2020.
Mutti, G. S. L.; Klüber, T. E. Aspectos que constituem práticas pedagógicas e a formação de professores em Modelagem Matemática. **Alexandria**, 11, p. 85-107,2018.
Polya, George. **Mathematics and plausible reasoning**. Princeton: Princeton University Press, 1954.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo de professores de Matemática da Educação Básica

Claudia Lisete OLIVEIRA GROENWALD
Universidade Luterana do Brasil, Brasil
Universidade Franciscana de Santa Maria (UFN), Rio Grande do Sul, Brasil
Presidente SBEM, Brasil

Introdução

A sala de aula configura-se como um espaço intrinsecamente complexo, no qual cada turma apresenta singularidades que impõem novos desafios à prática docente (Born, 2019). O ato de ensinar transcende a mera transmissão de informações, constituindo-se como um processo dinâmico e colaborativo de construção de significados entre professores e alunos.

Para que esse processo ocorra de forma efetiva, é indispensável que o professor possua, além de domínio aprofundado do conteúdo, compreensões sobre os processos de aprendizagem e as formas como os estudantes se apropriam do conhecimento. Nesse contexto, emerge uma questão central: de que maneira a formação de professores de Matemática pode prepará-los para os desafios da docência contemporânea?

A base do conhecimento docente, conforme sistematizada por Shulman (1986, 2015a), engloba múltiplas dimensões: o conhecimento do conteúdo, o conhecimento pedagógico do conteúdo (CPC), o conhecimento dos alunos e suas características, o conhecimento dos contextos educacionais e o entendimento sobre os propósitos, valores e fundamentos filosóficos e históricos da educação.

Enfatiza-se, portanto, a importância de os professores não apenas dominarem o "o que" ensinar, mas também o "como" ensinar — sempre considerando as especificidades do contexto em que atuam. Isso inclui, por exemplo, a adoção de abordagens pedagógicas adequadas à realidade dos alunos e a capacidade de lidar construtivamente com os erros que surgem no processo de aprendizagem.

O CPC é um tipo específico de conhecimento que integra o domínio do conteúdo com o conhecimento de como ensinar esse conteúdo de forma eficaz. Não basta saber matemática, por exemplo — é preciso saber como ensiná-la para que diferentes alunos compreendam, levando em conta suas dificuldades, formas de pensar e contextos.

A seguir explana-se o CPC segundo Shuman (1986, 1987).

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (CPC)

O CPC destaca-se como um saber essencial e específico do professor. Ele não se resume à justaposição entre saber pedagógico e domínio disciplinar, mas resulta da intersecção entre esses campos, constituindo um conhecimento singular (Carlson & Daehler, 2019).

Shulman (1986, 1987) define o CPC como a articulação entre conteúdo e pedagogia, de modo a permitir que o professor organize, represente e adapte o conhecimento de maneira acessível aos diferentes perfis de estudantes.

Entende-se que o CPC com a Matemática é o que possibilita ao professor realizar planejamentos didáticos integrando o objeto matemático e a didática que é adequada para o seu desenvolvimento.

Shulman (1987) afirma-se que:

> [...] existe uma "base de conhecimento para o ensino" – um agregado codificado e codificável de conhecimento, habilidade, compreensão e tecnologias, de ética e disposição, de responsabilidade coletiva – e também um meio de representa comunicá-lo (Shulman, 1987, p. 200).

Shulman (1987) enfatiza a relevância da categoria do "conhecimento pedagógico do conteúdo", alegando que esta é de domínio específico do professor especialista, pois, este conhecimento envolve a articulação entre o conteúdo da disciplina e os saberes pedagógicos para a compreensão de como se ensinar determinado objeto de conhecimento com êxito. Desta forma, enfatiza-se que:

> O conhecimento pedagógico do conteúdo é, muito provavelmente a categoria que melhor distingue a compreensão de um especialista em conteúdo daquela de um pedagogo. Embora se possa dizer muito mais sobre as categorias de base para o ensino (Shulman, 1987, p. 207).

A identificação do CPC como componente da base de conhecimento para o ensino traz implicações diretas para a formação de professores. É necessário que os futuros docentes desenvolvam uma compreensão sólida da estrutura conceitual da Matemática, ao mesmo tempo em que vivenciem práticas pedagógicas contextualizadas, compreendendo o como aquele procedimento é desenvolvido.

Os componentes do CPC segundo Shulman são:

Compreensão das dificuldades comuns dos alunos
Saber quais são os conceitos mais difíceis e onde os alunos costumam errar.

Domínio de estratégias de ensino específicas
Conhecer diferentes maneiras de explicar uma mesma ideia e usar representações variadas (exemplos, analogias, modelos etc.).

Flexibilidade didática - Capacidade de adaptar o ensino ao nível e contexto da turma, com sensibilidade ao que funciona melhor para determinado grupo.

Shulman (1986) também propôs outros tipos de conhecimentos fundamentais para o professor:

Conhecimento do conteúdo (saber a disciplina)

Conhecimento curricular (entender o currículo e sua organização)

Conhecimento pedagógico geral (teorias de aprendizagem, gestão da sala etc.)

Conhecimento dos alunos e suas características

Conhecimento dos contextos educacionais

Conhecimento das finalidades da educação (valores, objetivos sociais, filosóficos)

Nesse processo, a aprendizagem profissional dos docentes se estabelece em ciclos que envolvem compreensão, transformação, instrução, avaliação e reflexão. Ao articular os saberes teóricos com a prática em sala de aula, o professor desenvolve competências para selecionar estratégias e recursos didáticos adequados, organizar o ambiente de aprendizagem, avaliar o progresso dos estudantes e reformular suas práticas com base em evidências.

A discussão sobre a inserção do CPC na formação inicial, na formação continuada e nos processos avaliativos é importante para o fortalecimento da Educação Matemática. Ganha relevância, nesse cenário, a noção de "expertise adaptativa", que caracteriza o profissional capaz de mobilizar, com flexibilidade, um amplo repertório de conhecimentos e estratégias frente às demandas variáveis do ensino.

O ensino de Matemática é considerado uma tarefa complexa que envolve a tomada de decisões que incluem diferentes conhecimentos (Ball, Thames e Phelps, 2008; Escudero, Sánchez, 2007), exigindo que os docentes possuam uma compreensão ampla e aprofundada do conhecimento matemático a ser ensinado, bem como uma visão clara acerca do desenvolvimento e progresso do aprendizado dos estudantes. Em outras palavras, o ensino de matemática (entendido como uma prática que deve ser aprendida) requer uma compreensão clara do que os alunos precisam para se desenvolverem matematicamente; dos objetivos da formação em Matemática; e de considerar esses objetivos para orientar a tomada de decisões durante o processo de ensino (NCTM, 2015).

Portanto, o professor precisa aprender a gerar conhecimento e informações sobre as situações nas quais precisa agir, a fim de tomar decisões pertinentes para desenvolver o processo de ensinar e aprender matemática.

Neste sentido é importante que os professores de Matemática escolham tarefas matemáticas motivadoras e que levem o estudante ao desenvolvimento dos objetos matemáticos que se objetivam.

Tarefas Matemáticas e Níveis de Exigência Cognitiva

O ensino de Matemática exige do professor a capacidade de selecionar tarefas que promovam não apenas a memorização de procedimentos, mas o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação e da compreensão conceitual. Smith e Stein (1998) classificam essas tarefas de acordo com os níveis de demanda cognitiva: desde a simples memorização (nível 1) até tarefas que requerem a produção de ideias e conexões conceituais (nível 4).

Stein, Grover e Henningsen (1996, p. 460) definem como tarefa "uma atividade em sala de aula cujo objetivo é focar a atenção dos alunos em um tópico particular."

Smith e Stein (1998) definem tarefa matemática como uma proposta de trabalho para os alunos. Trata-se de uma situação ou conjunto de situações direcionadas ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular e que se situa "na interação entre ensino e aprendizagem" (Stein et al., 2000, p. 25), já que o professor seleciona as tarefas matemáticas tendo em conta promover o engajamento dos alunos no processo de ensino e aprendizagem, para os quais elas constituem (diferentes) oportunidades de aprendizagem.

Uma tarefa matemática é definida como parte de uma atividade de aula que visa desenvolver um determinado conceito ou conteúdo matemático (Smith, Stein, 1998). Essa tarefa pode ser classificada como boa quando tem o potencial de envolver o aluno em altos níveis de pensamento cognitivo e raciocínio lógico. De acordo com Smith e Stein (1998), uma tarefa rotineira não é necessariamente classificada como uma tarefa Matemática. Além disso, é importante considerar que o nível de dificuldade de uma tarefa matemática pode variar de acordo com a idade, o ano escolar e o conhecimento prévio do aluno. Portanto, uma tarefa que não é considerada desafiadora para um aluno de um determinado ano letivo pode ser considerada difícil para outro aluno de um ano letivo anterior.

Segundo Smith e Stein (1998), os tipos de tarefas devem corresponder aos objetivos que se quer atingir na aprendizagem do aluno: se o objetivo é aumentar a capacidade e a eficácia dos alunos de lembrar fatos básicos, definições e regras (lembrá-los da memória), então as tarefas - atividades centradas na memorização - podem ser apropriadas; se o objetivo é aumentar a velocidade e a precisão dos alunos na resolução de problemas de rotina, então tarefas - atividades focadas no uso de procedimentos sem ter um "senso conceitual" do procedimento podem ser apropriadas; se o objetivo é envolver os estudantes em formas mais complexas de raciocínio e desenvolver habilidades de comunicação, é necessário propor outros tipos de tarefas – atividades que exigem o fazer Matemática, a partir de um pensamento complexo e não algorítmico no qual os alunos possam explorar e compreender os conceitos matemáticos.

Ao apresentar uma tarefa matemática aos seus alunos, o professor a planeja a fim de que estes atinjam um objetivo, criando assim uma interação entre o professor, o conteúdo e os alunos, com o propósito de que estes desenvolvam a competência matemática prevista.

Smith e Stein (2011) descrevem várias tarefas matemáticas que podem ser utilizadas em sala de aula para desenvolver habilidades dos alunos. Alguns exemplos incluem:

Problemas - Os alunos são apresentados a um problema para resolver e devem usar suas habilidades matemáticas para encontrar uma solução;

Tarefas de modelagem matemática - Os alunos trabalham em projetos que requerem o uso de habilidades matemáticas para resolver um problema do mundo real;

Tarefas de visualização - Os alunos utilizam gráficos, diagramas e outros tipos de representações visuais para compreender conceitos matemáticos;

Tarefas de estimativa - Os alunos fazem estimativas aproximadas de quantidades, para desenvolver sua compreensão dos números e da magnitude;

Tarefas de justificação - Os alunos são convidados a justificar seus raciocínios e soluções, fornecendo uma justificativa matemática para seu pensamento;

Tarefas de investigação matemática - Os alunos exploram um conceito matemático de forma livre e investigativa, para desenvolver uma compreensão mais profunda;

Tarefas de conexão - Os alunos fazem conexões entre diferentes conceitos matemáticos, para desenvolver uma compreensão mais holística da disciplina.

Para tanto, o professor deve propor atividades matemáticas do tipo: formulação, representação, resolução e (ou) comunicação de problemas matemáticos a partir de uma situação. Com isso busca-se desenvolver no aluno uma determinada competência Matemática, junto a seu processo de aprendizagem.

Devido à importância das tarefas no processo de ensino e aprendizagem, o professor deve ter claro que essas tarefas são mais abertas do que o conteúdo que será mobilizado para realizá-las, deve-se rever as formas de implementá-las a fim de focar a atenção dos alunos sobre uma determinada ideia matemática (Stein et al., 2000) porque implicam processos cognitivos relacionados com a compreensão, estabelecimento de estratégias, procedimentos e validação (Cyrino, Jesus, 2014).

Penalva e Llinares (2011) trazem o termo demanda cognitiva informando que se trata da classe e nível de pensamento que se é exigido dos estudantes para a resolução da tarefa, apontando o que se alcança e o que se aprende em cada nível.

Segundo Stein e Smith (1998) as tarefas matemáticas podem ser consideradas em duas categorias, aquelas com baixo nível de exigência cognitiva, que exigem que os alunos memorizem rotineiramente procedimentos que levam a um tipo de oportunidade para o aluno pensar; e as de alto nível de demanda cognitiva, que exige que os alunos pensem conceitualmente e os encoraja a realizarem conexões que levam a um conjunto diferente de oportunidades para os alunos pensarem. Os autores classificam em quatro níveis de demanda cognitiva:

tarefas que exigem a memorização (Nível 1);

tarefas que usam procedimentos sem conexão (Nível 2);

tarefas que utilizam procedimentos com conexão (Nível 3);

tarefas que exigem o "fazer Matemática" (Nível 4).

De acordo com Smith e Stein (1998) as características de cada nível são as descritas a seguir.

Tarefa de Nível 1 são tarefas que envolvem a reprodução de fórmulas e regras, com memorização, sem reflexões sobre as definições que estão sendo vistas. Classificam-se como atividades de nível 1 de demanda cognitiva, pois requerem apenas a aplicação de uma regra memorizada, sem fazer reforços ao conceito a ser apresentado.

Tarefas de Nível 2 são tarefas que exigem recurso por algoritmo, focada na obtenção das respostas que ainda não fazem conexão com os conceitos matemáticos. Classificam-se como atividades de nível 2 de demanda cognitiva, por ainda dar ênfase na resposta, portanto uma tarefa que utiliza procedimento sem conexão.

Tarefas de Nível 3 são tarefas que estão intimamente relacionadas com os conceitos ou procedimentos buscando a compreensão destes, apresentando claras conexões com as ideias ao subvalorizar o algoritmo pois o êxito se dará pela exigência de algum grau de esforço cognitivo. Classificam-se como atividades de nível 3 de demanda cognitiva, pois existe uma relação com conceitos matemáticos, exigindo interpretação por parte do aluno, mesmo que exista um indicativo do conhecimento a ser aplicado. É uma tarefa que exige um procedimento com conexão.

Tarefas de Nível 4 são tarefas que exigem um alto esforço cognitivo pois executam a tarefa por conhecerem e apresentarem a compreensão conceitual da Matemática, verificado pelo pensamento complexo e muito distante do algorítmico em questões que não apresentam um indicativo de qual recurso deverá ser usado nem uma instrução prévia. Classificam-se como atividades de nível 4 de demanda cognitiva, pois exigem o fazer Matemática, uma vez que é necessário um aprofundado nível cognitivo a partir de uma questão que não dá indicativos de resolução. O aluno deve resgatar seus conhecimentos matemáticos e testá-los, em um contexto de maior complexidade.

Compreendendo os diferentes níveis de exigência cognitiva, o professor pode selecionar ou planejar as tarefas que atendam aos objetivos didáticos. É importante ter presente que a seleção de tarefas de alto nível não conduz necessariamente à participação dos alunos em formas complexas de raciocínio (Cyrino, Jesus, 2014), porque a forma como a tarefa é realizada em sala de aula pode alterar o nível de exigência cognitiva.

Apesar de serem desenvolvidas tarefas de alto nível cognitivo, que proporcionem situações que exijam pensamentos complexos e não algorítmicos (fazer Matemática) ou procedimentos que desenvolvam o nível de compreensão de conceitos matemáticos (procedimentos com conexões a conceitos e significados), é preciso entender que essas tarefas são definidas de acordo com as expectativas dos alunos ao se envolverem com a tarefa, mas que podem não ocorrer em sala de aula. Por isso, é fundamental que o professor, em tarefas com alto nível de exigência cognitiva, dê tempo suficiente para a execução da tarefa e não a simplifique, eliminando os aspectos desafiadores das tarefas para os alunos, bem como não dando as respostas ou caminhos para os alunos seguirem (Stein et al., 2000).

As tarefas matemáticas com alto nível de exigência cognitiva favorecem o "fazer Matemática" e exigem que os alunos se engajem em processos investigativos, justificativas e conexões entre diferentes conceitos. Para que isso ocorra, o professor precisa planejar cuidadosamente sua implementação, dando tempo suficiente para a resolução, sem reduzir sua complexidade (Stein et al., 2000).

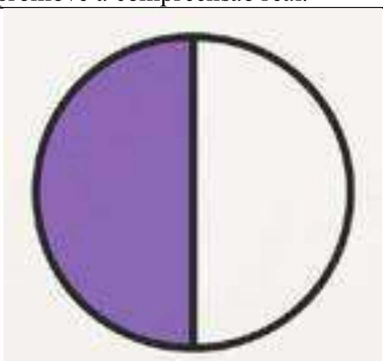
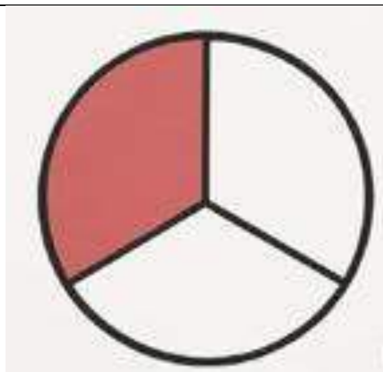
Tarefas investigativas desempenham papel central na promoção de aprendizagens significativas. Elas desafiam os alunos a explorar, formular hipóteses, representar e comunicar ideias matemáticas em contextos variados. A partir dessas tarefas, os estudantes têm a oportunidade de desenvolver competências como modelagem, estimativa, visualização e argumentação.

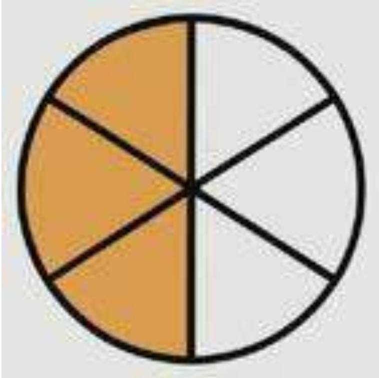
Além disso, tais tarefas oferecem ao professor a possibilidade de refletir sobre suas práticas e de avaliar o entendimento dos alunos de maneira mais ampla e contextualizada. A construção de objetos de aprendizagem com o uso de tecnologias, como o *software* GeoGebra, tem ampliado essas possibilidades, conforme demonstrado por iniciativas como as do GECEM.

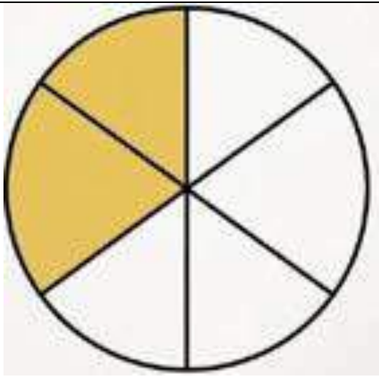
Exemplos de CPP na Matemática

Apresenta-se na **Figura 1** um exemplo onde o CPC é utilizado.

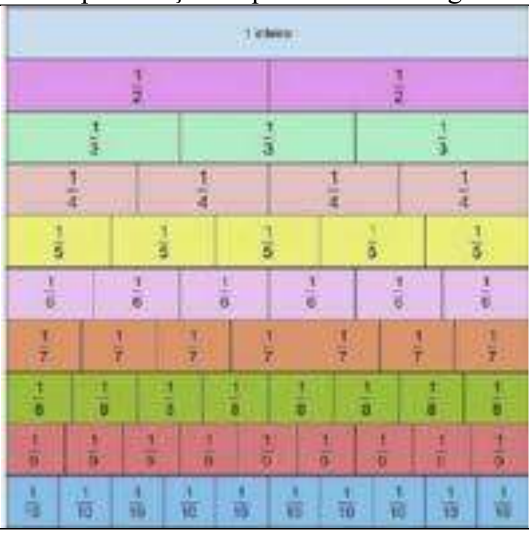
Figura 1 - Adição de frações com denominadores diferentes

Tema: Adição de frações com denominadores diferentes	
$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}=\frac{5}{6}$	
Apenas conteúdo: o professor explica o algoritmo sem contextualização. Com CPC: o professor usa material concreto, representa visualmente, antecipa erros comuns e promove a compreensão real.	
	





Outro recurso para frações equivalentes é a régua de frações



Também integra o uso de recursos para compreender o procedimento com problemas do cotidiano que envolva frações. Como no exemplo:

Durante um piquenique, três crianças levaram garrafas com suco:

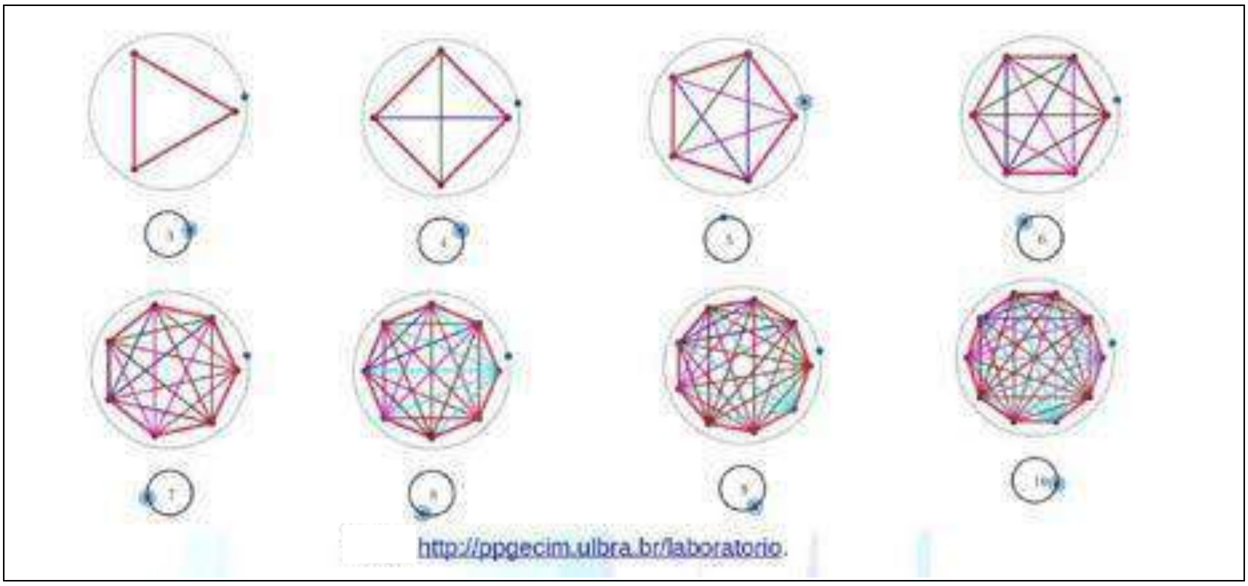
Lúcia levou uma garrafa com 1/2 de suco.
Carlos levou uma garrafa com 1/4 de suco.
Júlia levou uma garrafa com 3/4 de suco.

Perguntas:

1. Quem levou mais suco?
2. Quanto suco eles levaram ao todo?
3. Eles têm mais ou menos de duas garrafas cheias**?**

Outro exemplo do CPD dos professores está na integração das Tecnologias da Informação (TI) no planejamento didático utilizando, por exemplo, objetos de aprendizagem desenvolvidos no *software* GeoGebra.
O objeto de aprendizagem "Diagonais do Polígono" (**Figura 2**), permite que o estudante defina o polígono pelo número dos seus lados e observe as diagonais associadas a cada vértice e todas as diagonais simultaneamente e, deste modo, faça suas hipóteses e deduza o modelo matemático para o número de diagonais de um polígono de n lados. É neste ponto da sequência didática que os professores, devem identificar a tarefa como de alta demanda cognitiva pois exige que o aluno observe, conjecture, verifique e generalize o modelo matemático para determinar o número de diagonais de um polígono de n lados. Também, é importante que o estudante analise que ficar desenhando e contando diagonais não é o procedimento mais adequado e, a partir desta observação, o professor deve mediar para que os estudantes generalizem o modelo matemático para o cálculo do número de diagonais de um polígono de n lados.

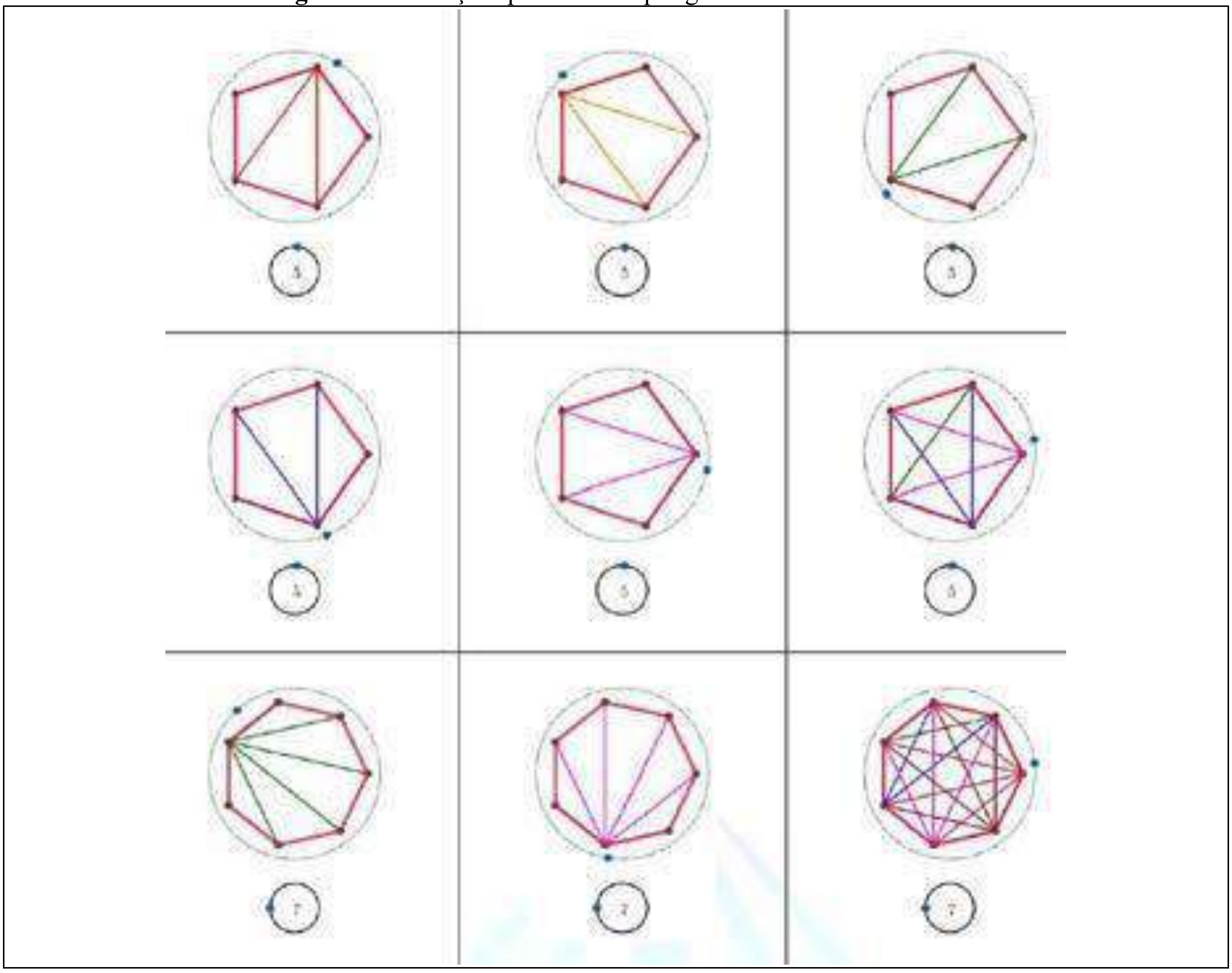
Figura 2 – Diagonais de um Polígono



Fonte: Homa, Groenwald e Llinares (2023).

A **Figura 3** apresenta as interações para polígonos de cinco e sete lados. As diagonais são traçadas tomando por referência o vértice mais próximo do ponto azul sobre o círculo pontilhado, que pode ser manipulado.

Figura 3 – Interações possíveis do polígono de cinco e sete lados



Fonte: Homa, Groenwald e Llinares (2023).

Pela observação das interações é possível verificar que cada vértice se liga a todos os outros vértices, mas as ligações com os adjacentes não contam como sendo a diagonal. Deste modo o número das diagonais (d) por vértice (n) é dado por:

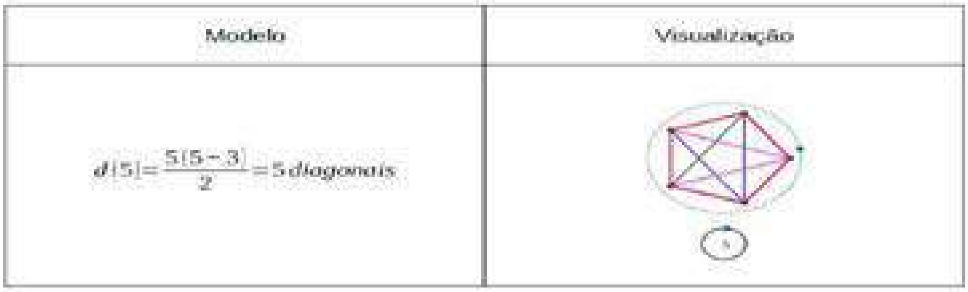
$$d(n) = n(n-3)$$

Para um polígono de cinco lados totalizaria 10 diagonais, mas na representação de todas as diagonais se apresentam somente 5 diagonais. Para o desenvolvimento do pensamento matemático a atividade deve ser trabalhada de modo que o estudante identifique o motivo do total de diagonais ser a metade, que no caso, cada diagonal é contada duas vezes. Logo, a hipótese para n lados é:

$$d(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Como exemplo na **Figura 4** apresenta-se a generalização das diagonais para um polígono de cinco lados.

Figura 4 - Generalização das diagonais para um polígono de 5 lados



Fonte: Homa, Groenwald e Llinares (2023).

Porém para que esta mediação seja realizada em sala de aula o professor deve ter desenvolvido a compreensão de como isto pode ser trabalhado com os estudantes e isto denomina-se CPC.

Considerações Finais

Assim, o CPC permite ao professor de Matemática compreender que saber o conteúdo é condição necessária, mas não suficiente. É preciso saber ensiná-lo considerando as dificuldades, os modos de pensar e os contextos dos alunos. Tal competência abrange a identificação de obstáculos de aprendizagem, o domínio de múltiplas estratégias de ensino e a capacidade de adaptar metodologias à realidade das turmas.

Além do CPC, Shulman enfatiza outros domínios do conhecimento docente: o saber disciplinar, o conhecimento curricular, o conhecimento pedagógico geral, o conhecimento dos estudantes, dos contextos educacionais e das finalidades educativas. Todos esses componentes interagem de forma integrada na construção de uma prática docente reflexiva e eficaz, tão importante na formação dos estudantes da Educação Básica.

Referências

Ball, Deborah Loewenberg; Thames, Mark Hoover; Phelps, Geoffrey Charles. Content knowledge for teaching: What makes it special? **Journal of Teacher Education**, v. 59, p. 398–407, 2008.

Born, R. *A* **complexidade da sala de aula**. 2019.

Carlson, J.; Daehler, K. R. **Understanding TPACK in Practice**. 2019.

Cyrino, Márcia Cristina de Costa Trindade; Jesus, Cristina Cirino de. Análise de tarefas matemáticas em uma proposta de formação continuada de professoras que ensinam matemática. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 20, n. 3, p. 751–764, 2014.

Escudero, Isabel; Sánchez, Victoria. How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? **Journal of Mathematical Behavior**, v. 4, p. 312–327, 2007.

Homa, Agostinho Iaqchan Ryokiti; Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; Llinares, Salvador. Tarefas Matemáticas Investigativas de Alta Demanda Cognitiva. **Perspectivas da Educação Matemática.** v. 16, número 42, 2023.

NCTM. **De los principios a la acción** – para garantizar el éxito matemático para todos. México: Editando libros S.A., 2015.

Penalva, M. Carmen; Llinares, Salvador Ciscar. Tareas Matemáticas en la Educación Secundaria. In: GOÑI, Jesus María; COLL, César (org.). **Didáctica de las Matemáticas/Formación y Desarrollo Profesional del Profesorado** N° 12 Vol. II.
Madrid: Graó, 2011. p. 27–51.

Smith, Margaret Schan; Stein, Mary Kay. Practices for Orchestrating Productive Mathematics Discussions Includes Professional Development Guide. **National Council of Teachers of Mathematics**, 2011.

Shulman, Lee, **Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform, a Harvard Educational Review,** v. 57, n. 1, p. 1-22, primavera 1987 (Copyright by the President and Fellows of Harvard College). Traduzido e publicado com autorização. Tradução de Leda Beck e revisão técnica de Paula Louzano. Disponível em:

https://www2.uepg.br/programa-des/wp-content/uploads/sites/32/2019/08/SHULMANN-sobre-ENSINO.pdf>. Acessado em: 06/03/2025.

Shulman, Lee. Those Who Understend: knowledge growth in teaching. **Education Researcher**, v. 15, n. 2, p. 4-14, fev. 1986. Disponível em: <http://www.fisica.uniud.it/URDF/masterDidSciUD/materiali/pdf/Shulman_1986.pdf>. Acessado em: 06/03/2025.

Stein, Mary Kay et al. **Implementing standarts based mathematics instruction**: A casebook for professional development. New York, NY: Teachers College Press, 2000.

Stein, Mary Kay; Grover, Barbara W.; Henningsen, Marjorie. Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. **America Educational Research Journal**, v. 33, n. 2, p. 455–488, 1996.

Aprender a mirar situaciones de enseñanza de las matemáticas: ¿ves lo mismo que yo? Un reto en la formación de los futuros docentes

Mar MORENO

Universidad de Alicante, España
mmoreno@ua.es

Resumen

Aprender a enseñar matemáticas es una tarea compleja que requiere que los futuros docentes dispongan de conocimientos del contenido a enseñar y de conocimientos del contenido pedagógico (Ball et al., 2008) que les permita interpretar y responder a las posibles situaciones que puedan surgir en el contexto de aula. Diversas investigaciones han evidenciado cómo el uso de registros de la práctica en los programas formativos apoya el aprendizaje de competencias docentes propias de la profesión (Llinares y Fernández, 2021) y favorece la integración de los conceptos teóricos proporcionados en los programas formativos durante la resolución de prácticas profesionales específicas como por ejemplo, modificar tareas de libros de texto (Moreno et al., 2024) o interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Callejo et al., 2022; Ivars et al., 2020; Moreno et al., 2021). En este sentido mirar profesionalmente situaciones de enseñanza se puede constituir como una práctica profesional que permite dar sentido a situaciones de enseñanza y tomar decisiones informadas en términos de la interpretación realizada (Sherin et al., 2011), para lo cual habitualmente, el (futuro) docente interacciona con materiales curriculares (Amador et al., 2021; Koning et al., 2022). En un contexto formativo, las decisiones informadas pueden apoyarse en conocimiento teórico proporcionado en los propios programas. El problema se plantea al analizar cómo los futuros docentes interaccionan con dichos materiales y cómo sus decisiones se ven afectadas por esta interpretación (Moreno et al., 2024; Moreno et al., 2025). En esta comunicación desarrollaremos estos aspectos y pondremos el foco de atención en la importancia de atender a la "dualidad" de la mirada profesional y el papel de los talleres, las discusiones grupales y el feedback de los formadores para apoyar la integración del conocimiento teórico con el desarrollo de la mirada profesional.

Palabras clave: Estudiantes para profesor de educación secundaria. Mirar profesionalmente situaciones de enseñanza. Mirar materiales curriculares. Prácticas profesionales específicas. Formación de futuros docentes

Mirar profesionalmente situaciones de enseñanza

Uno de los objetivos de los programas formativos de futuros profesores es facilitar el aprendizaje de prácticas profesionales específicas necesarias para desarrollar su futura profesión como, por ejemplo, la de aprender a mirar situaciones de enseñanza, modificar tareas de libros de texto, planificar lecciones, etc., prácticas que pueden ser aprendidas y entrenadas en el contexto de estos programas (Llinares, 2023), si bien no es una tarea sencilla que está obligando a los formadores a generar nuevos recursos específicos orientados a la formación de los profesores de matemáticas (Ivars et al., 2020) y al desarrollo de nuevas metodologías (Kazemi y Waege, 2015).

Aprender a mirar profesionalmente situaciones de aula es una práctica profesional específica que distingue a un experto de alguien que no lo sea, y que le permite identificar aspectos relevantes de una determinada situación, dotarlos de sentido y actuar en consecuencia (Goodwing, 1995; Mason, 2002). Para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es necesario que el (futuro) docente de sentido a diversas situaciones de aula. Según Mason (2002), la competencia mirar profesionalmente implica dos procesos: 1) Ser capaz de describir un determinado fenómeno de la forma más objetiva posible, evitando interpretaciones, juicios o evaluaciones, 2) "explicar" qué ocurre en el aula o bien "explicar e interpretar" lo que el (futuro) docente percibe. En concreto este autor se refiere a una mirada en particular, al pensamiento matemático de los estudiantes, necesario en el contexto de enseñanza ya que permite al (futuro) docente tomar decisiones informadas sobre cómo continuar la enseñanza para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. En este sentido Jacobs et al. (2010) conceptualizó esta mirada profesional mediante tres destrezas interrelacionadas: a) atender a las estrategias o respuestas de los estudiantes, b) interpretar la comprensión del estudiante, y c) decidir cómo responder a partir de la comprensión inferida. Esta práctica profesional específica resulta compleja para los (futuros) docentes ya que implica "reconstruir e inferir" la comprensión de los estudiantes a partir de lo que ellos han escrito, dicho, o hecho en momentos específicos del aula, y va más allá de indicar si la respuesta del estudiante es correcta o incorrecta. Interpretar el pensamiento de los estudiantes requiere que el (futuro) docente determine en qué medida las respuestas de los estudiantes son o no significativas para su aprendizaje y conducirles hacia este a través de decisiones adecuadas (Hines y McMahon, 2005; Wilson et al., 2013).

Numerosas investigaciones han puesto el foco de atención en caracterizar la mirada de los (futuros) profesores al pensamiento matemático de los estudiantes, en contextos muy diversos: usando análisis de grabaciones en vídeo de interacciones con los estudiantes (Sherin et al., 2011; Roller, 2016); mediante discusiones online (Fernández et al., 2012); haciendo uso de trayectoria de aprendizaje (Callejo et al., 2022) o mediante el estudio de lecciones ("lesson study") (Guner y Akyuz, 2020), proporcionando evidencias de que los futuros profesores pueden mejorar su mirada profesional con apoyo durante el proceso formativo. Para desarrollar esta práctica profesional los (futuros) docentes deben usar su conocimiento, tanto matemático como de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Brown et al., 2020), conocimiento, este último, que se proporciona en los programas formativos.

Tareas profesionales que apoyan la mirada profesional

En los programas formativos cada vez es más habitual el uso de registros de la práctica (respuestas de estudiantes, video-clips de lecciones matemáticas, etc.) para diseñar tareas profesionales. Estos registros de la práctica son un instrumento muy adecuado para modelizar la realizar de la enseñanza y el aprendizaje en el aula en los contextos formativos, permitiendo a los futuros docentes fijarse en diferentes aspectos de las situaciones de enseñanza, por ejemplo, la gestión del aula, las características de las tareas propuestas, las respuestas y estrategias de los estudiantes, etc. Asimismo, para la realización de estas prácticas profesionales es necesario proporcionar al docente de información teórica que apoye su resolución y le permita interpretar las situaciones analizadas de manera informada (Llinares y Fernández, 2021; Fernández, 2021; Callejo et al., 2022). Mostramos a continuación algunos ejemplos de registros de la práctica y documentos teóricos proporcionados para apoyar la resolución de estos.

En un contexto de formación de futuros profesores de educación de educación secundaria en la Universidad de Alicante, se diseñó un entorno de aprendizaje sobre el concepto de límite de una función en un punto. Se trata de un concepto matemático relevante en el curriculum español de bachillerato no sólo porque es necesario para construir otros conceptos de cálculo (Cornu, 2002) sino también porque da significado a procesos como el de la dinámica de poblaciones o los de la velocidad instantánea de un móvil (Fernández et al., 2024). Apoyados en resultados de investigaciones sobre la dificultad de los estudiantes para comprender la concepción métrica del límite funcional (Fernández-Plaza y Simpson, 2016; Kidron, 2010), se consideró la importancia de favorecer los modos de representación gráfico, numérico y algebraico, así como los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y la coordinación de estos a través de los niveles de comprensión caracterizados en investigaciones previas (Valls et al., 2011; Pons, 2014), tal como se muestra en la **Figura 1**.

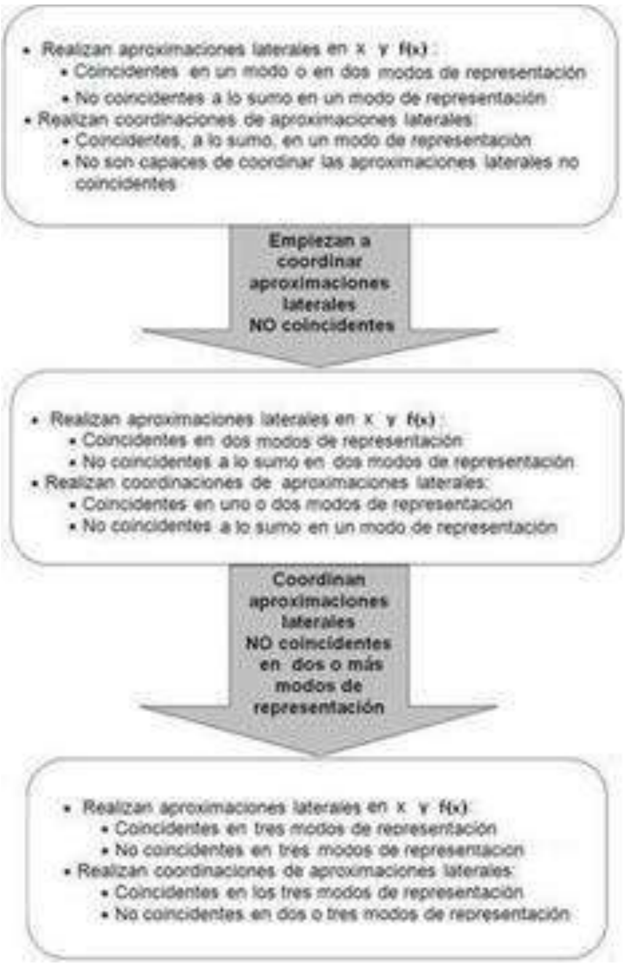


Figura 1. Niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto (Pons, 2014)

Se diseñaron tres tareas profesionales, la primera consistía en tres problemas de límites funcionales usando el modo de representación gráfico el numérico y el algebraico que debían ser resueltos por los futuros profesores de educación secundaria para poner en evidencia sus estrategias de resolución y evidenciar los conceptos matemáticos necesarios para su resolución (**Figura 2**).

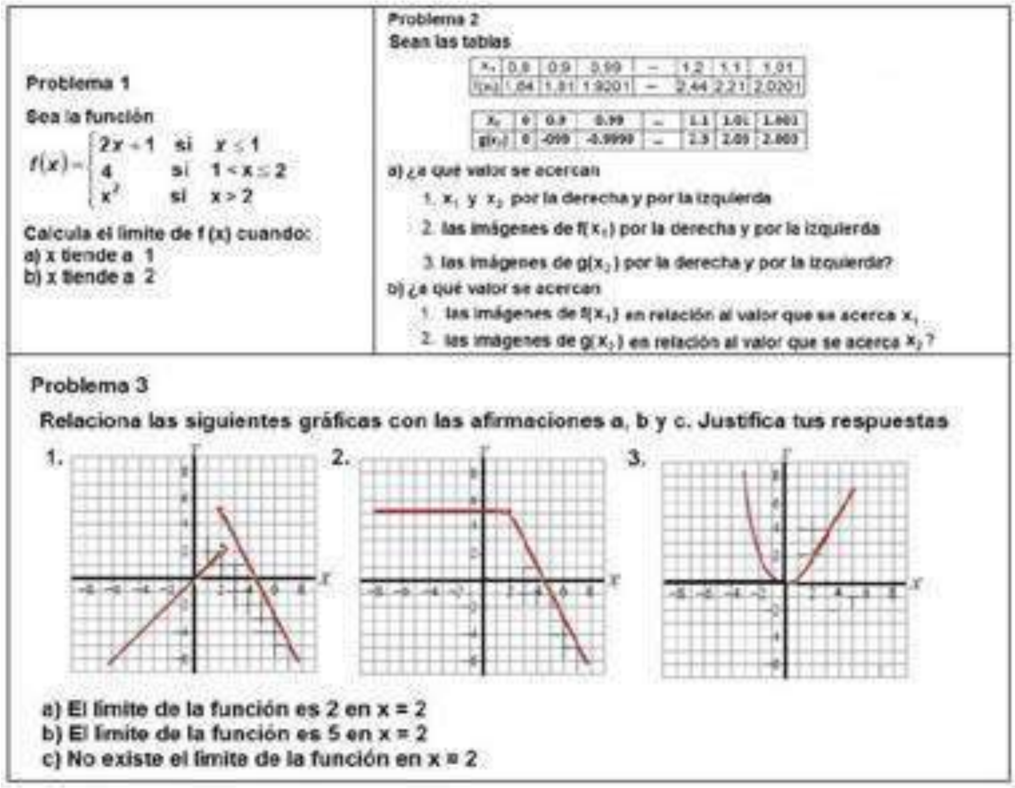


Figura 2. Problemas usados en las tareas profesionales del entorno de aprendizaje de límite de funciones (tomado de Llinares y Fernández, 2021)

En la segunda tarea profesional los futuros docentes debían anticipar respuestas de estudiantes y diseñar nuevas tareas en función de las respuestas anticipadas. Finalmente, en la tercera tarea profesional los futuros docentes debían interpretar respuestas de estudiantes y diseñar nuevas tareas para apoyar el aprendizaje de los estudiantes, considerando la interpretación realizada. Las respuestas de los estudiantes presentaban diferentes niveles de comprensión de la concepción dinámica del límite. Dos respuestas correspondían a estudiantes que se encontraban en el nivel superior (Nivel 3 según Pons, 2014), otra estudiante se encontraba en el nivel inferior (Nivel 1) y otro estudiante en el nivel intermedio (Nivel 2). Las características de las respuestas de los estudiantes permitían que los futuros docentes se fijaran en las aproximaciones en el dominio y en el rango, si había o no coordinación y en qué modo de representación, pudiendo usar la información teórica proporcionada para interpretar el pensamiento de los estudiantes (Fernández et al., 2024).

Tal como evidenciaron los resultados de la investigación realizada al analizar cómo los futuros docentes miraban el pensamiento matemático de varios estudiantes (Fernández et al., 2024), la mayoría fueron capaces de identificar los contenidos matemáticos que se evidenciaban en las tareas, sin embargo, la interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes, por parte de los estudiantes para profesor, fue variada. Hubo un grupo de estudiantes para profesor que interpretaron el pensamiento de los estudiantes de manera dicotómica, es decir, bien consideraban que comprendían el concepto en todos los modos de representación, o bien que no comprendían el concepto de límite, al no ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango, en algún modo de representación. En este caso, los estudiantes para profesor tendieron a tomar decisiones generales, más orientadas a reproducir procedimientos de cálculo de límites, sin dar valor al papel que jugaban los modos de representación en las tareas. El otro grupo de estudiantes consideró que había cierta progresión de aprendizaje en los estudiantes, y fueron capaces de percibir matices en las respuestas de los estudiantes, lo que favoreció una toma de decisiones más ajustada a las necesidades de los estudiantes, en función de sus dificultades. La mayoría de los estudiantes usaron los documentos teóricos proporcionados en el programa formativo, sin embargo, no todos los aplicaron de la misma manera a las situaciones analizadas.

En el mismo contexto formativo, pero en un entorno de aprendizaje diferente, cuyo objetivo era la modificación de tareas para favorecer la enseñanza exploratoria. A los futuros docentes se les proporcionó una tarea profesional en la que debían modificar y diseñar tareas que apoyaran prácticas matemáticas específicas como la del estudio de casos particulares, observar regularidades, establecer conjeturas, realizar generalizaciones de las propiedades identificadas, etc. En este caso, las tareas procedían de libros de texto de educación secundaria relacionadas con aspectos geométricos. Para la primera tarea profesional se usó un registro de la práctica en la que usando pentaminós, los estudiantes debían analizar si existía alguna relación entre el perímetro de las figuras y su área. La segunda tarea pretendía que los estudiantes representaran una figura a una escala determinada y estudiaran la relación entre el perímetro y las áreas, respectivamente, de la figura dada y la figura escalada. Ambas tareas fueron elegidas por el potencial que tenían, con ciertas modificaciones, para apoyar un aprendizaje basado en la exploración (Moreno et al., 2024). Al igual que en la investigación precedente, los estudiantes para profesor fueron capaces de identificar las características de las tareas, reconocer las relaciones matemáticas implícitas en su resolución, sin embargo, las decisiones adaptadas pusieron en evidencia maneras diferentes de apoyar el aprendizaje de los estudiantes.

Un grupo mayoritario de estudiantes para profesor modificó las tareas proporcionando a los estudiantes oportunidades de aprendizaje para que buscaran contraejemplos que permitieran confirmar la no relación entre el perímetro y el área de los pentaminós, o de otras figuras geométricas (Tarea 1), y permitir que estudiaran diferentes figuras semejantes para establecer la relación entre áreas y perímetros, respectivamente, buscando patrones para generalizar una relación (Tarea 2).

Otro grupo menor de estudiantes para profesor, tomaron decisiones orientadas a profundizar en los aspectos procedimentales de als tareas. De esta forma, les plantearon diferentes polígonos para que calcularan el área y el perímetro (Tarea 1), y para el caso de la Tarea 2, añadieron preguntas a la tarea del libro de texto cuyo foco era el cálculo del área y del perímetro de las figuras haciendo uso del teorema de Pitágoras. En ningún caso, se plantearon a los estudiantes preguntas sobre posibles relaciones matemáticas o propiedades.

Ambos ejemplos, ponen de manifiesto la dificultad de los estudiantes para profesor de tomar decisiones a pesar de proporcionar interpretaciones informadas de las situaciones de enseñanza (como, por ejemplo, Callejo et al., 2022; Ivars et al., 2020; Lee et al., 2024; Llinares et al., 2020), y como señala Choy (2013) aunque es necesario que los estudiantes para profesor identifiquen e interpreten los aspectos específicos de la situación de enseñanza, no parece suficiente para mejorar la práctica en el aula.

Mirar curricularmente los materiales profesionales

El hecho que la mirada experta a las situaciones de enseñanza esté más directamente relacionada con diferentes aspectos del conocimiento profesional más que con la experiencia docente, ha llevado a algunos investigadores a profundizar en cómo los futuros profesores perciben e interpretan los materiales curriculares en la toma de decisiones de instrucción y cuando planifican lecciones (Amador et al., 2017; Barno y Dietiker, 2022).

Este marco teórico ha sido definido como el proceso mediante el cual los profesores dan sentido a la complejidad de los contenidos y las oportunidades pedagógicas de los mismos (Males et al., 2015). Se basa en tres habilidades interrelacionadas como extensión del marco conceptual de la mirada profesional (Jacobs et al., 2010) que permiten a los (futuros) profesores reconocer, dar sentido y utilizar estratégicamente las oportunidades de los materiales curriculares. Éstos pueden adoptar diversas formas, como actividades matemáticas (tareas, juegos, ejercicios, etc.), contenidos matemáticos (una definición o un teorema, etc.) y aspectos metodológicos (temporalización, organización de las sesiones de aula, etc.) (Dietiker et al., 2018).

Este marco conceptual ha permitido comprender cómo los futuros profesores conceptualizan los contenidos matemáticos al interaccionar con diferentes recursos curriculares. Algunos de estos resultados han mostrado empíricamente que los futuros docentes han desarrollado una mayor capacidad crítica y han prestado una atención más precisa a aspectos concretos de las tareas para evaluar en qué medida éstas favorecían o limitaban el razonamiento de los estudiantes. Este hecho, permitía a los futuros docentes adaptar las tareas para mejorar la calidad de la instrucción (Males et al., 2015).

En este sentido, parece que la interacción de los (futuros) docentes con los materiales curriculares puede facilitar la toma de decisiones pedagógicas en la medida que se tiene en cuenta el pensamiento matemático de los estudiantes, lo que contribuye a mejorar las prácticas de los (futuros) profesores. No obstante, diversas investigaciones también han puesto en evidencia la desconexión existente entre lo que se identificaba en el material curricular y la toma de decisiones adoptada (Fernández et al., 2024; Rotem & Ayalon, 2023). Lo que sugiere que el "darse cuenta del (futuro) profesor abarca dimensiones que van más allá de las interacciones profesor-alumno y profesor-currículo.

Como se ha ejemplificado en la sección anterior, en los programas formativos se proporcionan a los futuros profesores oportunidades de aprendizaje para desarrollar sus habilidades para la enseñanza, proporcionando documentos teóricos (en adelante, materiales profesionales) para apoyar la resolución de las tareas profesionales. Pocas investigaciones han prestado atención directa a estos materiales y cómo son usados por los futuros docentes. Los resultados empíricos avalan que los profesores en formación interactuar de forma diferente con los materiales profesionales que se les proporcionan para mirar el pensamiento de los estudiantes y que esta variación se debe a cómo interpretan los materiales profesionales (Moreno et al., 2025). En este estudio sobre la interpretación del pensamiento matemático de un estudiante y la toma de decisiones para favorecer el pensamiento relacional y el reconocimiento de propiedades matemáticas, se pudo comprobar que las tomas de decisiones de los futuros docentes de educación secundaria dependieron de la interpretación dada al material profesional. Mientras que unos futuros docentes valoraron como rasgo de pensamiento relacional el “intento [incorrecto] de una propiedad”, otros consideraron que precisamente ese uso inapropiado era un rasgo característico de pensamiento procedimental.

En el caso práctico reseñada en la sección previa sobre la modificación de tareas, ocurrió algo similar. Aquellos futuros docentes que interpretaron los principios de la enseñanza exploratoria como objetivos de aprendizaje a ser aprendidos, tomaron decisiones orientadas a generar oportunidades de aprendizaje que hicieran operativos estos principios a través del estudio de casos particulares, el establecimiento de conjeturas, etc. Por el contrario, aquellos estudiantes para profesor que interpretaron los principios de la enseñanza exploratoria como meras características de las tareas, pero no como una estructura conceptual a ser aprendida, orientaron sus decisiones a trabajar aspectos procedimentales.

En general, los estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria disponen de un conocimiento del contenido matemático, sin embargo, muestran dificultades en el conocimiento específico para la enseñanza y del aprendizaje de los estudiantes, lo que se percibe en la interpretación de las situaciones de enseñanza y puede justificar esa dificultad en la toma de decisiones. El conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas y del aprendizaje es novedoso y difícil. Les exige interiorizar nuevos contenidos en poco tiempo, y complementar el conocimiento del contenido matemático con el de la enseñanza y el aprendizaje, exigiéndoles una forma de pensar y razonar a la que no están habituados. Estos hechos exigen prestar atención en los programas formativos a los materiales profesionales, y dedicar tiempo a realizar roll-playing, feedbacks entre los estudiantes y los formadores, etc.

Reconocimiento

Esta investigación ha sido financiada por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, Spain, grant number PID2023-149624NB-100 y PID2020-116514GB-I00.

Referencias Bibliográficas

Amador, J. M., Estapa, A., de Araujo, Z., Kosko, K.W., &Weston, T. L. (2017). Eliciting and analyzing preservice teachers’ mathematical noticing. *Mathematics Teacher Educator, 5*(2), 158–177. https://doi.org/10.5951/mathteaceduc.5.2.0158

Ball, D. L., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Barno, E., y Dietiker, L. (2022). *Collective curricular noticing within a mathematics professional learning community*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Brown, L., Fernández, C., Helliwell, T. y Llinares, S. (2020). Prospective mathematics teachers as learners in university and school contexts. From university-based activities to classroom practice. En G. M. Lloyd y O. Chapman (Eds) *International Handbook of Mathematics Teachers Education: Volume 3*. Participants in Mathematics Teacher Education (vol. 13, pp. 343-366). Koninklijke Brill NV, Leiden.

Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M., y Sánchez-Matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers’ to notice children’s mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20, 597-617.* https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4

Choy, B. H. (2013). Productive Mathematical Noticing: What it is and why it matters. En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 186-193). Melbourne: MERGA.

Cornu, B. (2002). Limits. En D., Tall (eds) *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11, 153-166. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_10

Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., y Earnest, D. (2018). Research commentary: Curricular noticing: A Framework to describe teachers’ interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education, 49*(5), 521–532. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.49.5.0521

Fernández, C. (2021). Apoyando el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente del future profesorado de matemáticas: Práctica e investigación. *Realidad y Reflexión, 53* (53), 41-60. https://doi.org/10.5377/ryr.v53i53.10887

Fernández, C., Llinares, S., y Valls, J. (2012). Learning to notice students’ mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education, 44,* 747–759. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0425-y

Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: Pathways of development. *ZDM Mathematics Education, 56*(6), 1137–1151. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z

Fernández-Plaza, J.A., y Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics 93*, 315–332. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9707-6

Guner, P., y Akyuz, D. (2020). Noticing student mathematical thinking within the context of lesson study. *Journal of Teacher Education, 71*(5), 568–583. https://doi.org/10.1177/0022487119892964

Goodwin, C. (1995). Seeing in Depth. *Social Studies of Science, 25*, 237-74. SAGE.

Hines, E., y McMahon, M. T. (2005). Interpreting middle school students' proportional reasoning strategies: Observations from preservice teachers. *School Science and Mathematics, 105*(2), 88–105. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2005.tb18041.x

Ivars, P., Fernández, C., y Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Sciences and Mathematics Education, 18*, 529–548.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169–202. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.41.2.0169

Kazemi, E., y Waege, K. (2015). Learning to teach within practice-based methods courses. *Mathematics Teacher Education and Development, 17*(2), 125-145.https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 1261-1279. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9258-8

Lee, JE., Hwang, S., y Yeo, S. (2024). Preservice Teachers' Task Identification and Modification Related to Cognitive Demand. *International Journal of Sciences and Mathematics Education, 22*, 911–935.. https://doi.org/10.1007/s10763-023-10410-w

Llinares, S. (2013). Professional noticing: A component of the mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus—Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Llinares, S. (2023). Formación de profesores de matemáticas "basada" en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas. *CIAEM-Lima2023, Conferencia paralela*.

Llinares, S., y Fernández, C. (2021). Mirar profesionalmente la enseñanza de las matemáticas: características de una agenda de investigación en Didáctica de la Matemática. *La Gaceta de la RSME, 24*(1), 185-205.

Llinares, S., Ivars, P., Buforn, A., y Groenwald, Cl. (2020). "Mirar profesionalmente" las situaicones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Ediciones Universidad Salamanca.

Males, L. M., Earnest, D., Dietiker, L., y Amador, J. M. (2015). *Examining K-12 prospective teachers' curricular noticing*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge-Falmer.

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M.L. et al. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education 53*, 57–72. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5

Moreno, M., Llinares, S., y Santonja, P. (2024). Prospective secondary mathematics teachers' use of inquiry-based teaching principles as conceptual tools when modifying mathematical tasks. *Journal on Mathematics Education, Vol. 15* No. 4, 1131–1152. https://doi.org/10.22342/jme.v15i4.pp1131-1152

Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., y Valls, J. (2025). Influence of Professional Materials on the Decision-Making of Preservice Secondary Teachers When Noticing Students' Mathematical Thinking. *Education Sciences, 15*(4), 418. https://doi.org/10.3390/educsci15040418

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. Tesis Doctoral, Universidad de Alicante.

Roller, S. A. (2016). What they notice in video: A study of prospective secondary mathematics teachers learning to teach. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(5), 477–498. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9307-x

Rotem, S. H., & Ayalon, M. (2023). Changes in noticing multiple dimensions in classroom situations among preservice mathematics teachers. *Teaching and Teacher Education, 121*, 103932. https://doi.org/10.1016/j.tate.2022.103932

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., y Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematic teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics, 100,* 83-99. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9855-y.
Sánchez-Matamoros García, G., Moreno Moreno, M., Pérez Tyteca, P., y Callejo de la Vega, M. L. (2018). Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(2), 203-228. https://doi.org/10.12802/relime.18.2124.
Sherin, M. G., Jacobs, V. R., y Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 1–13). Routledge.
Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(3), 325-338.
Wilson, P. H., Mojica, G., y Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understanding of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 103–121. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2012.12.003

Innovación como resultado de investigación de la visión etnomatemática de Ubiratán D'Ambrosio

José Alfredo CASTELLANOS SUÁREZ
Universidad Autónoma Chapingo, México

Resumen

Se atribuye a Ubiratan D'Ambrosio el aporte a la educación matemática, pero esto es parte de sus contribuciones, su innovación principal es proponer y ofrecer una teoría de conocimiento, basada en la etnomatemática. Se tiene como objetivo el explicar los aspectos nodales de innovación de los planteamientos elaborados por D'Ambrosio. Para ello se recurre a los conceptos de espacio y tiempo. Fue preciso conocer parte de su obra, sobre todo divulgada en conferencias, recurriendo al método analítico. Ya que deconstruyendo de lo general a lo particular y luego a la inversa, fue posible entender la importancia del aspecto sociocultural de la confección y configuración de la matemática (que denominó Etnomatemática; *etno* por los aspectos transculturales y transtemporales). De sus conceptos, su método (Ciclo de Conocimiento, consistente en la generación de nuevo conocimiento, para ser organizado intelectual y socialmente, para ser trasmitido y difundido), su metodología (Sistema Cultural de Conocimiento de tres etapas) y su propuesta teórica que equivale tanto a llevarlo a la práctica y a su divulgación. Su teoría ahora es puesta a la crítica de la comunidad científica. Su trayectoria académica está plagada de reconocimientos -sobre todo- internacionales, pero también de formar instancias que hicieran posibles sus ideas.

Palabras clave: Etnomatemática. Ciclo de Conocimiento. Sistema Cultural de Conocimiento. Ubiratán D'Ambrosio.

Introducción

Ubiratán D'Ambrosio nacido en Brasil el 8 de mayo de 1832 y fallecido el 12 de mayo de 2021 a los 89 años, es uno de los matemáticos señeros, dedicado al entendimiento, a la comprensión y a la enseñanza de la matemática no sólo como disciplina, sino como parte el holum (del todo), de la complejidad, de transdisciplina, de la transculturalidad y el necesario acompasamiento de la transtemporalidad, un condimento esencial. Compartiendo ciertas ideas con Paulo Freire, va en busca de articular culturas y sociedades en espacio y tiempo, para poder quebrar el imperio y el monopolio del conocimiento disciplinario y colonialista. Con la idea de rescatar antiguas culturas, con ayuda de la hermenéutica y el empleo de la Historia Oral, empuja a aflorar la elaboración de ideas aritméticas y geométricas en cualquier espacio humano, de cualquier región y temporalidad, tan valiosas por su sencillez pero que resultan sustantivas, tanto como las elaboradas que van tras soluciones técnicas particulares, si bien ambas responden a problemas complejos.

Se recurre al método analítico a fin de deconstruir los planteamientos de Ubiratán para llevarlos a procesos de concreción, de lo general a lo concreto. El objetivo de este trabajo radica en explicar los puntos nodales de innovación de los planteamientos etnomatemáticos por parte de D'Ambrosio. El punto central de flexión radica en el *espacio y el tiempo*, no en el sentido einsteniano, sino cuántico, en complejidad. Para esto se precisa establecer su labor en apoyo a programas de estudios en posgrado en Estados Unidos en lo tocante al *Cálculo de Variaciones* y la *Teoría de la Medida*, actividad que le refuerza lo que ya le merodeaba en la mente, ya que los valores de cierto funcional se minimizan o maximizan en un determinado espacio que pude ser lineal o curvo, conforme al cálculo de las variaciones; en tanto que los conceptos de longitud, área y volumen de la teoría de la medida, tienen que compartir la interdisciplina para brindar ocasión a la geometría, la probabilidad y la estadística. En ambos casos era preciso entender la función de los números. Ubiratán se dio a la tarea de conocer cómo se formaron los números (naturales, racionales, irracionales…) y para ello tuvo que recurrir a la Filosofía de la Historia (la historia disciplinar) y a la Historia misma para conocer el soporte sociocultural de la elaboración matemática, pues sin cultura no hay matemática, pero esta cultura no viene sólo del homo sapiens sino desde sus antecesores homínidos. Para explicar, no sólo bastaba la palabra y quien la dijo primero, sino se dedicó a la construcción conceptual y etimológico de lo que adquirió carta de identidad como etnomatemática, ya que de ahí manan los conceptos.

Para comprender hubo que hacer historia, estableciendo a los sujetos de creación, que se encuentra ciertamente en personajes, pero ante todo en el medio social, es necesario recurrir a la teología, curioso pero el papel del mito resulta fundamental. Entonces es un compartimiento de la arqueología, la antropología, la etnografía, la sociología, la geografía, la historia, la matemática, de ahí su carácter transdisciplinario, sin aislar culturas sino correlacionando con ellas, pues nada serían los griegos sin el saber de los sumerios, babilonios y egipcios; qué serían de las aportaciones de fines del medioevo y del renacimiento sin los árabes. ¡Qué sería del conocimiento matemático contemporáneo sin el "0" de los hindúes de principios de la era, sin el todavía más antiguo cero de los mayas!

De modo que a través del tiempo y el papel de la aritmética y del espacio que juguetea con los entendimientos geométricos figurativos, es que puede establecer y proponer la metodología y las técnicas para arribar al conocimiento más profundo, pero a la vez más simple de las matemáticas. Que se trata de que la gente se interese y haga la matemática, la comprenda y eso es la pedagogía que emplaza Ubiratán. La socialización implica una mayor proyección de la matemática misma.

El planteamiento explicativo consiste en que a través de la etnomatemática confecciona una propuesta de teoría científica, siguiendo los pasos del método científico, con nuevas modalidades como son la complejidad, la transdisciplina, la transculturalidad y la transtemporalidad.

El alcance historiográfico de su obra es más de carácter biográfico en materia de logros académicos y reconocimientos institucionales; o bien, de carácter periodístico para hurgar sus opiniones en la materia, como sucede en la entrevista que realiza Hilbert Blanco, en la que D'Ambrosio expone sus puntos de vista en cuestión etnomatmática. Se comienzan a explorar sus contenidos teórico conceptuales para exponerlos más que explicarlos, tal sucede con Milton Rosa y Daniel Clark, que tratan sobre el sentido de la etnomatemática. A raíz del deceso del eminente matemático, es que Patrick Scott comienza a reflexionar sobre los aspectos centrales de los aportes de Ubiratán, que lo centra en los componentes sociales y culturales que debe tener el trabajo matemático, para lograr explicar mejor sus alcances. Por ello es que se ha recurrido a las explicaciones que el mismo autor ofrece acerca de su obra; así ocurre con un artículo escrito en 2014. Sobre todo, en un video difundido por la Universidad Antonio Nariño, de Medellín, Colombia, en el que ofreció una conferencia que resultó magistral en la que expuso su sistema de una manera completa (que debe de transcribirse y publicarse). Cuatro meses después falleció, dejando este legado tan importante a través de su discurso en viva voz.

Perfil y trayectoria de Ubiratán

A la edad de 40 años, cumplidos en 1972, la vida de Ubiratán D'Ambrosio dio un vuelco en lo tocante a su formación profesional. Empezó sus estudios profesionales en su ciudad natal de Sao Paulo y logró graduarse como Licenciado y Profesor en Matemática en la Universidad de Sao Paulo, en los años 1954 y 1955. Ocho años después alcanzó el doctorado en Matemáticas, en la Escuela de Ingeniería de San Carlos, en la misma institución paulista. Fue becario en el Instituto di Matematica dell'UNiversitá do Genova en los años 1960-1961. De 1964 a 1965 realizó sus estudios posdoctorales en el Departamento de Matemáticas de la Brown University, de Providence, Richmond, en Estados Unidos.[1]
Tan pronto terminó sus estudios, en 1965 fungió como Profesor Asistente de Matemática en la Mathematics State University, de Nueva York, Búfalo, en Estados Unidos. Continuó laborando de 1968 a 1972 en la University of Rhode Island, en Nueva Inglaterra, primero como Profesor Asociado y luego como Director de Graduate Studies. En los programas de posgrado se dedicó al *cálculo de las variaciones*. Marcos Valle (2020, p. 1) explica que tal cálculo de variaciones propone establecer "las funciones que minimizan o maximizan el valor de cierto funcional definido sobre un determinado espacio. Problemas como hallar el camino de menor longitud que une dos puntos de una determinada superficie o encontrar la curva cerrada de una longitud dada que encierra el área máxima puedan ser resueltos usando el cálculo de variaciones."
D'Ambrosio también enseñaba la Teoría de la Medida bajo enfoque interdisciplinario, que generaliza los conceptos de longitud, área y volumen, correlacionando con la geometría, motivando a que se asigne un número a cada subconjunto (como medida), de manera que las medidas, las funciones medibles y la integración, resulten centrales en la geometría, la probabilidad y la estadística (Sabina de Lis, 2013, p. X). Es necesario entender lo lejos que se hallaba -académicamente hablando- de lo que en futuro sería actividad central cuando decidió dar un salto cuántico a su desenvolvimiento profesional.
Por eso el año de 1972 marcó un hito personal pues bien pudo haberse quedado a trabajar en Estados Unidos en cuestiones de matemática disciplinaria; no obstante, tomó la decisión de regresar a su país y emprender un nuevo derrotero basado en la educación matemática. Esta decisión contrastaba con la búsqueda de funciones para minimizar o maximizar los valores, de modo que las funciones fueran correlacionadas en subconjuntos que permitieran desarrollar la geometría, la probabilidad y la estadística.
El quehacer interdisciplinario le motivó a trabajar en la lógica matemática, la lingüística computacional y la inteligencia artificial, ya estando en la Universidad Estatal de Campinas, Brasil, fungió como Director del Instituto de Matemáticas, Estadística y Ciencias de la Computación. Ahí emanó la idea de generar la Maestría en la Enseñanza de Ciencias y Matemáticas.
Comenzó su participación en organismos académicos, se le nomina Vicepresidente Interamericano de Educación Matemática. Algo notable es que de fines de la década de los setentas a principios de los ochentas ayudó a fundar la Unión Matemática Africana, empujando a la generación de conocimiento al forjar la Sociedad Africana para el avance de la Ciencia. Al poco tiempo fue nominado Presidente de las Relaciones entre la Historia y Pedagogía de las Matemáticas, que denota el interés por los elementos culturales subyacentes en la enseñanza de las matemáticas, sobre todo en comunidades ágrafas y de poco desarrollo cultural, fomentando la investigación en los conocimientos matemáticos en distintos tipos de sociedades, culturas y en diferentes épocas históricas. En 1984 empezó a manejar las matemáticas como concepto holístico al juzgar que se relacionaban con la sociedad y la cultura general, al considerar cómo debía de articularse en un plan de estudios (Scott, 2021, p. 287).
El primer Congreso Internacional de Etnomatemáticas tuvo verificativo en Granada, España, en 1998. Con periodicidad cuatrianual han seguido desarrollándose los demás Congresos.
El impacto por la pedagogía y conocimiento matemático de orden cultural se expande y en 1985 es cofundador del Grupo Internacional sobre la Etnomatemática. Gracias a sus contribuciones a la Historia de las Matemáticas, en 2001 el Comité Internacional de Historia de las matemáticas le honra con el premio Kenneth O. May. Su aporte en materia de innovación en la educación matemática como campo de investigación, le vale el máximo galardón otorgado al gremio matemático, en 2005 recibe la Medalla Félix Klein (Rosa y Clark, 2021, p. 285).
Ante la pregunta que le formuló Blanco (2008, p. 22) durante la entrevista que le hizo en 2004, respecto a que si la etnomatemática formaba parte de la educación matemática. Ubiratán le respondió que es una manera de hacer educación matemática, ya que ésta es…

> …la preparación de generaciones, sea adultos, pero en general educación de menores, es la preparación para que aquellos que tengan un sentido de ciudadanía, de vivir en sociedad y al mismo tiempo desarrolle su creatividad…con ojos que miran distintos ambientes culturales. El trabajo no es pasar al alumno las teorías matemáticas existentes, que están congeladas en los libros para que él las repita, ¡No! Debe ser una práctica, una cosa viva, hacer matemática dentro de las necesidades

[1] https://es.wikipedia.org/wiki/Ubiratan_D%27Ambrosio. Consulta; 7 de abril de 2024

> ambientales, sociales, culturales, etcétera. Y dar espacio para la imaginación para la creatividad, entonces utiliza mucha literatura, juegos, cinema, todo eso, para ver en ellos componentes matemáticos, la lectura de periódicos, por ejemplo, todos los días deben de leer un periódico e identificar los componentes matemáticos del periódico, eso es muy rico. (Blanco, 2008, p. 22)

Noción Etnomatemática

Ubiratán falleció el 12 de mayo de 2021, representando una gran pérdida al conocimiento científico. Si bien 4 meses antes de su deceso, en el mes de febrero, había presentado una conferencia en el XI Simposio Internacional de Matemática, en la Universidad Antonio Nariño, en Medellín, Colombia, avocándose a explicar cómo es que llegó a la noción de etnomatemática y en qué consistía (D'Ambrosio, 2021, https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA).

A través de reflexiones de tipo ontológico y epistemológico, se parte de cuestionar el proceso mediante el cual se construye una forma de conocimiento que es común a todas las culturas y a todas las sociedades. Son tan importantes estos tipos de conocimientos, que sustancialmente son distintos y les distinguen de otros animales, que es lo que denomina etnomatemática. No se trata solamente de abordar el factor pedagógico, enfoca de tal manera las cosas que no se detiene en la enseñanza de la matemática. Hilbert Blanco saca tales conclusiones en una entrevista realizada en 2004 durante el VI Congreso de Historia de la ciencia y la Tecnología, celebrado en Buenos Aires, Argentina (Blanco, 2008, p. 21).

En realidad, a Ubiratán le preocupaba algo más de fondo: la **ubicación espacio-temporal**. No era exclusivo del homo sapiens, es algo que se iba gestando desde los homínidos, que no sólo toman lo que hay como tal, sino que buscaban el cómo hacer (antes de explicar el cómo se hace). Interesaba el cómo era el mundo, el planeta…el cosmos.

Eso sólo se puede lograr a través de contar (narrar), del *mitar* (de mito), del *contar explicando*, de las mitologías, que son las primarias explicaciones dadas de manera conveniente. Entonces se recurre a las nociones matemáticas, a fin de buscar verdades universales, verdades palmarias, tal como suena, tangible como la palma de la mano. Eso es lo que busca Ubiratán D'Ambrosio, son la ontología y la epistemología. Explicar cómo es que el hombre antiguo ubicaba el tiempo y el espacio para establecer las diversas etapas de su historicidad, de cuando dispone de herramientas para lograr su propia ubicuidad que lo pone como sujeto de la y de su historicidad. Ahora es menester establecer dichas etapas, de los momentos de sus logros, para ser sujeto ontológico.

Cantidad y Cualidad

La matemática es cualitativa, pues parte de la cualidad humana al formar parte de los cuerpos de conocimiento, que tienen como referencial las prácticas tanto cualitativas como cuantitativas, por separado o imbricadas. Es el caso -digamos- de las comparaciones, la ordenación, la clasificación, las inferencias, los códigos de medidas, los pesos y las cantidades (primero en números, luego en otros valores).

Se trata de conocimientos acumulados por miles de generaciones, que parten de sus respectivos ambientes naturales y culturales. Por ello es que la ***Etnomatemática es propia de una cultura***, no es posible hablar de la Matemática de una cultura.

Entonces Ubiratán recupera el verdadero origen de Mathema, de la Matemática, se trata de *Arte*, porque es invención. Los artesanos y agricultores, por mencionar algunas de las actividades más importantes, pero bien se puede incluir al clero y a la burocracia contable-administrativa que determinan las tributaciones, todos ellos hacen matemáticas alternativas. En ciertas sociedades también se puede incluir al cotidiano popular, en los mercados y las ferias, en las percepciones e ingresos de trabajadores y obreros.

El *Ciclo del Conocimiento* es el fundamento teórico que parte de un principio básico, el conocimiento no es fijo y está sujeto a una dinámica en la que la realidad y el conocimiento mismo brindan los elementos que ofrecen instrumentos intelectuales y materiales para que el conocimiento mismo sea renovado en cada momento y en cada generación, permitiendo inventar. Para ello se formula un programa de investigación a fin de que de forma integrada se genere investigación: a) la generación y producción de nuevo conocimiento, b) que este mismo sea organizado intelectual y socialmente, para que, c) sea trasmitido y difundido (D'Ambrosio, 2014, p. 101). Entonces caracteriza la metodología de investigación como de las tres etapas:

1. Pasar de prácticas ocasionales (ad hoc), de momento o casuísticas, de la cotidianidad, de coyuntura, a métodos que sean propios de la evolución del homo y de cada individuo
2. Las explicaciones son necesarias, pero deben de propender a la formación de métodos y a la elaboración de teorías.
3. Entonces se está en condiciones de pasar de la teoría a la invención y la innovación, ya que parte de las ciencias y de las predicciones.

Ubiratán fue más atrevido y visionario al proponer el fomento de la ficción, ya que daba rienda suelta al pensamiento y éste a la invención, haciendo preciso recurrir al ensayo. Entonces echa mano de la ficción empleando la metáfora, que la narrativa sirviera para nutrir el conocimiento, comportándose libre a la subordinación de valores y al rigor de la precisión. Así, la ficción impulsa el conocimiento como respuesta a estímulos complejos que provienen de la sociedad.

Sistemas de Conocimiento Cultural

La empresa de que una ciencia se reflexione a sí misma se denomina Filosofía de la Ciencia (como uno de los cuatro componentes de la Filosofía), al realizar sus antecedentes tiene que recurrir a la Historia. Entre ambas se ocupan de los cuerpos de conocimiento que fluyen para enriquecer los sistemas de conocimiento, que se expresan -a lo largo del tiempo- en las maneras de hacer los distintos y diferentes ambientes naturales y culturales. Por ello es que los sistemas de explicación y las maneras de hacer están en constante transformación, máxime que el encuentro de culturas propulsa los cambios.
Estas ideas fueron retomadas, fortalecidas y desarrolladas a partir de Reymond Wilder, quien en 1981 publicó su libro Matemática como sistema cultural. Es esta la manera de entender a la **Matemática como Sistema de Conocimiento Cultural**. Entonces es posible entender cómo es que, a partir de rituales, creencias, instrumentos materiales e intelectuales, compartidas por un grupo de personas, como parte de un sistema cultural, se comparten también el lenguaje y el idioma, nutriendo al conocimiento. De esta manera es posible romper la visión disciplinaria y dar nueva comprensión al tratarse de un conocimientos complejo e interdisciplinario. Al respecto Ubiratán expresa:
Las estrategias intelectuales propias del ser humano para pervivir son: observar, evaluar, comparar, ordenar, organizar, medir, cuantificar, crear representaciones (lo que es igual a modelo), ser curioso y explicar (que es igual a Mathema), inferir, eso es sacar conclusiones (igual a Lógica) (D'Ambrosio, 2021. https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA)
Se sirve de las representaciones que ocurren a nivel individual, acto seguido se socializan, el momento álgido del proceso es la integración como cultura de grupo. Ubiratán considera que las matemáticas y la educación matemática contribuyen a una civilización para todos; en ella no cabe la inequidad ni la intolerancia (Scott, 2021, p. 289).
Entonces vuelve a insistir en la tarea del historiador y del filósofo de la ciencia, ya que el humano busca siempre supervivir, con ello trascender en el espacio y el tiempo, le es consustancial a la naturaleza humana. Así, es posible encontrar la manera de hacer, de buscar y encontrar las explicaciones variadas en las distintas regiones del mundo con cada cultura.

Etimología y epistemología de una invención: Etnomatemática

La palabra Etnomatemática se integra por tres vocablos, que son -a su vez- tres representaciones. Por *etno* se comprende los diversos ambientes de tipo social, cultural, natural, pero también la naturaleza, entendiendo ésta como creación humana. En tanto la palabra thica, que procede de *techni y technos* (técnica, que parte del ingenio), como constitutivo de apoyo a las ciencias, ante todo a las *Artes*, técnicas, maneras, que es -como ingenio, como ingeniería- parte la matemática (Blanco, 2008, p. 21). *Mathema* como *explicar* (con y como curiosidad) entender, enseñar, manejarse, como procedimiento activo. Entonces propone ser un constitutivo de la teoría del conocimiento, en calidad de epistemología.
Patrik Scott (2021, p. 286) se refirió a Wilbur Mellena, quien aseguraba que había inventado la palabra en 1967 y la propaló en 1971. Ubiratán la empleó durante el Panel "por qué enseñar matemáticas", durante el Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática, en Karlsrube, Alemania, en 1976, su disertación fue publicada en 1979. En tal ocasión también sostuvo que hay diversas formas de hacer matemáticas por las diferentes culturas.
Ubiratán ofrece una mayor explicación a sus consideraciones para precisar que las técnicas dan lugar a los espacios de resguardo y de confort, al dar idea del *espacio* donde está (en pos de mejores condiciones y de temperatura, para el confort). Es de esta manera que el homínido y el homo sapiens se aproximan al espacio y su ficción, que los conduce a la geometría, para ser empleada en la satisfacción personal, de la gens, del clan, del grupo.
A la par. usa el *tiempo*, para migrar, recolectar, cazar y cosechar (ya en la modalidad de agricultura). De esta forma se ve compelido a emplear la cronología, entonces diseña y marca imaginativamente el tiempo. Es cuando configura creativamente la astronomía, que le permite crear calendarios, entonces está en posición de desarrollar la aritmética.

Transdisciplina, transcultura y transtemporalidad

Las nociones de Ubiratán D'Ambrosio surgen en un momento em que se combate la limitación propia de la disciplina como conocimiento fragmentado, sin desconocer sus aportes, se busca la necesidad de integrar el conocimiento científico, para ello hay que recurrir a la transdisciplina, pues es la única manera de comprender a los sistemas complejos, ya que se encarnan al enfoque holístico, por permitir la reflexión transdisciplinaria y la transculturalidad. Es el momento que Ubiratán recurre a la ficción, a la metáfora, a

la invención, entonces nos ofrece la transtemporalidad, que es ante todo una empresa y una historia humana, una historia humanista, pues comprende a todo el planeta. Realizar investigación no es tarea fácil, ya que se debe de comenzar a identificar, sistematizar, a generar conocimiento, pues detrás de las figuras, los triángulos, los círculos, dice D'Ambrosio, en su forma originaria, subyacen consideraciones de tipo religiosas y, por ende, teológicas (Blanco, 2021, p. 24). Como el caso de los antiguos altares vedas de los hindúes (1500 a 500 ac.). La intervención de la teología (como parte de la filosofía, de la lógica, de la estética, de la filosofía de la ciencia), de la matemática, de la filosofía, de la cultura, de la historia, de la sociología, la antropología, mueve a crear nuevos conceptos complejos, a moverse en el terreno de la transdisciplina, es que se tiene que recurrir a la transculturalidad para comprender los diversos casos que ayudan a establecer las características particulares y generales, para proponer y fundamentar sus leyes históricas. Todo ratifica la condición humana de la confección matemática como condición cultural.
Ubiratán es atrevido, es innovador. Él distingue la Historia manifiesta, que es producto de las fuentes académicas (archivística, positivista), que se ciñe a los valores dominantes; frente a ello lanza el reto de la Historia latente. Es la historia contenida en la Historia Oral, recuperada gracias a procesos metodológicos y hermenéuticos, ya que es producto de la tradición De ambas se tiene un registro diferencial, pero sobre todo hay que atender a la Historia latente que se halla resguardada y encarnada en las comunidades.
Es por eso que considera que la Etnomatemática es holística, es transdisciplinar, transcultural y transtemporal.

Conclusiones

Ubiratan D'Ambrosio confecciona a lo largo del tiempo, de sus 49 años restantes de vida, después de 1972, una metodología que se propone enriquecer, flexibilizar, tornando sencillo el conocimiento y manejo matemático, procurando el alcance pedagógico en la población.
Lejos de lo que suponen el emplazamiento no está en la enseñanza matemática, ésta es una vía para facilitar la tarea. Él mismo lo dice: es la investigación. Ello supone un objeto, que es el humano, la humanización, el factor transtemporal, por eso es que diserta sobre el homínido y el homo sapiens, en la manera que recurren al mito y a la ficción como explicación, a la teología como proceso para encontrar la sustantividad del secreto matemático que primero está en los viejos, en los sabios, en el chamán, en los augures (como en Roma antigua), para pasar a los aparatos administrativos, luego a la disertación filosófica y así va sucediendo la aventura humana que posa en los conceptos de espacio y tiempo, como base de las nociones aritméticas y geométricas
Ya con los conceptos es posible armar una teoría y su fundamento es el Ciclo del Conocimiento, que lo considera dialéctico, en dinamismo constante, para su renovación, por eso es indispensable la especulación, la invención. La metodología parte de tres principios: la generación y producción de conocimiento nuevo, que éste se organice intelectual y socialmente para ser trasmitido y difundido. Con esto es posible emprender las tres etapas de la investigación: 1) que la cotidianidad y la coyuntura pasen a métodos que reflejen la historicidad de la evolución del homo sapiens y de la sociedad, 2) las explicaciones deben de canalizar a la propuesta de métodos y de teorías (tal como lo ha propuesto a través de sus entrevistas, escritos y conferencias), 3) para ser congruentes con sus planteamientos, es preciso pasar de la teoría a la invención y a la innovación, partiendo de la ciencias y de las predicciones.
Lo único que ha hecho Ubiratan D'Ambrosio es aplicar el método científico y proponer consecuentemente a la comunidad académica y al público sus propuestas, nada menos que una teoría científica. Con una versión renovada de emancipación social.

Referencias Bibliográficas

Borba, Marcelo. 2023. *Conferencia: El legado de Ubiratan D'Ambrosio y la Etnomatemática*. Universidad de Lima. Perú. Agosto de 2023. https://www.ulima.edu.pe/en/node/25562
D'Ambrosio, Ubiratan. 2014. Bases conceptuales de Etnomatemática. En: **Revista Latinoamericana de Etnomatemática.** Vol. 7, N° 2, junio-septiembre de 2014. San Juan de Pasto, Colombia.
Fuentes Blanco Álvarez, Hilbert. 2008. *Entrevista al profesor Ubiratan D'Ambrosio*. En: **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**. Vol. 1, N° 1, febrero de 2008. San Juan de Pasto, Colombia.
La Etnomatemática como empresa matemática humanista. Conferencia de Ubiratan D'Ambrosio. 2021. Medellín Colombia. Febrero de 2021.
https://www.youtube.com/watch?v=1cIQs6kOKjA
Rosa, Milton y Daniel Clark Orey. 2021. *Ubiratan D'Ambrosio: el legado de una vida dedicada a la búsqueda de las matemáticas por la paz*. En: **Educación Matemática**. Vol. 33, N° 2, Agosto de 2021. Universidad de Guadalajara, México.
Sabina de Lis, José C. 2013. **Teoría de la Medida.** Universidad de La Laguna. Tenerife, España. https://josabina.webs.ull.es/Teoria%20de%20la%20medida/Curso_Teoria_Medida.pdf

Scott, Patrick. 2021. *La contribución intelectual de Ubiratan D'Ambrosio a las Etnomatemáticas*. En: **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. Número Especial. Costa Rica.
Ubiratán D'Ambrosio. https://es.wikipedia.org/wiki/Ubiratan_D%27Ambrosio. Consulta; 7 de abril de 2024.
Valle Miñón, Marcos. 2020. **Introducción al cálculo de variaciones**. España, Universidad de Cantabria. https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/20873/Valle%20Mi%C3%B1%C3%B3n%20Marcos.pdf?sequence=1&isAllowed=y#:~:text=El%20c%C3%A1lculo%20de%20variaciones%20es,valor%20de%20un%20cierto%20funcional. Consultado el 8 de abril de 2024.

Relación dialéctica entre la ética comunitaria y el desarrollo de pensamiento matemático

Rodolfo VERGEL

Programa de Doctorado Interinstitucional en Educación
Maestría en Educación
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
rvergelc@udistrital.edu.co

Introducción

Hablar de una relación de tipo dialéctico entre la ética comunitaria y el desarrollo de pensamiento matemático es actualmente de interés en la comunidad científica de la educación matemática. Si bien hasta hace pocos años podíamos hipotetizar que ciertas formas de relación social tenían una incidencia en el desarrollo del pensamiento matemático, en estos momentos encontramos varias investigaciones empíricas que nos permiten poner de manifiesto la relación íntima entre ellos.

El espíritu de esta conferencia se orienta a plantear algunas reflexiones educativas para el trabajo de aula de matemáticas que pongan de manifiesto la importancia de analizar ciertas formas de interacción y cooperación humana en el aprendizaje de las matemáticas. Para ello, en la primera sección, desde raíces filosóficas, abordo algunas consideraciones acerca del sujeto (estudiante, profesor), el desarrollo de subjetividades y el aspecto de lo social. De hecho, lo social aparece como una categoría clave en las investigaciones sobre la ética comunitaria. En la segunda sección presento un breve recorrido por la ética comunitaria y trato de vincularla con la idea de actividad, como la entendemos en la teoría de la objetivación (TO). Finalmente, abordo las principales investigaciones que han documentado el problema de la ética comunitaria y otras que hacen un esfuerzo por establecer una relación dialéctica entre este tipo de ética y las formas de pensamiento matemático.

Algunas consideraciones sobre el sujeto, el desarrollo de subjetividades y lo social

Conceptualizar el sujeto es necesario en tanto que esta categoría se encuentra a la base del tipo de relaciones sociales que se pueden generar. Resulta extraño identificar cómo las antropologías contemporáneas apelan poco a Hegel. Pero no solo esto. Dichas antropologías se quedan afincadas en un concepto de lo social muy débil y efímero, que Fischbach (2015) llama *asociativo.* Sostengo que esta categoría de sujeto que vehiculan algunas teorías es precisamente lo que las distingue. Por ejemplo, en los diferentes tipos de constructivismo, el sujeto es el sujeto kantiano (autónomo) que se produce así mismo; en la Teoría de situaciones didácticas, estaría un sujeto racionalista emancipado que se produce en el marco de las instituciones sociales según el sueño de las filosofías del Siglo de las Luces; en las nuevas aproximaciones teóricas acerca del embodiment, estaríamos predicando sobre un sujeto sensual (el sujeto del empirismo).

En Vergel (2024) discuto la posición hegeliana vs la posición de Marx frente al concepto de sujeto, destacando el avance significativo de la posición marxista frente a la hegeliana, sin desconocer que esta última logró avances importantes frente a los planteamientos de la filosofía clásica:

> El pensamiento hegeliano aporta una idea de sujeto que toma distancia de los planteamientos propuestos por la filosofía clásica en todas sus formas (racionalismo, empirismo, filosofía de la ilustración). Hegel (1955) reemplaza al sujeto individual, el ego de Descartes o de los empiristas, por un sujeto colectivo o al menos transindividual, un sujeto que no puede estar aislado, pues para vivir y sobrevivir debe entrar en relación con otros. (Vergel, 2024, p. 80)

Sin embargo, el pensamiento de Marx significó un progreso significativo con respecto al de Hegel. En Vergel (2024) planteo, en particular, que el pensamiento de Marx avanzó sobre el de Hegel en relación con la conceptualización de la idea de sujeto:

> indicando que este [el sujeto] no consiste en una especie de afirmación vaga, sino que supone, en cada ocasión, el análisis concreto de las relaciones económicas, sociales, intelectuales y

> afectivas en que participan los individuos que forman parte de él; relaciones que cambian, por supuesto, en el curso de la historia. (p. 81)

La idea de sujeto (estudiante, docente) que pretendo conceptualizar no es aquella que predica sobre el sujeto autónomo. Una de las razones está relacionada con que esto deja por fuera la idea del desarrollo de subjetividades, entendida como sujetos en proceso de fabricación, sujetos que se están produciendo permanentemente en un contexto histórico-cultural. Esto nos remite a la crítica que hacía el gran filósofo holandés Benedicto de Spinoza de lo simplificado que se puede ver el sujeto cuando éste se describe como *sustancia*, es decir, como algo que "es en sí y se define por sí", esto es, un sujeto autónomo (Espinoza, 2015), que no requiere de la presencia del otro para su existencia y desarrollo. Por el contrario, la idea que quiero defender aquí es que nosotros somos seres dependientes de otros y no podemos desarrollarnos al margen de los otros y de lo que piensan (Elias, 1990). Es lo que Spinoza llamaba *"modo de la sustancia"*, esto es, cada uno de nosotros es una realidad singular, individual y limitada por la sociedad (Espinoza, 2015), y es en la sociedad donde cada uno de nosotros encontramos los elementos a través de los cuales pensamos subjetivamente el mundo.

Como lo sostiene Sánchez (1977, p. 270), "lo social no es el producto de individuos; por el contrario, los individuos son un producto social". Hegel planteaba que, para encontrar su soporte fundamental, las plantas utilizan sus raíces, las cuales se extienden fuera de ellas mismas. Pues resulta que nosotros los seres humanos no somos tan diferentes. Lo que quiero expresar es que desde un punto de vista filosófico, nuestro soporte ontológico fundacional constitutivo se sitúa en nuestro exterior, esto es, en la cultura material y espiritual y en los otros individuos, lo cual sugiere que los individuos somos seres de necesidad, así como las plantas necesitan de la luz del sol para desarrollarse. Como bien lo plantea Elias (1990, p. 71), "El ser humano individual siempre está atado de un modo muy determinado por su interdependencia con otros".

La idea de sujeto autónomo, como aquel individuo que es su propio fundamento, ya desarrollado, ya completado, que ya no tiene nada más que aprender, y que se constituye como fundamento del mundo, va en contravía de aquella idea de sujeto como *categoría relacional y en flujo constante*. Por ejemplo, el docente que todos los días se pone a riesgo (otra cosa es que no lo queramos reconocer) es precisamente un sujeto que se produce cotidianamente en la historia, y es por ello que él sólo existe y se realiza en la historia, es decir, se *humaniza* en la historia (Kosic, 1979).

Por lo tanto, es imposible teórica y pragmáticamente una escisión entre el individuo y su marco socio-histórico o la sociedad. Al decir de Adolfo Sánchez:

> La sociedad no existe al margen de los individuos concretos, ni estos existen fuera de la sociedad y sus relaciones sociales. Quienes actúan materialmente, en la práctica, son individuos concretos, y las relaciones sociales son las formas necesarias a través de las cuales se desarrolla su actividad. Y precisamente porque se desarrolla en estas formas, la praxis individual se integra en una praxis común cuyos resultados trascienden los fines y resultados de la acción individual. (Sánchez, 1977, p. 271)

Desde un punto de vista educativo, difícilmente podríamos argumentar la idea según la cual *"todo se origina en el individuo",* y que la historia y la cultura existen, pero como aspectos periféricos o como meras curiosidades intelectuales, no como *categorías orgánicas* en las explicaciones de las formas en que nuestros estudiantes llegan a aprender y a ser. Afirmar que todo emana del sujeto no es otra cosa que aceptar que el individuo se afirmó cada vez más como su propio fundamento y el fundamento de la sociedad. Es lo que el gran filósofo Gilles Lipovetsky llamó el *proceso de personalización*, es decir, un proceso que "ha promovido y encarnado masivamente un valor fundamental, el de la realización personal" (Lipovetsky, 2000, p. 7), y que se conjuga con una nueva cultura del individuo que celebra los deseos hedonistas y psicológicos de autonomía, de realización y expresión personales (Lipovetsky, 2016). En este sentido, lo histórico aparece como algo separado de la vida ordinaria. Entendemos aquí que la historia se despliega a través del desarrollo necesario de determinadas configuraciones sociales, de su movimiento (Marx, 1981).

Desde nuestra perspectiva teórica, somos, claramente, sujetos históricos, esto es, sujetos de labor y de producción social e intelectual. No quiero restar importancia al hecho que los estudiantes son sujetos cognitivos, pero el problema que yo veo es reducir el sujeto sólo a su dimensión cognitiva, lo cual posibilita el riesgo de alienarlo de la historia y la cultura de la clase y confinarlo a su nicho solipsista. Como sostiene Marx (1981):

> El hombre así, por más que sea un individuo particular (y justamente es su particularidad la que hace de él un individuo y un ser social *individual* real), es, en la misma medida, la

> *totalidad,* la totalidad ideal, la existencia subjetiva de la sociedad pensada y sentida para sí.[1] (p. 147)

Es por ello que, para decirlo una vez más, no puede pensarse al sujeto ajeno a la sociedad. De hecho, las opiniones de los hombres ya están socialmente condicionadas y determinadas a través del hecho fundamental de que el individuo humano es la obra de la sociedad, "un conjunto de relaciones sociales" (Schaff, 1965, p. 122). En este sentido, "las consideraciones "solitarias" del individuo están conformadas y controladas socialmente. Por tanto, el individuo siempre otorga y disfruta, en determinado sentido, del consejo social" (Schaff, 1965, p. 123).

Un breve recorrido por la ética comunitaria y su conexión con la actividad

Sobre la ética comunitaria en la TO

En la sección anterior discutí la categoría de sujeto y la preferencia por una idea de sujeto afincada en un contexto social e histórico, desde donde podemos pensar en una entidad en flujo constante, una entidad histórico-cultural. Esto significa un individuo que permanentemente se está produciendo en una cultura, una subjetividad en proceso de fabricación. "Desde un punto de vista socio-histórico, la individualidad no es el punto de partida; es algo que el hombre ha conquistado y enriquecido en un proceso socio-histórico" (Sánchez, 1977, p. 270).

Ahora bien, es claro que no es posible pensar en las formas de relación social al margen de los individuos. "La individualidad, y las formas en que los individuos se relacionan entre sí están condicionadas social e históricamente" (Sánchez, 1977, p. 270). En otras palabras, la ética como forma de la alteridad (Radford, 2021) no opera independientemente de la historia y la cultura. De hecho, las *relaciones sociales* pueden adoptar la forma de inter-acción, colaboración, comunicación, instrumentación, etc. Sin embargo, al mirar detenidamente, estas aparecen en el marco de una concepción débil de lo social. He aquí una dimensión de lo dialéctico con respecto a las relaciones sociales. Estamos hablando de una concepción de lo social que se importa de la sociedad al aula de clases de matemáticas, reflejada en las actitudes éticas de estudiantes y profesores caracterizadas por concepciones fuertemente individualistas, instrumentalistas, contingentes y arbitrarias de las relaciones sociales que se tejen. Este tipo de ética necesariamente afecta la forma en que alumnos y profesores se afirman y se desarrollan como subjetividades matemáticas. En la TO no es esta la ética que nos interesa y de la que nos preocupamos por promover. No es la idea posmoderna de la ética afincada en la concepción moderna de lo social como un agregado de individuos, átomos o agentes monádicos autoconstituidos (Sánchez, 1977). Como sostienen D´Amore y Fandiño Pinilla (2005), el reconocimiento de los distintos espacios éticos es una acción clave para entender que no somos tan eurocéntricos.

Como podemos derivar, el asunto de la *interacción social o formas de cooperación humana* es un asunto capital en esta discusión. Desde la TO abogamos por un tipo o forma de relación social que haga posible la convivencia y la solidaridad y no la simple competencia, no se trata de la búsqueda egoísta de fines individualistas, sino la participación en lo que Hegel llamaba un bien general o una obra común (Hegel, 2001; Mas, 2015). Estamos hablando de una ética de orientación comunitaria (Radford, 2021) conformada por la *responsabilidad* (unión, nexo, vinculación, conexión y enlace con el prójimo, que se expresa en la respuesta que hacemos al llamado del otro) que proviene de la mera presencia de lo que no somos nosotros mismos. Por otra parte, tenemos el vector *compromiso hacia los demás*, vector o componente (o virtud según algunos filósofos) entendido como la promesa y su aplicación de hacer todo lo posible, en el transcurso de la labor conjunta, en la realización de lo que Hegel (2001) llamaba la "obra común". Y el tercer vector o componente de esta ética comunitaria es el *cuidado del otro*, entendido como una forma de estar-con-otro. El cuidado del otro requiere la constitución de sensibilidades o capacidades humanas, en particular, la sensibilidad de la atención y del reconocimiento del otro y sus necesidades (Marx, 1981). Es una idea que destaca nuestro posicionamiento con-el-otro. Mientras que la responsabilidad se tipifica como un vector ontológico, el compromiso hacia los demás y el cuidado del otro son vectores que están orientados más hacia lo comunitario, de tal forma que los tres se complementan y forman lo que en la TO llamamos un espacio ético.

La idea de actividad desde la TO

---

[1] Cursivas en el original.

Como pregonamos en la TO, la calidad del aprendizaje matemático está correlacionada con la calidad y naturaleza de la actividad. Leont'ev (1978) sostenía que una actividad se caracteriza por su objeto/motivo, es decir, el objeto hacia el que convergen las acciones de los individuos. No obstante, quedarnos en el nivel del objeto/motivo pareciera que nos detuviera en la comprensión de lo que puede ocurrir en la actividad. Por ello, intentamos avanzar en identificar qué es lo que ocurre al interior de la actividad. De esta manera, encontramos que hay dos componentes organizativos entrelazados dialécticamente que nos informan más profundamente sobre la naturaleza y materialidad de la actividad: (i) las formas de interacción y cooperación humana, y (ii) las formas de participación. El primer componente hace referencia a un *espacio social*, en tanto que nos interesa las formas de relación con el otro, los co-posicionamientos, el poder, las emociones, etc. Por su parte, el segundo componente, que podemos llamar el *espacio epistemológico*, se refiere a las maneras como se producen y circulan las ideas matemáticas en el aula.

Tal y como lo he expresado, la actividad que puede desarrollar un profesor con sus estudiantes se caracteriza por la búsqueda de un *objeto*, el objeto de la actividad. Es este objeto el que anima o motiva la acción del profesor y de los estudiantes. Pero ¿cuál es el objeto? Es un objeto histórico-cultural, un objeto ideal, un saber, que se revela a la conciencia de los estudiantes *durante la actividad*. Esta idea de actividad o *praxis* tiene un sustrato filosófico, pues es a través de la praxis que ocurre “la máxima expresión del proceso de transformación de la conciencia del hombre como un ser social” (Sánchez, 1977, p. 11).

¿Qué dicen las investigaciones?

Está claro que transformar el funcionamiento de una clase de matemáticas es un asunto complejo. Los estudiantes tienen una historicidad que los supedita a unas formas individualistas e instrumentalistas de interacción social. Más específicamente, reconocemos que la transición de formas utilitaristas o individualistas de relación con el otro a formas de carácter ético-comunitario como las que intentamos propiciar en la TO y en nuestras investigaciones escolares presenta muchas dificultades. Sin embargo, en las investigaciones empíricas ha habido intentos de avanzar hacia unas formas de relación que sean *verdaderamente sociales* como opuesto a lo *solamente asociativo* (Fischbach, 2015) y su conexión con la transformación (sofisticación) del pensamiento matemático.
Las diversas investigaciones empíricas han venido confirmando de más en más que estos componentes de la ética comunitaria no son producto de una evolución natural; más bien, estas formas de relación al otro, o formas de la alteridad, deben ser reconocidas o identificadas por los individuos en la práctica social concreta y para que ocurra esto se hace necesario crear ciertas condiciones a través de las cuales transformar las formas de alteridad en el aula. Las evidencias científicas sugieren la existencia de una relación estrecha entre las formas de interacción y cooperación humana y la posibilidad de conferir sentido a los sistemas de pensamiento matemático (formas de pensamiento proporcional, procesos de generalización, formas de pensamiento algebraico), aspectos estos que ocurren en el marco de una actividad. Más específicamente:

(i) La investigación de Lasprilla, León y Radford (2021) muestra que la ética comunitaria que propone la TO en la cual, en particular, la responsabilidad apunta hacia la realización comunitaria, no aparece de manera natural. Los autores plantean que es compromiso del sistema educativo y, en particular, de nosotros como profesores, propiciar que los modos de interacción social en el aula se encaminen hacia lo solidario, lo colaborativo, lo humano y que posibiliten la práctica de una “vida buena”. La investigación también llama la atención en el sentido de que la comprensión de aquellas condiciones que permiten hacer emerger formas éticas más inclusivas, que se muevan más allá de la ética del interés propio y que apunten hacia la “vida buena” comunitaria, queda todavía por ser realizada.

(ii) Lasprilla, Radford y León (2021) documentan el esfuerzo de una profesora de primaria para conformar una tarea matemática sobre generalización de secuencias cuyo objeto era llevar a los estudiantes a proponer ideas para ser discutidas colectivamente, acción que se enmarca en el eje de las formas de colaboración humana. Un resultado importante de la investigación refiere a que en las interacciones mostradas por las estudiantes fue posible identificar rastros de responsabilidad, de cuidado del otro y de compromiso en el trabajo conjunto, llamando la atención en que la emergencia de formas de interacción colaborativas y caracterizadas por la ética comunitaria requieren tiempo de desarrollo y no emergen de manera natural, es decir, por sí solas no darán muestras en un salón de clases, y que por el contrario requieren de un trabajo conjunto entre profesores y estudiantes.

(iii) En las evidencias científicas analizadas en Vergel y León (2024), se identifica una evolución de la actividad de clase de matemáticas desde una concepción individualista y egocentrista hacia una actividad que empieza a dar signos de una labor conjunta. Esto significa que los estudiantes empiezan a ofrecer sus voces, pero también encuentran otras voces, formas de hacer y pensar, una otredad que los lleva a replantear sus propias ideas. La investigación también documenta que la relación con el otro va cambiando, desde una forma en la que el otro es un instrumento para avanzar en sus propias cavilaciones –una relación de tipo utilitarista–, hacia una relación que empieza a presentar características de tipo ontológico y ético. Este tipo de relación confirma lo que en la TO sostenemos en términos de que la transformación histórico-cultural del individuo está siempre fundada en su relación con el otro y, principalmente, en la idea de que esta relación no es un mero acto contingente de conveniencia (no es utilitarista, no es coyuntural, no es instrumental), sino más bien un tipo de relación en el que la presencia del otro me incumbe y transforma. El análisis de las evidencias sugiere que la obra común (Hegel, 2001), expresada a través de formas de pensar proporcionalmente desde los patrones numéricos, proporcionales y no proporcionales, empieza a aparecer.

(iv) En Joya y Vergel (2024), a través de un análisis de tipo multimodal para investigar el posicionamiento de los docentes y estudiantes, logramos identificar que en y a través del uso del lenguaje de una profesora y un grupo de estudiantes de quinto de primaria (9-10 años) y en el esfuerzo que realizan para hacerse comprender, se refleja lo que en la TO diríamos una expresión del cuidado del otro. También identificamos un compromiso con el trabajo conjunto pues la evidencia analizada sugiere que tanto la profesora como los estudiantes despliegan un esfuerzo por construir una obra común asociada con el tipo de matemáticas que está emergiendo en la discusión. En este sentido, reconocemos que propiciar las condiciones para la emergencia de la actividad en tanto labor conjunta repercute en la evolución del pensamiento algebraico, toda vez que los sujetos se encuentran en constante transformación y son profundamente afectados por el entorno. Destacamos que el abordaje realizado por los estudiantes en compañía de la profesora hace posible la realización individual y colectiva, rompiendo las barreras de la alienación y dando a los sujetos la posibilidad de establecimiento de una consciencia libre, en la que a partir de su propia experiencia encuentran formas culturales de ser y hacer.

(v) En Moreno y Vergel (2024) documentamos una visión de cómo propiciar la colaboración humana desde la TO, a partir de un proceso de construcción colectiva del conocimiento en el aula. Estas formas de colaboración que emergen en una actividad matemática no alienante incluyen la consideración y evolución de un sujeto particular (histórico-cultural), un tipo de actividad desarrollada (orientada hacia la labor conjunta) y una relación precisa entre los individuos y el saber producido mediante la actividad.

(vi) La ética comunitaria debe ser considerada como un elemento de gran relevancia en la educación matemática, lo cual sugiere la necesidad de considerar a nivel investigativo la presencia de los vectores que la caracterizan y la incidencia de estos en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante. En lo que respecta a la generalización de patrones, en Bayona y Vergel (2025) aportamos evidencias empíricas de cómo inciden los vectores de la ética comunitaria en la evolución de los procesos de generalización que realizan los estudiantes.

Referencias Bibliográficas

Bayona, L. & Vergel, R. (2025). La configuración de los vectores de una ética de orientación comunitaria y su repercusión en el surgimiento de generalizaciones aritméticas sofisticadas y generalizaciones algebraicas. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 39, e220231*

D'Amore B. & Fandiño Pinilla M.I. (2005). Historia y Epistemología de la Matemática como bases éticas universales. Un homenaje a Ubiratan D'Ambrosio. *Acta Scientiae, 7*(1), 7-16.

Elias, N. (1990). *La sociedad de los individuos.* Ediciones Península.

Espinoza, L. (2015). *Spinoza.* RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales.

Fischbach, F. (2015). *Le sens du social: Les puissances de la coopération.* Lux Éditeur.

Hegel, G. (1955). *Lecciones sobre la historia de la filosofía I.* Fondo de Cultura Económica.

Hegel, G. (2001). *The philosophy of history.* Batoche Books. (Original work published 1837).

Joya, S. & Vergel, R. (2024). Una aproximación a la labor conjunta: análisis de una situación sobre relación funcional. En C. Noronha, S. Takeco y L. Radford (Organizadores), *Teoria da Objetivação. Pesquisas em Educação Matemática e em Educação em Ciências* (pp. 23-41). Editora Livraria da Física.

Kosic, K. (1979). *Dialéctica de lo concreto.* Grijalbo.

Lasprilla, A. (2021). Analysis of the vectors of community ethics in a mathematics teaching-learning activity. *La matematica e la sua didattica, 29*(2), 123-143.

Lasprilla, A., León, O. L., & Radford, L. (2021). Formas de interacción social y aspectos éticos en actividades matemáticas escolares. En L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: entre educación y filosofía* (pp. 211-232). Universidad de los Andes.

Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC*, *16*(39), 228-245.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentice-Hall.

Lipovetsky, G. (2000). *La era del vacío. Ensayos sobre el individualismo contemporáneo*. Editorial Anagrama.

Lipovetsky, G. (2016). *De la ligereza*. Editorial Anagrama.

Marx, K. (1981). *Manuscritos: economía y filosofía.* Alianza Editorial.

Mas, S. (2015). *Hegel*. RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales.

Moreno, R. & Vergel, R. (2024). Condiciones para una actividad matemática no alienante en quinto grado de educación primaria. *Revista Chilena de Educación Matemática*, *16*(2), 26-42.

Radford, L. (2021). La ética en la teoría de la objetivación [Ethics in the theory of objectification]. In L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre educación y filosofía* (pp. 107-141). Universidad de los Andes.

Sánchez, A. (1977). *The philosophy of praxis.* International Library of Social and Political Thought.

Schaff, A. (1965). *Filosofía del hombre*. Grijalbo.

Vergel, R. (2024). Signo, lenguaje, sujeto y alteridad. En R. Vergel y L. A. Bohórquez (Eds.), *Investigaciones fundamentadas en algunas teorías de la educación matemática* (pp. 65-90). Universidad Distrital Francisco José de Caldas-Editorial UD.

Vergel, R. & León, R. M. (2024). Las repercusiones de las formas de colaboración humana no alienantes en la emergencia del pensamiento proporcional. *Paradigma*, *45*(2), 1-23. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024004.id1577

Competencias argumentativas en la formación del profesorado de matemática

Marcos BARRA BECERRA

Universidad Alberto Hurtado
mbarra@uahurtado.cl

Resumen

Esta disertación presenta los resultados preliminares de un estudio en torno al levantamiento de componentes claves para el desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar en la enseñanza de la matemática escolar en Chile, para su transferencia a la formación inicial del profesorado de matemática. A través de un análisis documental sobre los requerimientos del Currículo Escolar Chileno y de una caracterización de los conocimientos profesionales de docentes en ejercicio en torno a la habilidad de argumentar, se identifican como resultados preliminares la necesidad de clasificar actividades que promuevan habilidades precursoras de la argumentación y categorizar los roles que se atribuyen a los procesos de desarrollo de argumentos en el aula.

Palabras clave: Habilidad de argumentar y comunicar. Componentes claves. Transferencia. Formación inicial el profesorado de matemática.

Antecedentes

El desarrollo de la competencia argumentativa ha sido ampliamente reconocido como un componente esencial del pensamiento matemático, especialmente en el contexto de la enseñanza y el aprendizaje escolar. La argumentación en matemática no solo permite a los estudiantes construir y evaluar afirmaciones (Goizueta, M. y Planas, N., 2013), sino también fortalecer su capacidad de razonar, justificar y comunicar ideas de manera lógica y coherente. En este sentido, se considera un eje fundamental para una comprensión profunda de los contenidos y para el desarrollo del pensamiento crítico.

En el contexto de la formación inicial del profesorado de matemática, la relevancia de esta competencia se vincula con la necesidad de preparar a los futuros docentes no solo en términos del dominio de contenidos matemáticos, sino también en su capacidad de guiar procesos de enseñanza que fomenten la argumentación en el aula. Diversas investigaciones internacionales han puesto énfasis en la importancia de formar docentes que comprendan la naturaleza de la argumentación matemática y que puedan generar oportunidades para su desarrollo en el aula (Solar, 2018; Cuervo y Mora, 2018; Goizueta y Planas, 2013).

En el caso chileno, el Currículum Nacional de Matemática establece, desde 7° básico hasta 4° medio, una serie de habilidades vinculadas a la comunicación y argumentación, tales como "formular conjeturas y validarlas", "argumentar y comunicar conclusiones", y "evaluar razonamientos". Estas habilidades aparecen de manera transversal en los Objetivos de Aprendizaje y representan un desafío constante para el sistema educativo. Sin embargo, estudios como los realizados por Valbuena, Muñiz y Berrio (2020), se ha observado que existen confusiones conceptuales tanto en docentes como en estudiantes respecto de lo que significa argumentar en matemática, lo cual limita el desarrollo efectivo de esta competencia.

Respecto a la formación inicial del profesorado, los Estándares de la profesión docente para Carreras de Pedagogía en Matemática en Educación Media (CPEIP, 2021) destacan la importancia de que los futuros docentes sean capaces de desarrollar habilidades para el siglo XXI, promoviendo el pensamiento crítico integrando procedimientos de análisis, indagación y la discusión matemática generando espacios para la argumentación y el razonamiento en sus futuros estudiantes. Para ello, es fundamental que comprendan la naturaleza de la argumentación y sean capaces de promoverla de manera intencionada en sus prácticas docentes.

Propósito de la investigación

El propósito de esta investigación es levantar componentes clave para el desarrollo de la habilidad de argumentar y comunicar en la enseñanza escolar de la matemática, a partir de dos fuentes fundamentales: (1) los requerimientos del Currículum Nacional Chileno de Matemática y (2) los conocimientos profesionales de profesores de matemática en ejercicio respecto del desarrollo de dicha habilidad.

El último objetivo es transferir estos componentes clave a la formación inicial del profesorado de matemática, favoreciendo así el diseño de experiencias formativas centradas en la competencia argumentativa. Se busca, de este modo, fortalecer el vínculo entre la formación universitaria y las demandas del contexto escolar, propiciando un enfoque más reflexivo y didácticamente fundamentado sobre la enseñanza de la argumentación en matemática.

Marco referencial

La argumentación en matemática no surge de forma espontánea; requiere de un proceso de desarrollo que considere explícitamente el trabajo con habilidades precursoras. Estas habilidades constituyen etapas fundamentales que permiten construir una base sólida para el pensamiento argumentativo. A continuación, se describen las principales habilidades precursoras según lo propuesto por Planas y Morera, 2012:

- Narrar: Implica organizar y secuenciar información relevante para llegar a una conclusión. Esta habilidad se evidencia cuando los estudiantes explican qué elementos consideraron o cómo procedieron para resolver una tarea, permitiendo una primera aproximación a la estructuración del discurso matemático.

- Describir: Consiste en identificar y nombrar elementos que forman parte de un suceso, conjunto o situación matemática. Esta habilidad permite clarificar el contexto del problema y centrarse en los objetos matemáticos involucrados, siendo clave para avanzar hacia explicaciones más profundas.

- Explicar: Requiere que los estudiantes expliciten sus procedimientos, razonamientos y decisiones. La explicación implica una mayor elaboración que la narración o la descripción, ya que demanda justificar la pertinencia de cada paso realizado.
- Justificar: Supone un nivel superior de elaboración argumentativa. Al justificar, los estudiantes no solo exponen lo que hicieron, sino que entregan razones que respaldan sus procedimientos, considerando también posibles contraargumentos o excepciones.
- Argumentar parcialmente: Esta habilidad implica expresar secuencialmente las razones que sustentan una conclusión, incluyendo datos y evidencias que validen cada afirmación. Si bien no constituye aún una argumentación formal completa, permite acercarse al tipo de razonamiento esperado en la práctica matemática escolar.

Este proceso puede ser analizado a la luz del modelo de argumentación propuesto por Toulmin (1958), el cual distingue entre datos (evidencias), garantías (reglas que conectan datos y conclusión), respaldos (justificación de las garantías), y refutaciones (contraargumentos). Este modelo resulta útil para evaluar el nivel de sofisticación en las producciones argumentativas de los estudiantes, así como para diseñar estrategias didácticas que apunten a su desarrollo.

Metodología

La metodología de esta investigación se estructura en tres etapas complementarias que combinan análisis documental y recolección de información cualitativa:

Etapa 1: Análisis documental del Currículum Nacional de Matemática (3° básico a 4° medio). Se realiza una revisión sistemática de los Objetivos de Aprendizaje y los indicadores de evaluación, identificando y codificando aquellos componentes que promuevan el desarrollo de la argumentación o de sus habilidades precursoras.

Etapa 2: Entrevistas semiestructuradas a docentes de matemática en ejercicio. Se diseñan guías de entrevista focalizadas en explorar el conocimiento profesional docente respecto a la argumentación matemática. Las preguntas indagan sobre el significado que los docentes atribuyen a la argumentación, las estrategias que utilizan para promoverla, su diferenciación entre las habilidades precursoras de la habilidad de argumentar.

Etapa 3: Análisis cualitativo y triangulación de datos. Se realiza un análisis temático del contenido de las entrevistas y se cruzan los hallazgos con los resultados del análisis curricular. Este cruce permite identificar patrones comunes, discrepancias y categorías emergentes que nutren la construcción de una propuesta de componentes clave para el fortalecimiento de la formación inicial del profesorado.

Resultados iniciales

Los hallazgos preliminares permiten observar una serie de desafíos significativos en relación con la enseñanza de la argumentación matemática en el sistema escolar chileno. En primer lugar, se constata una escasa planificación intencionada de actividades que fomenten la argumentación o sus habilidades precursoras. Muchos docentes reconocen la importancia de estas habilidades, pero no logran integrarlas de forma sistemática en sus prácticas al interior del aula.
Además, se detecta una confusión recurrente entre habilidades como explicar y justificar. Algunos docentes tienden a considerarlas sinónimas, sin identificar las diferencias epistemológicas que las distinguen. Esta falta de claridad incide negativamente en la forma en que se promueve el razonamiento matemático en el aula.
Un hallazgo especialmente relevante es la necesidad de trabajar explícitamente con los roles de la argumentación en el aula. Una clasificación tal permitiría orientar el diseño de actividades específicas que aborden habilidades precursoras particulares, favoreciendo un desarrollo más progresivo y significativo de la habilidad de argumentar. Asimismo, se sugiere que la formación docente debe incorporar espacios de reflexión y análisis de experiencias de aula que visibilicen estos distintos usos de la argumentación.

Conclusiones

Los resultados iniciales de esta investigación ponen de manifiesto la necesidad urgente de fortalecer la formación docente en torno a la habilidad de argumentar y comunicar. Aunque el Currículo Escolar Chileno

explicita esta habilidad como uno de los aspectos prioritarios, su implementación efectiva en el aula requiere de docentes que comprendan su naturaleza, reconozcan sus etapas de desarrollo, y sean capaces de planificar y diseñar actividades acordes.
Para responder a este desafío, se propone integrar en la formación inicial del profesorado experiencias que aborden de manera progresiva las habilidades precursoras de la argumentación, articuladas con los distintos roles que esta puede asumir en el aula. La incorporación de modelos teóricos como el de Toulmin, así como el análisis de casos reales, puede contribuir significativamente al desarrollo profesional docente.
Este trabajo constituye un primer paso hacia la elaboración de una propuesta formativa más sólida, capaz de transformar la enseñanza escolar de la matemática en una práctica más reflexiva, crítica y argumentativa, alineada con los desafíos del siglo XXI.

Referencias bibliográficas

CPEIP (2021). *Estándares De La Profesión Docente Carreras De Pedagogía En Matemática Educación Media*.

Cuervo, D. P. L., & Mora, M. C. G. (2018). *El proceso de argumentación en la formación inicial de docentes: una experiencia mediada por Dígalo y Simas*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Goizueta, M. y Planas, N. (2013). El papel del contexto en la identificación de argumentaciones matemáticas por un grupo de profesores. *PNA*, *7*(4), 155-170.

Planas, N., & Morera, L. (2012). La argumentación en la matemática escolar: dos ejemplos para la formación del profesorado. *El desarrollo de competencias en las clases deficiencias y matemáticas*, 275-300.

Solar-Bezmalinovic, H. (2018). Implicaciones de la argumentación en el aula de matemáticas. *Revista Colombiana de Educación*, (74), 155-176.

Toulmin, S. (1958). *The Uses of Argument*. Cambridge University Press.

Valbuena Duarte, S., Muñiz Márquez, L. E., & Berrio Valbuena, J. D. (2020). El rol del docente en la argumentación matemática de estudiantes para la resolución de problemas. *Revista Espacios*, *41*(09), 9-21.

Modelización matemática y ABP.
Una oportunidad para enseñar matemática para el siglo XXI

Gabriel Rubén SOTO

Grupo de Investigación en Matemática Aplicada y Educativa (GrIMAE)
Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud
Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco
gsoto@unpata.edu.ar

Resumen

La modelización matemática (MM) y el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) comparten la característica formar parte de metodologías activas de aprendizaje y abordar problemas del mundo real. La MM se distingue de la simple resolución de problemas al exigir una construcción formal de modelos que representen situaciones complejas, fomentando el pensamiento crítico, la toma de decisiones y la alfabetización informacional. A lo largo del texto se destacan las etapas del proceso de modelización y sus características distintivas, como la apertura, la complejidad y el realismo. Asimismo, se discute la integración del ABP como un enfoque metodológico para la enseñanza de la MM en cursos de alta matrícula, enfatizando su potencial para desarrollar competencias clave del siglo XXI. Finalmente, se argumenta que la combinación de MM y ABP no solo mejora la experiencia de aprendizaje en cursos de matemática para no matemáticos de alta matrícula, sino que también fortalece la preparación de los estudiantes para enfrentar desafíos en entornos profesionales dinámicos e interdisciplinarios.

Palabras clave: Modelación matemática. Aprendizaje basado en proyectos. Enseñanza de modelización matemática en cursos de alta matrícula. Enseñanza de la matemática para no matemáticos. Competencias blandas.

¿Cuál es el problema?

> “En definitiva, solo la vida educa, y cuanto más se arraigue la vida, el mundo real, en la escuela, más dinámico y sólido será el proceso educativo. Que la escuela haya estado encerrada y amurallada como si fuera una valla alta, lejos de la vida misma, ha sido su mayor defecto. La educación es tan insignificante fuera del mundo real como un fuego sin oxígeno o como respirar en el vacío”. (Lev Vygotsky)

Los cambios socioeconómicos de las últimas décadas, junto con la irrupción de las computadoras y el vertiginoso desarrollo de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC), nos obligan a reflexionar de manera continua sobre los objetivos y propósitos de las disciplinas que integran la formación inicial de profesionales en la educación universitaria. El avance incesante de las TIC, además de difuminar las fronteras entre distintas áreas del conocimiento, ha evidenciado la necesidad de contar con profesionales capaces de utilizar herramienta matemáticas para resolver problemas desde perspectivas multidisciplinarias, interdisciplinares o transdisciplinares, considerando los aspectos éticos, sociales y culturales involucrados (Engelbrecht y Borba, 2023). Estas capacidades, denominadas competencias blandas o del siglo XXI, son cada vez más relevantes en el ámbito profesional.

Maggio (2018) sostiene que las conceptualizaciones sobre las competencias blandas provienen de los desarrollos en psicología cognitiva, teorías del aprendizaje y pedagogía del siglo XX. Entre estos avances se encuentran los enfoques del aprendizaje como un proceso activo basado en la interacción social y las teorías del pensamiento crítico y la resolución de problemas. Estas nociones adquieren hoy una nueva urgencia en un mundo tecnológico y globalizado. La evidencia sugiere que los modelos tradicionales de enseñanza son rígidos, fragmentados y de corto alcance, y no resultan suficientes para formar sujetos flexibles, críticos e innovadores (Cobo y Moravec, 2011). Además, el uso intensivo de recursos digitales ha transformado la noción de espacio y tiempo, así como el currículo y la evaluación (Maggio, 2023). Estos cambios impulsan la necesidad de modelos pedagógicos basados en el aprendizaje continuo y la evaluación formativa, que no solo promuevan la adquisición de contenidos disciplinares, sino también el desarrollo de competencias del siglo XXI (Blinkey y otros, 2012).

La integración de la Modelización Matemática (MM) y el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) en el diseño de estrategias de enseñanza, ofrecen una oportunidad para concebir la matemática como una herramienta para formar profesionales capaces de abordar problemas complejos desde perspectivas multidisciplinarias, éticas y socialmente responsables. No obstante, implementar la MM a través del ABP en cursos de alta matrícula plantea desafíos considerables, desde la resistencia institucional hasta las limitaciones de los sistemas de evaluación. Sin embargo, el avance de las tecnologías digitales ofrece nuevas oportunidades para diseñar metodologías innovadoras que favorezcan la participación activa y el aprendizaje significativo.

En este artículo, se analiza la convergencia entre el ABP, la MM y las tecnologías digitales en cursos de matemáticas para la formación inicial de profesionales en ciencias de la salud con alta matrícula, en la Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco.

Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) se originó en 1969 en la Escuela de Medicina de la Universidad McMaster como respuesta a las limitaciones del modelo tradicional de enseñanza basado en conferencias magistrales (Servant-Miklosa, 2019). En sus inicios, no fue concebido dentro de un marco teórico estricto, sino como una solución pragmática a las necesidades de formación en medicina. Con el tiempo, este modelo se ha convertido en un referente en la educación en ciencias, siendo algunas de sus características: aprendizaje colaborativo y social; el problema como eje del aprendizaje; reducción de la instrucción directa y fomento del pensamiento crítico; evaluación formativa y retroalimentación continua.

Desde su aparición como metodología activa de aprendizaje, el ABP ha dado lugar a diversos enfoques y perspectivas, como el aprendizaje basado en proyectos (ABPr), el aprendizaje basado en el diseño (ABD) y el aprendizaje basado en retos (ABR) (van der Beemt y otros, 2023). Estas metodologías fortalecen el vínculo entre el conocimiento adquirido en el entorno académico y las demandas del mundo real (Salvador y otros, 2023). Además, promueven el desarrollo de habilidades de investigación y competencias esenciales para el futuro profesional del estudiantado, como la resolución de problemas desde enfoques multidisciplinarios, interdisciplinares o transdisciplinares, considerando los aspectos éticos, sociales y culturales involucrados.

En términos de posibles implementaciones del ABP, nos centraremos en la propuesta de Fernández Fuentes (2025), que estructura dicha puesta en marcha en tres fases:

1. **Compromiso.** Esta fase busca despertar el interés del estudiantado a través de la presentación de una situación problemática. Para ello, el problema planteado debe ser abierto, generar curiosidad y motivar a la acción.
2. **Investigación.** A partir del problema inicial, los estudiantes llevan a cabo una investigación rigurosa para desarrollar soluciones viables. Durante esta fase, el docente plantea preguntas orientadoras que guían el proceso y acuerda con el alumnado la temporalización, los plazos de entrega y los criterios de evaluación.
3. **Acción.** En esta fase, se desarrollan las posibles soluciones, se analizan sus implementaciones y se evalúan los resultados. Si es necesario, se proponen modificaciones y se regresa a la fase de investigación para refinarlas.

El ABP ha demostrado ser una estrategia efectiva en la enseñanza de las ciencias, proporcionando un marco en el que la Modelización Matemática (MM) puede integrarse de manera eficiente como herramienta cuantitativa para la resolución de problemas.

Modelización matemática

La modelización matemática es un proceso dinámico que establece una relación entre el mundo real y el mundo matemático a través de un modelo (Blum, 2015). Este proceso comienza con un problema del mundo real, reconocido como tal por quien modela, y a partir de la búsqueda de posibles respuestas surge la necesidad de identificar qué conceptos matemáticos pueden contribuir a su resolución. A diferencia de la simple resolución de problemas, la modelización matemática exige a los modeladores a determinar la estructura del problema (variables, parámetros, restricciones, contexto), lo que la distingue como una estrategia de enseñanza más amplia y profunda (Stillman, 2015). Por lo tanto, los problemas de modelización deben ser abiertos (no tener única solución), complejos (implicar diferentes niveles de razonamiento), realismo y autenticidad (basados en situaciones reales o al menos, en contextos que simulen fielmente la realidad) (Borromeo Ferri, 2018). El proceso de modelización puede conceptualizarse en las siguientes etapas, representadas en la **Figura 1**.

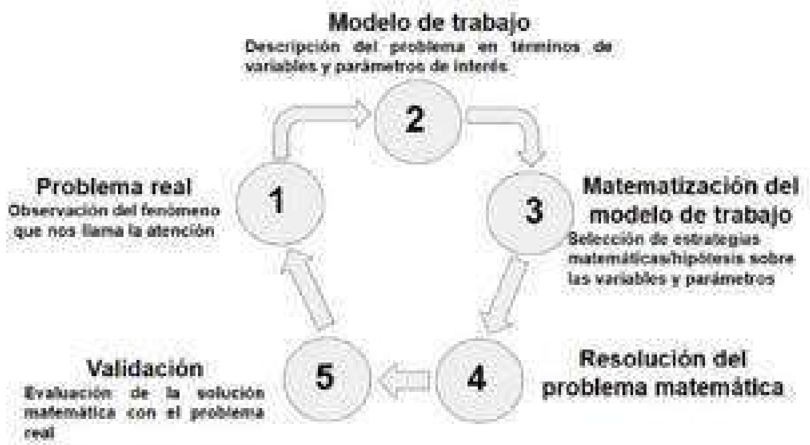


Figura 1 - Conceptualización de las etapas del proceso de modelización.

Una vez establecido el problema real (etapa 1), centramos nuestra atención en la construcción del modelo de trabajo (etapa 2). En esta etapa, quienes modelan estructuran el modelo mediante la identificación de variables y parámetros de interés, *considerando las posibilidades de observación y experimentación disponibles*. Al identificar estos elementos, nos movemos al mundo abstracto (etapa 3), donde decidimos qué herramientas matemáticas utilizar: continuas, discretas, determinísticas o probabilísticas. Esta decisión depende no solo de la estructura elegida, sino también del enfoque disciplinar que los modeladores quieran utilizar. En la etapa 4, se obtienen las soluciones matemáticas necesarias para avanzar a la etapa de validación (etapa 5). En esta última etapa, evaluamos si las soluciones obtenidas responden al problema original. Si es así, se puede concluir el ciclo; de lo contrario, es necesario reiniciar el proceso para realizar ajustes y mejoras.
Dentro de las distintas perspectivas sobre la modelización matemática en la enseñanza, la orientación pragmática o realista (Kaiser y Sriraman, 2006) resalta su potencial para desarrollar competencias de modelización estrechamente vinculadas con las habilidades del siglo XXI (Maass y otros, 2019). Estas competencias incluyen, al igual que las desarrolladas en el ABP: pensamiento crítico y resolución de problemas; comunicación efectiva y trabajo colaborativo; uso de tecnologías digitales para el análisis y representación de datos; adaptabilidad y toma

de decisiones en entornos inciertos. Desde esta perspectiva, la modelización matemática no solo permite a los estudiantes asumir un rol activo en su aprendizaje, sino que también transforma la matemática en un proceso dinámico y en constante construcción, más que en un conjunto de conocimientos estáticos. Así, la modelización matemática se consolida como una estrategia de enseñanza que va más allá de la resolución de problemas tradicionales, al involucrar a los estudiantes en la formulación, validación y mejora de modelos matemáticos aplicados a contextos reales. Su incorporación en la enseñanza no solo fortalece el aprendizaje disciplinar, sino que también contribuye al desarrollo de competencias esenciales para la formación profesional en un mundo cada vez más interconectado y complejo.

La MM comparte con el ABP su orientación hacia problemas del mundo real, la necesidad de colaboración interdisciplinaria y el enfoque en la construcción del conocimiento a partir de la experiencia (Díaz et al., 2020). A partir de las conceptualizaciones del ABP y la MM presentadas, es posible identificar la fase de compromiso del ABP con las etapas 1 y 2 del ciclo de modelización; la fase de investigación con las etapas 2, 3 y 4 del ciclo de modelización; y finalmente la etapa de acción con la etapa 5 del ciclo de modelización. Por lo tanto, el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) emerge como un enfoque metodológico que permite la integración de la MM en cursos de matemáticas de alta matrícula. Esta combinación no solo enriquece la experiencia de aprendizaje, sino que también prepara a los estudiantes para enfrentar desafíos profesionales en entornos de alta incertidumbre y demanda cognitiva.

Ventajas y desafíos en la integración del ABP y la Modelización Matemática

Las expresiones de los estudiantes que han participado activamente en procesos de modelización matemática a través del ABP, reflejan la tensión inherente a este cambio metodológico: "*La técnica que utilizaron con nosotros es novedosa... chocó fuertemente con la manera tradicional a la que veníamos acostumbrados*"; "*Mis cuadernos de matemática siempre fueron impecables... en este curso están todos desordenados*". Si bien la valoración cualitativa de los estudiantes hacia la metodología es positiva, algunos manifiestan que al inicio les genera cierto grado de frustración y desconcierto pues no están acostumbrados a ser el centro del proceso de aprendizaje en el aula de matemática. Estas experiencias muestran que el cambio de paradigma implica la necesidad de estrategias de apoyo para guiar la adaptación del estudiantado a un aprendizaje más dinámico y exploratorio. En este contexto, el rol del docente trasciende la mera transmisión de contenido y se convierte en una pieza clave para facilitar la transición metodológica.

Desde la perspectiva KERP (Kolb y otros, 2014), la enseñanza a través del ABP requiere que el educador asuma distintos roles en función de las necesidades del aprendizaje. Estos roles se alinean con las intervenciones docentes, propuestas por Borromeo Ferri (2018), las cuales abarcan aspectos clave del aprendizaje en modelización matemática. El rol de facilitador es esencial cuando se busca crear un ambiente de aprendizaje seguro en el que los estudiantes puedan experimentar con la modelización sin temor al error. En esta etapa, el docente puede aplicar intervenciones afectivas, como el reconocimiento del esfuerzo y la validación de estrategias de razonamiento, para mitigar la ansiedad ante la incertidumbre. Dado que la modelización puede generar frustración en los estudiantes, el apoyo emocional es crucial para fomentar la persistencia y la confianza en sus propias capacidades.

Por otro lado, el rol de experto cobra relevancia cuando se requiere que los estudiantes comprendan los fundamentos matemáticos que sustentan la modelización. Aquí, las intervenciones sobre el contenido permiten guiar la aplicación rigurosa de conceptos matemáticos dentro del proceso de modelización. Sin embargo, en lugar de ofrecer respuestas directas, el docente actúa como un recurso especializado al que los estudiantes pueden acudir para profundizar en su comprensión, favoreciendo así un aprendizaje activo y reflexivo.

El rol de evaluador y coach es clave cuando los estudiantes enfrentan dificultades en la toma de decisiones y en el desarrollo de estrategias para resolver problemas. En este sentido, las intervenciones estratégicas ayudan a los estudiantes a reflexionar sobre sus propios procesos cognitivos y a desarrollar autonomía en la resolución de problemas. Estas intervenciones incluyen preguntas orientadoras y estrategias metacognitivas que permiten a los estudiantes estructurar su pensamiento y mejorar su desempeño en modelización.

Finalmente, el rol de creador de experiencias se manifiesta en la organización y estructuración de actividades que fomenten la exploración y el trabajo colaborativo. Aquí, las intervenciones organizacionales son esenciales para estructurar el trabajo de los estudiantes, equilibrando la interacción entre trabajo individual y en grupo. Esto es especialmente relevante para aquellos que se enfrentan por primera vez a la modelización matemática, ya que una adecuada organización del entorno de aprendizaje puede facilitar la transición hacia este enfoque dinámico.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la modelización matemática no solo requiere que el docente domine los conceptos matemáticos, sino que también sepa equilibrar y alternar estos roles para apoyar el aprendizaje de los estudiantes de manera efectiva. La integración del modelo KERP con las intervenciones de Borromeo Ferri permite diseñar estrategias pedagógicas más flexibles y personalizadas, asegurando que cada estudiante pueda enfrentar los desafíos de la modelización matemática con confianza y autonomía.

¿De dónde obtengo problemas?

Una característica fundamental, tanto del Aprendizaje Basado en Problemas como de la Modelización Matemática, es el problema que se presenta al estudiantado (Stillman, 2015). Esto plantea la siguiente pregunta: ¿cómo diseñar un problema de modelización?

Fukushima (2023) define la generación de problemas como un proceso que surge tras "notar" algo desconocido en un evento del mundo real. En este proceso, se aplican la experiencia y el conocimiento bajo la premisa de que las preguntas y confusiones que emergen deben resolverse, clarificando así las direcciones del modelado y permitiendo su ejecución. Kontorovich (2020), inspirado en la pregunta "¿De dónde vienen los buenos problemas?", estudia los disparadores que llevan a expertos a crear problemas para competencias matemáticas. Estos disparadores son instancias de "notar", donde un impulso capta la atención del creador y desencadena una reacción matemática que puede culminar en la formulación de un problema. Uno de los disparadores identificados es la abstracción de fenómenos matemáticos a partir de situaciones cotidianas que implican optimización. En estos casos, la necesidad de mejorar una decisión inicial o encontrar una alternativa más eficiente mediante herramientas matemáticas actúa como motor para la generación de preguntas. Así, "notar" (*noticing*) se transforma en el punto de partida que desencadena la actividad matemática creativa: notar lo desconocido o las inconsistencias es el primer paso para formular preguntas que guían el modelado; los disparadores de la creación de problemas son precisamente instancias de notar elementos significativos que resuenan con la experiencia matemática del modelador.

Esto es, el notar algo es parte de la naturaleza activa y reflexiva del pensamiento matemático. La generación de preguntas en la MM no es un proceso pasivo, sino que requiere identificar supuestos, explorar distintas perspectivas y evaluar posibles soluciones. De manera similar, la creación de problemas implica una reflexión profunda sobre experiencias previas, problemas existentes o situaciones del mundo real. Además, este proceso conlleva una revisión de la estructura y las soluciones del modelo obtenido, permitiendo definir nuevas direcciones dentro del proceso de modelado.

La necesidad de "notar" como disparador de buenas preguntas requiere de los docentes la observación crítica de situaciones del mundo real, la identificación de lo desconocido y la reflexión sobre los supuestos y las limitaciones de los modelos. Así, los docentes se transforman necesariamente en modeladores, permitiéndoles poder anticipar e identificar momentos en los que sus estudiantes necesitan un docente facilitador con intervenciones afectivas, o un experto en la/las disciplinas que están interviniendo en la resolución del problemas, o un coach para poder evaluar el proceso desarrollado o las direcciones a seguir, o un docente que promueve situaciones que transformen la resolución de ese problema en una experiencia significativa que promueva aprendizajes profundos en sus estudiantes.

ABP y MM en cursos de alta matrícula. Una posibilidad

La metodología que describiremos ha sido implementada en cursos de Matemática para estudiantes de primer año de las carreras de Bioquímica, Farmacia, Geología y Medicina en la Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco (Soto y otros, 2025). Estos cursos, de dictado cuatrimestral, cuentan con una matrícula aproximada de 300 y 600 estudiantes, respectivamente, y abarcan contenidos fundamentales de cálculo diferencial e integral.

La modelización matemática se incorpora como metodología de enseñanza a través del Aprendizaje Basado en Proyectos, en un espacio diferenciado denominado Tutorías. Este espacio representa entre el 20% y el 25% de la carga horaria sincrónica semanal y se organiza en grupos de entre 7 y 10 estudiantes, conformados aleatoriamente. Cada grupo cuenta con un tutor, quien es integrante del equipo docente, cuyo rol es guiar el desarrollo de un problema de cuatro a seis semanas de duración, siguiendo el ciclo de MM (**Figura 1**). Algunos ejemplos de problemas presentados a nuestros estudiantes se muestran a continuación:

> *Una medida para potabilizar el agua es hervirla durante cinco minutos. Esta práctica es común en hogares con niños que toman leche maternizada en polvo. A partir del momento que retiramos el agua del fuego, ¿cuánto tiempo debemos esperar para preparar una mamadera y que el niño no se queme?*
>
> *¿Qué tan rápido se evacua un edificio?*

Para implementar estos enfoques, el equipo docente necesita habilidades digitales y conocimientos sobre modelización y aprendizaje basado en proyectos. Se requiere un tutor por cada grupo pequeño de estudiantes, un coordinador de tutores y un docente responsable del aula virtual. Es necesario contar con un aula física o virtual, dispositivos con acceso a internet para estudiantes y docentes, y una plataforma como Moodle que permita la interacción online. El proceso se divide en tres fases: planificación, realización y evaluación. En la planificación, se eligen los problemas a modelizar, se resuelven en grupo y se elaboran instrumentos para la gestión, evaluación y planificación del proyecto. En la fase de realización, los estudiantes estructuran el problema, recolectan datos, modelan, validan resultados, elaboran una presentación y se evalúan entre pares, mientras que los tutores median, monitorean y evalúan. Finalmente, en la evaluación, el cuerpo docente analiza los resultados, las estadísticas y la satisfacción de los estudiantes para proponer mejoras. Como complemento, los estudiantes presentan sus proyectos a la comunidad y observan a profesionales que utilizan las mismas estrategias.

Reflexiones finales

La modelización matemática, en combinación con el Aprendizaje Basado en Problemas, ofrece una estrategia pedagógica que trasciende la enseñanza tradicional de las matemáticas al conectar el conocimiento con situaciones del mundo real. Este enfoque permite que los estudiantes desarrollen una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos al aplicarlos en contextos significativos y desafiantes.

Uno de los principales desafíos en la implementación de la MM y el ABP es la necesidad de un diseño adecuado de problemas que equilibre la autenticidad con la viabilidad pedagógica. Si bien los problemas abiertos y complejos favorecen el desarrollo del pensamiento crítico y la creatividad, también requieren una guía docente efectiva para evitar que los estudiantes se sientan abrumados. En este sentido, la formación docente juega un papel clave en la adopción de estas metodologías, requiriendo estrategias didácticas que fomenten la autonomía y la colaboración.

Además, la integración de herramientas tecnológicas puede potenciar la enseñanza de la modelización matemática al facilitar la exploración de datos, la simulación de escenarios y la validación de modelos. No obstante, su incorporación debe estar alineada con los objetivos de aprendizaje y no convertirse en una barrera para el desarrollo conceptual.

En conclusión, la combinación de MM y ABP representa una vía innovadora para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, especialmente en cursos de alta matrícula. Su implementación efectiva requiere un diseño cuidadoso, apoyo institucional y formación docente continua. Al proporcionar a los estudiantes herramientas para enfrentar problemas del mundo real con un enfoque estructurado y reflexivo, estas metodologías contribuyen significativamente a la formación de profesionales preparados para un mundo cada vez más interconectado y complejo.

Agradecimientos

Agradezco especialmente a los integrantes de los equipos de cátedra de Matemática para Bioquímica, Farmacia y Geología, y de Matemática para Medicina, de la Facultad de Ciencias Naturales y Ciencias de la Salud de la Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco, con quienes desde el año 2017 hemos tomado el desafío de incluir el ABP y la MM en cursos de alta matrícula con el firme propósito de ayudar a nuestros estudiantes a sumergirse en la experiencia maravillosa de entender matemática a través la acción.

Referencias bibliográficas

Binkley, M., Erstad, O., Herman, J., Raizen, S., Ripley, M., Miller-Ricci, M., & Rumble, M. (2012). Defining twenty-first century skills. In *Assessment and teaching of 21st century skills* (pp. 17-66). Springer, Dordrecht.

Blum,W. (2015) Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? En S.J. Cho (ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, DOI 10.1007/978-3-319-12688-3_9.

Borromeo Ferri, R. (2018) *Learning how to teach mathematical modelling in school and teacher education*. Springer International Publishing, Suiza: Cham.

Cobo, C.; Moravec, J. (2011). Introducción al aprendizaje invisible: la (r)evolución fuera del aula. *Reencuentro. Análisis de Problemas Universitarios*, 62, 66-81.

Díaz, A.; González, M.; Negrette, C. y Soto, G. (2020). Una experiencia de modelización en una clase de matemática para las ciencias naturales. *Revista de Educación Matemática*, 35(1), 41-53.

Engelbrecht, J.; Borba, M. (2023) Recent developments in using digital technology in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 56, 281–292.

Fernandez Fuentes, M. (2025) Principio activo: aprendizaje basado en problemas. En C. Torrecillas, P. Sánchez-Thevenet y B. Lores-Gómez. *Innovamécum. Metodologías docentes innovadoras en ciencias de la salud*, 38-40. Editorial Universitaria de la Patagonia (EDUPA).

Fukushima. T. (2023) The role of generating questions in mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 54(5), 827-859.
Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM- Mathematics Education*, *38*(3), 302-310.
Kolb, A.; Kolb, D.; Passarelli, A.; Sharma, G. (2014) On Becoming an Experiential Educator: The Educator Role Profile. *Simulation & Gaming*, 45(2), 204-234.
Kontorovich, I. (2020) Problem-posing triggers or where do mathematics competition problems come from? *Educational Studies in Mathematics,* 105, 389–406.
Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., Wijers, M. (2019) *Promoting active citizenship in mathematics teaching.* ZDM, 51(6), 991-1003.
Maggio, M. (2018) Habilidades del siglo XXI: cuando el futuro es hoy. *Documento básico, XIII Foro Latinoamericano de Educación*, Editorial Santillana.
Maggio, M. (2023) Híbrida. Enseñar en la universidad que no vimos venir. *Tilde Editora*. Segunda Edición.
Salvador, R., Vetroni Barros, M., Barreto, B., Pontes, J., Tadashi Yoshino, R., Moro Piekarski, C., de Francisco, A. (2023) Challenges and opportunities for problem-based learning in higher education: Lessons from a cross-program Industry 4.0 case. *Industry and Higher Education*, 37(1), 3–21.
Servant-Miklosa, V. (2019). Fifty Years on: A Retrospective on the World's First Problem-based Learning Programme at McMaster University Medical School. *Health Professions Education,* 5, 3–12.
Stillman, G. (2015) *Application and modelling research in secondary classrooms: what have we learnt?* En S. Chu (Ed.) *Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education*, p. 791-806. Springer International Publishing.
Soto, G.; Negrette, C.; Mendonça, M.; González, M.; Díaz, A. (2025) Revelando los enigmas de la modelización matemática en las Ciencias de la Salud. En C. Torrecillas, P. Sánchez-Thevenet y B. Lores-Gómez. *Innovamécum. Metodologías docentes innovadoras en ciencias de la salud,* 43-44. Editorial Universitaria de la Patagonia (EDUPA).
van der Beemt, A.; Vázquez-Villegas, P.; Gómez Puente, S.; O'Riordan, F.; Gormley, C.; Chiang, F.-K.; Leng, C.; Caratozzolo, P.; Zavala, G.; Membrillo-Hernández, J. (2023) Taking the Challenge: An Exploratory Study of the Challenge-Based Learning Context in Higher Education Institutions across Three Different Continents. *Education Sciences*, 13, 234-257. https://doi.org/10.3390/educsci13030234.

¿Por qué es necesaria la Alfabetización Estadística?
Una síntesis de su evolución

Adriana D'AMELIO
FCE, Universidad Nacional de Cuyo, Argentina
Subdirectora, ISLP "Proyecto de Alfabetización Estadística Internacional"
IASE - ISI
adriana.damelio@fce.uncu.edu.ar

Resumen

En términos de investigación, estudios recientes destacan la importancia de la alfabetización estadística para la comprensión de temas complejos y de interés público, como la epidemiología, el cambio climático y las ciencias sociales (Ridgway et al., 2020; Gould, 2017). La pandemia de CoViD-19, por ejemplo, evidenció la necesidad de que la ciudadanía entienda conceptos estadísticos básicos para interpretar correctamente la información de salud pública. En este sentido, se hace cada vez más necesario que las estrategias de alfabetización estadística promuevan una comprensión integral de la estadística como disciplina transversal y aplicable a problemas actuales (Garfield y Burrill, 1996).

Históricamente, la alfabetización estadística ha evolucionado desde la recopilación de censos en el siglo XIX hasta su consolidación como disciplina en el siglo XX. En la década de 1970 se incorporó en la educación formal, y en el siglo XXI, la digitalización ha permitido un mayor acceso a herramientas de análisis de datos.

La alfabetización estadística es esencial para que las personas puedan interpretar datos, tomar decisiones informadas y comprender fenómenos sociales, económicos y científicos. En un mundo donde la información se basa en números y datos, la capacidad de leer, analizar y utilizar estadísticas es crucial tanto en el ámbito académico como en la vida cotidiana.

En la actualidad, es crucial fortalecer su enseñanza mediante el acceso a recursos educativos, la capacitación docente y la integración de estrategias innovadoras en la educación, con el propósito de permitir que más personas comprendan y apliquen el pensamiento estadístico en la toma de decisiones cuando sea necesario.

Palabras clave: Alfabetización. Estadística. Evolución. Contexto.

Alfabetización Estadística y su Relevancia

La alfabetización estadística es esencial para interpretar datos, tomar decisiones informadas y comprender fenómenos sociales, económicos y científicos. Investigaciones recientes destacan su importancia en temas complejos como la epidemiología, el cambio climático y las ciencias sociales (Ridgway et al., 2020; Gould, 2017). La pandemia de CoViD-19 evidenció la necesidad de comprender conceptos estadísticos básicos para interpretar correctamente la información de salud pública.
Históricamente, la alfabetización estadística ha evolucionado desde la recopilación de censos en el siglo XIX hasta su consolidación como disciplina en el siglo XX. En la década de 1970, se incorporó en la educación formal, y en el siglo XXI, la digitalización ha facilitado el acceso a herramientas de análisis de datos. Ortiz et al. (2018) destacan la necesidad de fomentar esta alfabetización desde la infancia, mientras que Alsina y Vásquez (2016) vinculan su desarrollo con la competencia matemática en el aula.
Organizaciones como el *International Statistical Literacy Project* (ISLP) han sido clave en su promoción global, desarrollando estrategias educativas, competencias internacionales y publicaciones especializadas (Helenius et al., 2020; MacFeely et al., 2017). Engel (2017) resalta su importancia para la ciudadanía activa, y Burrill (2020) aboga por repensar los currículos educativos.
Para potenciar la alfabetización estadística, es fundamental mejorar el acceso a materiales educativos, formar a los docentes e implementar estrategias innovadoras. Esto facilitará que un mayor número de personas entienda y utilice el pensamiento estadístico en su vida diaria y en el ámbito profesional.

Evolución de la Alfabetización Estadística

El concepto de alfabetización estadística ha evolucionado significativamente a lo largo del tiempo:

1. **Siglo XIX - Primeros registros y censos:** Los gobiernos comenzaron a recopilar datos de población y economía para gestionar recursos y políticas públicas.
2. **Siglo XX - Desarrollo de la estadística como disciplina:** Con el avance de las matemáticas y la informática, se crearon métodos más sofisticados para el análisis de datos.
3. **Década de 1970 - Introducción en la educación:** Se promovió la enseñanza de la estadística en la educación secundaria y universitaria.
4. **Siglo XXI - Expansión digital:** El acceso a bases de datos y herramientas informáticas ha democratizado el uso de la estadística en diversos sectores.

ISLP

El Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística (ISLP) es una iniciativa de la Asociación Internacional de Educación Estadística (IASE), que forma parte del Instituto Internacional de Estadística (ISI). Su gestión está a cargo del Comité Ejecutivo del ISLP y es supervisado por el Comité Asesor del ISLP, presidido por el Presidente del IASE e integrado por representantes de IASE, IAOS e ISI. Este proyecto no sería posible sin el esfuerzo de los voluntarios que han contribuido a lo largo de los años.

Origen y evolución

En 1994, el ISI creó un comité para fomentar la difusión de habilidades cuantitativas en todo el mundo, con especial énfasis en los países en desarrollo y en los jóvenes, quienes podrían beneficiarse de un mayor conocimiento sobre los números y sus aplicaciones, con especial atención a la estadística. Este comité, conocido como el Comité Asesor del Programa Mundial de Aritmética, fue presidido por el profesor Luigi Biggeri (Italia).
En septiembre de 2000, el presidente del ISI invitó a este programa a integrarse en el IASE. En julio de 2001, Carol Joyce Blumberg (EE. UU.), vicepresidenta del IASE, asumió su liderazgo.Durante la reunión del ISLP en ICOTS-6, celebrada en Bahía, Brasil, en 2006, se decidió modificar la gestión del ISLP, estableciendo el cargo de Director del ISLP. Como resultado, se creó un comité de búsqueda para designar a un nuevo Director que reemplazara a Carol Blumberg. En enero de 2007, Juana Sánchez (EE. UU.) asumió la dirección del ISLP para el período 2007-2010. En la actualidad su directora es Reija Helenius y los subdirectores son Pedro Campos (Portugal), Adriana D'Amelio (Argentina), Irena Ograjenšek (Slovenia), Saleha Naghmi Habibullah (Pakistan).

Historia del ISLP (1994-2002)

Desde su creación en 1994, el ISLP ha impulsado diversas iniciativas para promover el conocimiento estadístico. A continuación, se destacan algunos hitos clave:

1994-1996: Se estableció el Programa Mundial de Aritmética (WNP) con el objetivo de difundir habilidades cuantitativas. Se formularon diversos proyectos y se realizaron gestiones para obtener financiamiento, principalmente a través de la UNESCO.
1996-1997: Se llevaron a cabo reuniones clave en el ISI 51 en Estambul y se establecieron colaboraciones con organizaciones internacionales para la promoción de la cultura estadística.
1998-1999: Se organizó una Mesa Redonda sobre Alfabetización Estadística en la 52.ª Sesión del ISI en Helsinki, en la que participaron expertos de distintos países.
2000-2002: Se consolidaron proyectos clave como el Glosario multilingüe de términos estadísticos, el Museo de los Números y diversas iniciativas nacionales para la difusión de la estadística.
2003-2006: Creación y consolidación del sitio web. El sitio web del ISLP comenzó a funcionar el 11 de enero de 2003 en la Universidad Estatal de Winona, bajo la gestión de Carol Joyce Blumberg y la asistencia de estudiantes. Durante este periodo, la única actividad del ISLP fue la creación y mantenimiento del sitio web, cuyo espacio fue donado por la universidad. Se desarrollaron páginas sobre diversos recursos educativos en estadística, y se estableció una lista de interesados en el proyecto que creció hasta 200 personas en 2006. Se realizaron reuniones del Comité Asesor en Berlín (2003), Sídney (2005) y Salvador de Bahía (2006).En 2006, se inició la búsqueda de un nuevo director, lo que llevó al nombramiento de Juana Sánchez en octubre de ese año.
2007: Implementación de la interfaz Wiki y expansión internacional. Con la dirección de Juana Sánchez, el sitio web del ISLP se trasladó a la Universidad de Auckland, adoptando una interfaz wiki para facilitar la gestión y la colaboración. Se promovió el ISLP mediante presentaciones y stands informativos en conferencias internacionales en EE.UU., Portugal y Sudáfrica.
2008: Lanzamiento del Primer Concurso Internacional de Alfabetización Estadística. Fue organizado el primer Concurso Internacional de Alfabetización Estadística, con campañas de difusión en diversos boletines y sitios web. Se tradujeron materiales a seis idiomas, con una participación destacada de Sudáfrica. Se implementó un sistema de evaluación en varias fases, con exámenes supervisados por docentes y corregidos por expertos.
2009: Crecimiento y consolidación del concurso. El ISLP colaboró con ISIBALO de Statistics South Africa para la realización del concurso. Juana Sánchez presentó iniciativas del ISLP en la sesión temática del ISI 57 y se fortaleció el Comité Asesor con representantes de múltiples países para apoyar el crecimiento del proyecto.
2010 a la fecha
A partir de la pandemia las reuniones virtuales fortalecieron al equipo que inicialmente en el período 2010-2017 tenía un director, un subdirector Pedro Campos y Advisory board, a partir de 2017 a 2022 se incorporó al equipo ejecutivo a Adriana D´Amelio y en 2022 a Irena Ograjenšek, Saleha Naghmi Habibullah.

El ISLP continúa desarrollando iniciativas para fortalecer la educación estadística en todo el mundo, con el apoyo de la comunidad académica y de los voluntarios que hacen posible este proyecto.

El Rol de la Alfabetización Estadística en Latinoamérica

A lo largo de los últimos treinta años, los países en desarrollo han avanzado en la Alfabetización Estadística. Estos temas se han desarrollado en las reuniones del International Statistical Institute (ISI) en la Conferencia sobre enseñanza de estadísticas (ICOTS) y por la Asociación Internacional de Educación Estadística (IASE). Los países latinoamericanos han tenido poco participación en estas reuniones. La primera reunión latinoamericana de educación estadística (ELEE) se llevó a cabo en Monterrey en 2010 y su objetivo era traer educadores y profesores de estadística de América Latina con el objetivo de intercambiar experiencias.

Si bien la educación estadística en Latinoamérica ha crecido estos últimos años uno de los problemas es la poca disponibilidad de material de habla hispana. La educación estadística en América Latina como dice Del Pino (2006), se encuentra aún en una etapa temprana de desarrollo, donde el progreso inicial se ha logrado primariamente por acciones individuales aisladas. Existe un desequilibrio evidente entre los países que generan la información, con un bajo porcentaje correspondiente al desarrollo.
Una fuente importante de información es la página web de IASE, la Internacional de la Alfabetización de Estadística junto con el Proyecto (ILSP, 2005) da los recursos que son útiles para el desarrollo de la cultura estadística en todos los niveles. En el caso de América Latina, hay una barrera del idioma ya que no hay

mucho material en general, disponible en español. Es por ello que uno de los objetivos del proyecto es poder crecer en el contenido, actividades y recursos en español para Latinoamérica. Martha Aliaga apoyó a estos países generando materiales en el idioma nativo. Luego se reunieron en Rio de janeiro en el 2015 con el fin de proponer acciones y actividades conjuntas atendiendo a las necesidades de los países participantes.
Es por ello que el ISLP se ha preocupado en promover y aumentar la participación de Latinoamérica. a través de estrategias para aumentar las habilidades estadísticas de los profesores de todos los niveles, de los estudiantes de posgrado, del personal de las oficinas de Estadística de América Latina y de otras organizaciones, especialmente los usuarios en interacción con la Universidad.

Algunos proyectos realizados

En la actualidad muchos países están desarrollando proyectos desde las oficinas oficiales de Estadísticas con el objetivo de mejorar la comunicación de la información y alfabetizar a la población en general.
En el libro compilado por Juana Sánchez, directora internacional del ISLP (Proyecto internacional de alfabetización estadística), se encuentran los distintos proyectos y el proceso que condujo a la aparición con éxito, actualmente activa, de dichos programas.
Las distintas oficinas son: Department of Statitics, UCLA. Proyecto ALEA in Promoting Statistical Literacy in Portugal..Statistics New Zealand .Statistics Canada, Statistics Finland., Italy National Institute of Statistics. Australian Bureau of Statistics.
En Argentina en 2007 se creó la primera página de alfabetización estadística AEM “Alfabetización Estadística en Mendoza” desde la Dirección de Estadística de la Provincia (DEIE) dirigido por Mg. Adriana D´Amelio. Este desarrollo fue inspirado en la página de ALEA (Portugal). Recibió mención especial en 2009 en el marco de 5 proyectos de cooperación internacional.
El programa de alfabetización estadística Metadato en Argentina es una iniciativa del INDEC para promover el acceso amigable, de la población en general y dentro de la comunidad educativa en particular, a los conocimientos básicos de la estadística oficial. A través de propuestas diversas que incluyen recursos educativos y la realización de visitas escolares, Metadato contribuye a la formación ciudadana y a la promoción de nuevas vocaciones ligadas al universo de las estadísticas.
El impacto de la alfabetización de datos en las organizaciones. Para explorar la alfabetización de datos empresarial, la mejora de las habilidades y los problemas, los desafíos y los beneficios relacionados, Forrester Consulting realizó encuestas a más de 2000 responsables de la toma de decisiones y empleados en 10 países. Según se desprende de la encuesta, las organizaciones que invierten en la alfabetización de datos y el desarrollo de habilidades de manera escalable, especialmente aquellas con iniciativas más maduras, logran beneficios positivos y mejoras en la toma de decisiones, la innovación, la productividad, la experiencia de los clientes y empleados, y más. Si una empresa está formada por una fuerza de trabajo con alfabetización de datos, la organización y su cultura prosperarán.

¿Dónde estamos y hacia dónde vamos en Educación Estadística?

Un mundo en constante transformación plantea grandes desafíos a la educación. Mirarnos y analizar cómo estamos es de crucial importancia para avanzar en la enseñanza de las estadísticas y en la educación estadística, individual, organizacional, nacional e internacional y reunir estas reflexiones y análisis.
Hoy son prácticas imprescindibles de la comunidad educativa la evaluación como medida u observación del grado de consecución de un logro, y la evaluación como los juicios de valor que se realizan sobre los objetivos alcanzados por el sistema educativo,
Las evaluaciones nacionales e internacionales a las que se someten los países proporcionan un robusto material que nos permite visualizar avances y desafíos pendientes, como las desigualdades educativas persistentes que debemos revertir.
El mundo de los datos se está expandiendo rápidamente, pero el alcance de lo que transmitimos ha cambiado muy poco. La amplitud de visión no comienza a seguir el ritmo de la expansión del mundo de los datos, en nuestra educación.
Nuestro futuro educativo debe ser muy diferente de nuestro presente educativo y nuestro pasado educativo. Para trazar nuestro camino hacia ese futuro necesitamos videntes y soñadores, necesitamos empresarios e innovadores, necesitamos arquitectos y constructores, necesitamos investigación e investigadores. Llevar a cabo investigaciones orientadas a los estudiantes y maestros sobre las capacidades de los estudiantes y cómo las personas aprenden en este entorno de nueva construcción. Generar nuevas ideas sobre cómo hacer las cosas de manera diferente.

Conclusión

La antigua definición de que la alfabetización conduce al desarrollo, difiere mucho del nuevo concepto, que considera que la alfabetización está arraigada en las costumbres sociales y tiene un significado social. La alfabetización social implica capacitar a quienes quieren comunicar algo. En este sentido el ISLP se ha preocupado en los últimos años de asistir y sustentar a través de sus colaboradores esta demanda

Si un programa excluye los contextos sociales y culturales de una región o país este tiende a fracasar, es por ello que en esa diversidad el ISLP contempla la necesidad de cada país y promueve la integración desde su lengua nativa a las actividades que él desarrolla.

Para sostener lo expresado previamente, es importante destacar que el sitio web de ISLP: https://iase-web.org/islp intenta ser un programa que ofrezca mejores oportunidades de adquisición de competencias duraderas y de fácil aplicación, en cuanto a la diversidad lingüística, cultural y de género.

Referencias

Burrill, G. (2020). Statistical literacy and quantitative reasoning: Rethinking the curriculum. En P. Arnold (Ed.), *Proceedings of the roundtable conference of the International Association for Statistical Education (IASE).* ISI/IASE. https://iaseweb.org/documents/papers/rt2020/IASE2020%20Roundtable%2019_BURRILL.pdf?1610923749

Helenius, R., D'Amelio, A., Campos, P., & MacFeely, S. (2020). ISLP Country Coordinators as Ambassadors of Statistical Literacy and Innovations. *Statistics Education Research Journal*, *19*(1), 120–136. http://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ

ISLP. (2018). *Newsletter, 2*(10). https://iase-web.org/islp/Publications.php

Ortiz, C. V., Díaz-Levicoy, D., Coronata, C., & Alsina, Á. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos CENPEC, 8*(1), 154-179.

MacFeely, S., Campos, P., & Helenius, R. (2017). Key success factors for statistical literacy poster competitions. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 202–216. https://iase-web.org/Publications.php?p=SERJ

Engel, J. (2017). Statistical literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal, 16*(1), 44–49. https://doi.org/10.52041/serj.v16i1.213

D'Amelio, A. (Ed.). (2017). *ISLP Newsletter, 10*(1).

ISLP. (2017a). *The second call for country representatives*. https://iase-web.org/islp/Activities.php?p=Call_for_Country_Coordinators

ISLP. (2017b). *Newsletter, 1*(9). https://iase-web.org/islp/Publications.php

UNESCO. (2017). *Literacy rates continue to rise from one generation to the next* (Fact Sheet No. 45). Unesco Institute for Statistics. https://uis.unesco.org/en/topic/literacy

Alsina, Á., & Vásquez, C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (48), 41-58.

UNESCO. (2013). *Second global report on adult learning and education: Rethinking literacy*. UNESCO Institute for Lifelong Learning. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000222407

Sánchez J. (2008) "La Alfabetización Estadística y las oficinas de Estadísticas Gubernamentales" Directora del Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25.

International Statistical Literacy Project (ISLP). (n.d.-a). *International Statistical Literacy Project*. IASE & ISI. https://iase-web.org/islp/About.php

International Statistical Literacy Project (ISLP). (n.d.-b). *History from 2003*. IASE & ISI. https://iase-web.org/islp/About.php?p=History_from_2003

International Statistical Literacy Project (ISLP). (n.d.-c). *History 1994 to 2002*. IASE & ISI. https://iase-web.org/islp/About.php?p=History_1994_to_2002

https://alea.pt/index.php?lang=pt
https://www.indec.gob.ar/indec/web/Institucional-Indec-Alfabetizacion

Modelización matemática en la enseñanza por competencias en profesionales de ciencias económicas

Marcel David POCHULU

Universidad Nacional de Villa María, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Villa María, Universidad Católica de Salta, Argentina

mpochulu@unvm.edu.ar

Resumen

La modelización matemática desempeña un rol clave en la enseñanza por competencias, al permitir que los estudiantes de ciencias económicas articulen el conocimiento matemático con la resolución de problemas propios de su campo profesional. En esta conferencia se presentan experiencias de modelización en la enseñanza de ciencias básicas, orientadas al desarrollo de habilidades analíticas y argumentativas en entornos tecnológicos.

A partir del diseño de actividades donde los estudiantes construyen modelos matemáticos para la toma de decisiones financieras, el análisis de costos y la optimización de recursos, se examina cómo estas estrategias favorecen una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos y fortalecen competencias esenciales para la gestión económica. Los resultados evidencian que la modelización no solo mejora la apropiación del conocimiento matemático, sino que también promueve un pensamiento cuantitativo y basado en evidencia, necesario para abordar problemáticas complejas en la toma de decisiones. Finalmente, se reflexiona sobre los desafíos y oportunidades que implica integrar la modelización matemática en la formación de profesionales en ciencias económicas.

Palabras clave: Modelización matemática. Enseñanza por competencias. Educación matemática universitaria.
Formación profesional en matemáticas. Tecnologías digitales. Argumentación matemática.

Desafíos en la formación matemática de profesionales no matemáticos

En la actualidad, la formación de profesionales en Ciencias Económicas exige superar los modelos tradicionales centrados en la transmisión de contenidos, para orientarse hacia propuestas que promuevan el desarrollo de competencias relevantes para el ejercicio profesional. En este escenario, la enseñanza de las ciencias básicas, y en particular de la matemática, enfrenta el desafío de redefinir su sentido y su función en la carrera, evitando convertirse en un filtro académico desconectado de las prácticas profesionales.

Los planes de estudio basados en competencias, tanto en instituciones públicas como privadas, buscan articular el conocimiento científico con la resolución de problemas significativos para el campo disciplinar. En este marco, la matemática deja de ser un conjunto de técnicas abstractas para convertirse en una herramienta para la toma de decisiones, el análisis de información y la construcción de argumentos fundamentados. No se trata solo de resolver ejercicios, sino de abordar situaciones complejas que exigen interpretar datos, modelar relaciones, justificar propuestas y comunicar resultados de manera clara y precisa.

En este contexto, la modelización matemática emerge como una estrategia didáctica potente para conectar el conocimiento matemático con el campo profesional. Lejos de ser una aplicación mecánica de fórmulas, modelizar supone construir representaciones matemáticas de fenómenos económicos, analizar las relaciones entre variables, interpretar resultados y tomar decisiones informadas. En particular, en carreras como Contador Público, Administración o Economía, el trabajo con funciones, tasas de variación, análisis de costos, proyecciones o escenarios de optimización adquiere sentido cuando se inscribe en situaciones problemáticas reales o plausibles.

Este enfoque exige también repensar el rol del docente, quien ya no se limita a explicar procedimientos, sino que asume una función de mediación didáctica que posibilita que los estudiantes formulen conjeturas, argumenten sus decisiones y validen sus resultados. Del mismo modo, requiere diseñar actividades que favorezcan el trabajo autónomo y colaborativo, integrando tecnologías que potencien la exploración, la visualización y la comunicación matemática.

Esta conferencia se inscribe en ese marco: recuperar y fundamentar la modelización matemática como una propuesta formativa coherente con la enseñanza por competencias, particularmente en la formación de profesionales en Ciencias Económicas. A partir de la experiencia de rediseño curricular que venimos desarrollando, se plantea una reflexión más amplia sobre las posibilidades, tensiones y desafíos que surgen al integrar la modelización en entornos tecnológicos, como vía para una enseñanza más significativa, rigurosa y profesionalmente relevante.

En este trabajo se argumenta que la modelización matemática no solo permite una comprensión más profunda de los conceptos, sino que constituye una estrategia formativa coherente con las demandas del mundo profesional contemporáneo.

La modelización matemática como eje articulador en la enseñanza por competencias

La adopción del enfoque por competencias en la educación superior no constituye únicamente una modificación de los planes de estudio, sino una transformación profunda de los supuestos que orientan la enseñanza y el aprendizaje en la universidad. En este marco, la formación matemática de profesionales no matemáticos, especialmente en carreras como Contador Público, Administración o Economía, debe ser reconsiderada en función de los saberes, habilidades y actitudes que los egresados requieren para desenvolverse en contextos profesionales complejos, cambiantes y atravesados por información cuantitativa. En lugar de priorizar la transmisión de contenidos descontextualizados, el foco se traslada hacia la resolución de situaciones problemáticas significativas, el desarrollo de competencias argumentativas y la toma de decisiones fundamentadas.

En este escenario, la modelización matemática se vuelve una práctica didáctica con alta potencialidad formativa. Su relevancia no radica únicamente en la aplicación de conceptos a contextos, sino en el hecho de que permite construir representaciones matemáticas de fenómenos del entorno, analizarlos, interpretarlos y validarlos con criterios tanto técnicos como profesionales. Modelizar implica trabajar con incertidumbre, elegir variables relevantes, establecer relaciones funcionales, interpretar tendencias y justificar decisiones. Este proceso desafía la enseñanza tradicional centrada en técnicas algorítmicas, y habilita un espacio para que los estudiantes asuman un rol activo en la construcción de conocimiento matemático, en diálogo con su campo disciplinar (Blum & Borromeo Ferri, 2009; Kaiser & Sriraman, 2006).

Numerosas investigaciones en educación matemática han señalado que la modelización no solo favorece la comprensión de conceptos como función, tasa de variación o crecimiento, sino que propicia el desarrollo de competencias cognitivas de orden superior, como el análisis crítico de información, la argumentación cuantitativa y la capacidad de interpretar modelos en contextos reales (Alsina & Cañellas, 2021; Maaß, 2006). Estas competencias son especialmente valoradas en el ámbito de las ciencias económicas, donde los

profesionales deben proyectar escenarios, justificar decisiones económicas, estimar impactos y comunicar informes con claridad técnica.
Esta visión formativa de la modelización requiere un cambio en la concepción del rol docente. El profesor ya no ocupa el lugar del transmisor de procedimientos normativos, sino que se convierte en mediador de situaciones que habilitan la construcción de modelos, la validación de resultados y la reflexión crítica sobre la pertinencia de las soluciones en el contexto. Enseñar a modelizar no significa enseñar modelos preestablecidos, sino generar condiciones para que los estudiantes elaboren, ajusten y discutan representaciones propias de fenómenos económicos o administrativos, utilizando herramientas matemáticas. Este rol del docente implica también reconocer la diversidad de trayectorias y formaciones previas, y generar andamiajes que favorezcan la autonomía progresiva de los estudiantes. Este cambio de rol implica también repensar las formas de evaluación, incorporando criterios que valoren no solo el resultado obtenido, sino también los procesos de modelización, la argumentación matemática y la adecuación de las decisiones tomadas.
El uso de tecnologías digitales amplía las posibilidades didácticas de la modelización. Entornos como planillas de cálculo, software de visualización gráfica, lenguajes de programación o recursos de inteligencia artificial permiten simular escenarios, analizar variaciones paramétricas y explorar situaciones en tiempo real, favoreciendo una comprensión dinámica y situada de los procesos modelizados. En experiencias recientes, se ha mostrado cómo el uso crítico de herramientas como la inteligencia artificial generativa puede contribuir al diseño de tareas con mayor riqueza epistémica y didáctica, permitiendo superar ejercicios rutinarios para promover procesos de formulación, exploración y validación de modelos (Pochulu & Font, 2025).
La articulación entre modelización matemática, competencias profesionales y tecnologías requiere también una reflexión sobre la idoneidad de las tareas que se proponen a los estudiantes. La inclusión de contextos reales o simulados no garantiza, por sí misma, la calidad de la actividad. Es necesario que las tareas presenten un grado de apertura que permita distintos abordajes, que requieran tomar decisiones y justificar elecciones, y que favorezcan el tránsito por distintas fases del proceso de modelización. En este sentido, se han propuesto criterios para analizar la pertinencia didáctica de las consignas, considerando no solo la coherencia epistemológica del modelo, sino también el tipo de competencias que la tarea convoca (Pochulu, 2024).
La modelización matemática, en tanto práctica situada, puede constituirse en un eje estructurante de la enseñanza por competencias cuando se vincula con situaciones del campo profesional, se apoya en el uso reflexivo de tecnologías y se orienta a la construcción de sentido. Este enfoque permite tender puentes entre la matemática y la realidad profesional, favorece el pensamiento crítico y promueve una actitud argumentativa frente a los problemas, superando la visión tecnocrática que durante años dominó la enseñanza universitaria en ciencias económicas.
La modelización no implica abandonar el rigor formal, sino resignificarlo en función de la construcción de sentido y la toma de decisiones. Como ha sido señalado por Niss y Højgaard (2011), las competencias matemáticas requieren la integración de conocimientos, habilidades, actitudes y contextos de uso, lo que se alcanza de manera privilegiada a través de tareas de modelización.

Competencias matemáticas en la formación de profesionales de Ciencias Económicas

En el contexto actual, caracterizado por la circulación constante de información cuantitativa y la toma de decisiones en escenarios inciertos, las carreras de Ciencias Económicas demandan egresados capaces de interpretar, argumentar y resolver problemas desde una perspectiva funcional, crítica y contextualizada. Estas exigencias no se limitan al conocimiento técnico, sino que interpelan también el desarrollo de competencias que integren saberes matemáticos, económicos y comunicacionales, orientados a la comprensión de fenómenos del campo profesional.
El desarrollo de competencias matemáticas en carreras como Contador Público, Administración o Economía no puede reducirse a la memorización de procedimientos o a la reproducción de algoritmos. Se espera que los estudiantes sean capaces de formular y resolver problemas, analizar relaciones entre variables, interpretar representaciones funcionales, justificar sus decisiones y comunicar con claridad sus conclusiones. Estas competencias se ponen en juego, por ejemplo, al analizar balances, proyectar costos, interpretar informes financieros, estimar riesgos o evaluar tendencias económicas a partir de datos reales.
La enseñanza tradicional de la matemática universitaria ha tendido, sin embargo, a centrarse en un repertorio de técnicas descontextualizadas, muchas veces alejadas del campo profesional. Frente a este escenario, distintos marcos curriculares han promovido un viraje hacia enfoques por competencias que consideren tanto el saber matemático como su articulación con situaciones significativas del campo (CONFEDI, 2018). En este sentido, enseñar matemática en carreras de Ciencias Económicas implica también asumir la necesidad de diseñar experiencias de aprendizaje que integren conocimientos, habilidades y actitudes en función de desempeños profesionales genuinos.
Desde la educación matemática, se han propuesto diversas definiciones del concepto de competencia matemática, entendida como la capacidad de movilizar recursos para enfrentar con éxito situaciones que

involucran conocimientos y razonamientos cuantitativos. En particular, se ha enfatizado que el desarrollo de competencias exige trabajar con tareas que no solo convoquen contenidos matemáticos, sino que propicien la formulación de conjeturas, la validación de resultados y la comunicación de los argumentos empleados (Pochulu, 2024).

El diseño de situaciones problemáticas situadas, con apertura en su resolución y con posibilidades de múltiples abordajes, permite que el estudiante no solo aplique técnicas, sino que despliegue capacidades de análisis, interpretación y justificación. Así, la enseñanza de funciones, variación de magnitudes, tasas de cambio o análisis gráfico, cobra sentido cuando se inscribe en contextos en los que esas nociones resultan necesarias para tomar decisiones con fundamento matemático.

Además, las tecnologías digitales habilitan nuevos modos de abordar estos contenidos. El uso de planillas de cálculo, software de visualización gráfica, simuladores o entornos de programación ofrece oportunidades para analizar situaciones dinámicas, manipular variables y validar modelos. Estos entornos no solo potencian el desarrollo instrumental, sino que también permiten ampliar las posibilidades de exploración y análisis, articulando el saber matemático con herramientas propias del campo económico y empresarial.

El tránsito hacia una enseñanza de la matemática orientada al desarrollo de competencias no puede limitarse a la incorporación de recursos o al uso de contextos atractivos. Requiere un cambio profundo en las prácticas docentes, que considere el tipo de actividades que se proponen, el lugar que ocupa el error y la validación, y las formas en que se promueve la argumentación. En esta dirección, la modelización matemática se configura como una vía potente para integrar la matemática con el campo profesional, habilitando espacios de indagación, análisis y toma de decisiones que contribuyen al desarrollo de competencias esenciales.

Experiencias y diseños de actividades basadas en modelización matemática

La incorporación de situaciones de modelización matemática en la enseñanza universitaria permite transformar profundamente las prácticas docentes, en particular en las carreras de Ciencias Económicas. No se trata solo de contextualizar ejercicios tradicionales, sino de proponer situaciones que obliguen a interpretar fenómenos reales, construir modelos, analizar sus limitaciones y comunicar conclusiones con base en evidencia cuantitativa. Este enfoque resulta particularmente potente para el desarrollo de competencias profesionales, al articular el conocimiento matemático con la toma de decisiones, la argumentación técnica y la lectura crítica de información.

Estas situaciones, sin explicitar previamente el modelo matemático a utilizar, abren la posibilidad de que emerjan herramientas como funciones lineales, programación lineal o análisis de sensibilidad, en función del enfoque que los estudiantes adopten para abordar el problema. Esta apertura metodológica no solo potencia la autonomía en la formulación del problema y en la selección de estrategias, sino que permite que el conocimiento matemático se reconstruya de forma situada, al servicio de decisiones que responden a contextos económicos reales.

Una situación paradigmática para abordar con estudiantes de estas carreras consiste en la planificación de la producción agropecuaria a partir de recursos limitados y demandas estimadas. Se propone que los estudiantes seleccionen productos de la canasta familiar (por ejemplo, carne, huevos, hortalizas o granos) y elaboren una estrategia de producción que maximice los ingresos, considerando restricciones como la superficie disponible, los costos de insumos, la mano de obra y los precios de venta. Esta actividad exige establecer variables, formular restricciones y construir un modelo funcional que oriente las decisiones. Sin explicitar previamente qué herramientas matemáticas deben utilizar, se habilita la posibilidad de que emerjan, de manera situada, recursos como funciones lineales, programación lineal o análisis de sensibilidad, en función del modo en que los estudiantes representen la situación, seleccionen las variables relevantes y estructuren el problema. Esta apertura metodológica, donde el modelo no se impone, sino que se construye a partir del análisis del contexto, potencia el desarrollo de competencias vinculadas a la formulación de problemas, la toma de decisiones fundamentadas, la validación de estrategias y la argumentación profesional.

Un ejemplo de consigna que responde a esta lógica didáctica es el siguiente:

En la producción agropecuaria, la optimización de los recursos es clave para garantizar la rentabilidad y sostenibilidad de la actividad. Los productores rurales deben decidir qué cultivos o productos priorizar, en función de múltiples factores como la demanda del mercado, la disponibilidad de recursos y los costos de producción. En este contexto, se solicita que, en grupos, seleccionen un lote de tierra, propio o alquilado, y definan al menos dos productos agropecuarios de la canasta familiar (como carne bovina, ovina o porcina; huevos; frutas; hortalizas; granos, entre otros) cuya producción optimizarán para maximizar los ingresos por ventas. Cada equipo deberá formular una estrategia de producción considerando aspectos como: (1) La superficie disponible para la producción y su distribución entre los productos elegidos, (2) La demanda estimada de cada producto y su posible variabilidad a lo largo del tiempo, (3) Los costos asociados a la producción (insumos, mano de obra, mantenimiento), (4) La relación entre producción y precio de venta en el mercado seleccionado.

El análisis deberá fundamentarse en datos reales, para lo cual podrán recurrir a fuentes oficiales, informes de mercado o entrevistas con productores de la región. Se espera que los equipos modelicen matemáticamente el problema, estableciendo restricciones relevantes y proponiendo una solución óptima que maximice los ingresos sin comprometer la sostenibilidad de la producción. Los resultados y conclusiones deberán presentarse en un informe con fundamentos matemáticos y económicos, acompañado de una exposición ante la clase, donde se discutirá la validez del modelo propuesto y las decisiones tomadas.

Otra situación frecuente en el ámbito económico es el análisis de rentabilidad en actividades productivas, como la cría intensiva de animales para producción de carne. A partir de tablas de costos fijos y variables, y precios de venta escalonados, los estudiantes deben modelizar la función de ganancia, identificar puntos de equilibrio y determinar el nivel óptimo de producción. A través de este tipo de tarea, se integran contenidos como funciones, derivadas, máximos y mínimos, con competencias profesionales como la toma de decisiones informadas, la evaluación de alternativas y la elaboración de informes sustentados en modelos matemáticos. Además, se promueve el uso de hojas de cálculo para simular escenarios, comparar resultados y comunicar los hallazgos de forma clara y precisa.

También resultan valiosas las propuestas vinculadas al análisis financiero y comparación de inversiones. Por ejemplo, se presenta una situación en la que un inversor dispone de un capital y debe optar entre la compra de un terreno para alquilar o la inversión del dinero en distintos instrumentos financieros. Los estudiantes deben determinar qué variables considerar, cómo calcular el valor presente neto, qué tasas utilizar y cómo proyectar escenarios posibles. Este tipo de actividad compromete competencias relacionadas con la formulación de modelos financieros, la simulación de escenarios, la interpretación de resultados y la argumentación de las decisiones tomadas ante incertidumbre.

Estas experiencias no se agotan en la aplicación de técnicas previamente enseñadas, sino que colocan a la matemática como lenguaje para intervenir sobre lo real. A través de la modelización, los estudiantes no solo aplican herramientas cuantitativas, sino que las reconstruyen y resignifican en función del problema que enfrentan. De este modo, se fortalece la comprensión conceptual, se desarrollan capacidades analíticas y se entrena una forma de pensamiento que resulta esencial en el campo económico: el pensamiento basado en evidencia.

El enfoque de modelización también permite promover una mirada crítica sobre los modelos construidos: sus supuestos, alcances, limitaciones y relevancia para la toma de decisiones. Se abre así un espacio formativo donde el error no es penalizado como falla, sino reconocido como parte del proceso de construcción y validación de modelos. Además, se fomenta el trabajo colaborativo, la elaboración de informes técnicos, el uso de recursos digitales y la presentación oral de resultados, todas habilidades clave para la actuación profesional.

En suma, estas experiencias muestran que es posible construir una enseñanza de la matemática que sea rigurosa, situada y significativa. La clave está en diseñar situaciones que comprometan genuinamente procesos de modelización, que habiliten múltiples estrategias de resolución, y que valoren no solo el resultado final, sino la calidad de las decisiones, los argumentos y la interpretación crítica de los modelos construidos. De este modo, la modelización matemática se convierte en una vía privilegiada para formar profesionales de Ciencias Económicas capaces de actuar con fundamento, criterio y responsabilidad en un mundo donde lo cuantitativo ocupa un lugar central.

Reflexiones finales

La incorporación de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Económicas representa una oportunidad para resignificar el papel de la matemática en la formación profesional. Más allá de constituirse en un conjunto de contenidos a ser dominados, la matemática se convierte, mediante la modelización, en una herramienta para comprender fenómenos complejos, justificar decisiones y actuar con fundamento en contextos inciertos.

Las experiencias presentadas muestran que es posible diseñar situaciones didácticas que promuevan simultáneamente el desarrollo de competencias profesionales y la apropiación profunda de conceptos matemáticos. Lejos de reducirse a una aplicación superficial de técnicas, estas propuestas interpelan al estudiante en su capacidad de problematizar, modelizar, interpretar, argumentar y comunicar, elementos esenciales para el ejercicio profesional en el campo económico. Además, estas experiencias también abren líneas de investigación sobre el desarrollo de competencias en contextos universitarios mediados por tecnología, como se ha propuesto en investigaciones recientes (Pochulu, 2024).

La enseñanza por competencias no debe traducirse en una pedagogía utilitarista ni desprovista de rigurosidad conceptual. Por el contrario, demanda una mayor sofisticación en el diseño de las tareas, una gestión didáctica que favorezca la autonomía del estudiante y un enfoque evaluativo centrado en los procesos de pensamiento. En este marco, la modelización matemática se constituye en un dispositivo didáctico privilegiado, ya que permite articular el saber disciplinar con el contexto profesional, integrando aspectos técnicos, críticos y comunicativos.

Asimismo, estas experiencias invitan a repensar el rol docente. Promover el desarrollo de competencias mediante la modelización requiere un posicionamiento profesional que trascienda la transmisión de conocimientos, para asumir funciones de mediación, diseño, análisis y reflexión crítica sobre la práctica. Esto implica, a su vez, abrir espacios de desarrollo profesional para los propios docentes, en los que puedan revisar sus concepciones sobre la matemática, la enseñanza y el aprendizaje, así como explorar nuevas formas de intervención didáctica. En contextos como el actual, donde la incertidumbre y la complejidad atraviesan todos los campos profesionales, formar en competencias matemáticas mediante modelización no es una opción metodológica más, sino una necesidad para garantizar una formación universitaria pertinente, crítica y con capacidad de intervención.

En definitiva, avanzar hacia una enseñanza de la matemática centrada en competencias no es una tarea menor ni inmediata. Exige transformar no solo los contenidos o las actividades, sino los marcos epistemológicos, pedagógicos y didácticos que sostienen nuestras prácticas. La modelización matemática ofrece una vía concreta para transitar ese camino, en la medida en que se la conciba como una práctica genuina de construcción de sentido, profundamente articulada con los desafíos del mundo profesional contemporáneo.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á., & Cañellas, N. (2021). Pensamiento matemático funcional: una propuesta para el desarrollo de competencias matemáticas en la educación superior. *Revista Educación Matemática*, 33(2), 25–44.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.

CONFEDI (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para carreras de Ingeniería*. Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina. Recuperado de https://confedi.org.ar

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM Mathematics Education*, 38(2), 113–142.

Pochulu, M. (2024). El diseño de tareas de modelización con inteligencia artificial. En J. E. Sagula (Ed.), *Memorias del V Simposio de Educación Matemática-Virtual (V SEM-V)* (pp. 70–76). Universidad Nacional de Luján.

Pochulu, M., & Font, V. (2025). Idoneidad didáctica de tareas de matemáticas reformuladas con inteligencia artificial. *Paradigma*, 45(3).

Niss, M., & Højgaard, T. (2011). Competencies in mathematics education – overview and reflections. In G. Kaiser et al. (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 385–396). Springer.

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE). (2019). *Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030*. OCDE Publishing.

Enseñanza de la matemática en la formación inicial de profesores universitarios en biología: estudio de modelos matemáticos

Gretel A. FERNÁNDEZ von METZEN[1], Verónica PARRA[2,3]

[1]Facultad de Ciencias Exactas, Químicas y Naturales

Universidad Nacional de Misiones (UNaM), Posadas, Argentina

[2]Núcleo de Investigación en Educación Matemática (NIEM), Instituto Superior de Ingeniería del Software (ISISTAN/CONICET-UNCPBA)

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Tandil, Argentina

[3]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

gretel.fernandez@fceqyn.unam.edu.ar

vparra@niem.exa.unicen.edu.ar

Resumen

Esta disertación se circunscribe a una investigación en curso que tiene por objetivo general problematizar la concepción tradicional de las prácticas de enseñanza de la matemática en la formación universitaria de Profesores en Biología de una universidad nacional de Argentina. Como parte de los objetivos específicos de la investigación, se ha diseñado y realizado dos implementaciones de un dispositivo didáctico, denominado recorrido de estudio e investigación (REI). Se trata de una enseñanza de la matemática en la que se pone de relieve el estudio de preguntas fuertes que, no sólo propicia un espacio fructífero para establecer vínculos entre la matemática y otras disciplinas de la formación básica de los estudiantes, sino que, además, posibilita el estudio de modelos matemáticos de manera funcional a la biología. Como material de análisis se consideraron los datos obtenidos de las dos implementaciones realizadas en los años 2023 y 2024, en un primer año del Profesorado Universitario en Biología, durante el cursado regular de la asignatura Matemática. En los resultados parciales se pone de manifiesto que los estudiantes han logrado la construcción y reconstrucción de diferentes saberes matemáticos y no matemáticos, emergentes en el proceso de construcción de la respuesta a la pregunta generatriz. Asimismo, se aspira a que los resultados de esta investigación representen una contribución para la planificación y análisis de futuras prácticas de enseñanza de la matemática en carreras donde la biología forma parte de su plan de estudios y, además, se constituyan en aportes para la investigación en Educación Matemática.

Palabras clave: Enseñanza de la Matemática. Modelos matemáticos. Recorridos de estudio e investigación. Profesorado Universitario en Biología.

Introducción

Este trabajo es parte de una tesis doctoral en curso, cuya investigación tiene como objetivo problematizar la concepción tradicional de las prácticas de enseñanza de la matemática en la formación universitaria de Profesores en Biología de una universidad nacional de Argentina. El estudio de temas carentes de sentido, desconectados entre sí y con otras disciplinas, es una problemática que emerge en las diversas prácticas de enseñanza de la matemática en los diferentes niveles escolares. Si bien desde el seno de la Didáctica de la Matemática se han realizado numerosas investigaciones al respecto (Brousseau, 2007; Camarena Gallardo, 2021; Chevallard, 2017; Barquero 2009; Otero et al, 2013; Parra & Otero, 2017), dicha problemática aún invoca a continuar indagando sobre las condiciones y restricciones que operan en las instituciones acerca del desarrollo y difusión social del saber (Chevallard, 2009; Chevallard & Bosch, 2014). Desde la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 2013), se interpela la cristalización de los saberes, el encerramiento de cualquier disciplina hacia ella misma, y la distancia que genera de su función como instrumento. Este aspecto tiende a considerar a cualquier obra humana, como un *monumento*, desprovista de sus razones de ser y valorada por sí misma. Este fenómeno didáctico, se denomina *monumentalización de saberes*, y se lo puede explicar a partir de la analogía de la visita a un museo (Chevallard, 2007, 2017, 2022). En este sentido, la matemática ocuparía el rol de una obra de arte, los estudiantes, el rol de visitantes del museo y el profesor, el guía del recorrido. Desde este paradigma, se describe a la enseñanza de la matemática como la visita a esa obra que no puede manipularse por parte de los visitantes y que está allí presente, para ser admirada y venerada. Ante esta mirada, sería sensato pensar la enseñanza de la matemática en función de la investigación y estudio de modelos matemáticos que permitan describir y predecir acontecimientos de otras disciplinas, como es el caso de la biología. Bajo esta concepción, la modelización matemática y el estudio de modelos sería un aspecto clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En línea con lo antes expuesto, en el presente trabajo se describe y analiza una breve parte de la implementación de un dispositivo didáctico, denominado recorrido de estudio e investigación (REI) (Chevallard, 2004, 2022) para enseñar matemática en la formación de profesores universitarios en biología. Aquí, se aboga por una enseñanza de la matemática en la que se pone de relieve el estudio de preguntas fuertes que, no sólo propicie un espacio fructífero para establecer vínculos entre la matemática y otras disciplinas de la formación básica de los estudiantes, sino que, además, posibilite el estudio de modelos matemáticos de manera funcional a la biología.

Marco teórico: los modelos matemáticos en los recorridos de estudio e investigación (REI)

Dentro de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) se definen los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) cuyo propósito clave es replantear los programas escolares como un conjunto de preguntas que impulsan y guían el cuestionamiento del mundo (Chevallard, 2022). Estos recorridos, entendidos como una reorganización de las formas de enseñar, se distinguen por integrar la modelización matemática en los sistemas escolares. Uno de los aspectos fundamentales de los REI es la construcción y reconstrucción de praxeologías intra matemáticas y extra matemáticas en respuesta a una pregunta fuerte, conocida como pregunta generatriz. Dicha pregunta, vinculada a la disciplina en cuestión (en este caso, la Biología), no se puede responder de forma directa e inmediata. Por el contrario, exige la formulación de nuevas subpreguntas (preguntas derivadas) y la construcción de modelos que, de manera colectiva, articulen saberes tanto matemáticos como no matemáticos (por ejemplo, saberes biológicos, químicos, físicos y ecológicos, entre otros). De este modo, un REI debe partir de una pregunta generatriz capaz de originar múltiples preguntas derivadas, promoviendo un mapa de preguntas y respuestas en constante expansión (Chevallard, 2004).

Metodología de la investigación

La metodología utilizada se ajusta a los lineamientos de una investigación cualitativa y descriptiva (Hernández Sampieri et al., 2014). En este trabajo se propone describir y caracterizar la potencialidad del estudio de modelos matemáticos a partir de la implementación de un REI en un curso regular con estudiantes del Profesorado Universitario en Biología (PUB), y de qué manera esta propuesta propicia una enseñanza de la matemática funcional y con cierto sentido en carreras cuya formación no es intrínsecamente matemática. El REI parte de la pregunta generatriz ***Q_0*: *¿Cómo determinar si ciertas masas de agua son propicias para la vida acuática?*** Esta pregunta fue diseñada de modo que permita vincular a la Matemática con la Biología y otras disciplinas propias de la formación básica de los estudiantes del PUB. Por esta razón, se decidió partir de una problemática que no solo represente interés biológico para los estudiantes, sino que, además, sea de relevancia ambiental para un ciudadano.

Se llevaron cabo dos implementaciones entre agosto y diciembre de los años 2023 y 2024, en un curso de Matemática del primer año de la carrera PUB de una Universidad Nacional del noreste argentino. Las clases se desarrollaron en dos encuentros por semana de una hora y media cada uno. La asignatura Matemática es de cursado anual y previo a la implementación del REI, se habían estudiado las primeras unidades del programa del curso. Asistieron y participaron en las implementaciones, diecisiete y dieciséis estudiantes, respectivamente. En ambas implementaciones los estudiantes se distribuyeron en grupos de cuatro, tres y dos estudiantes.

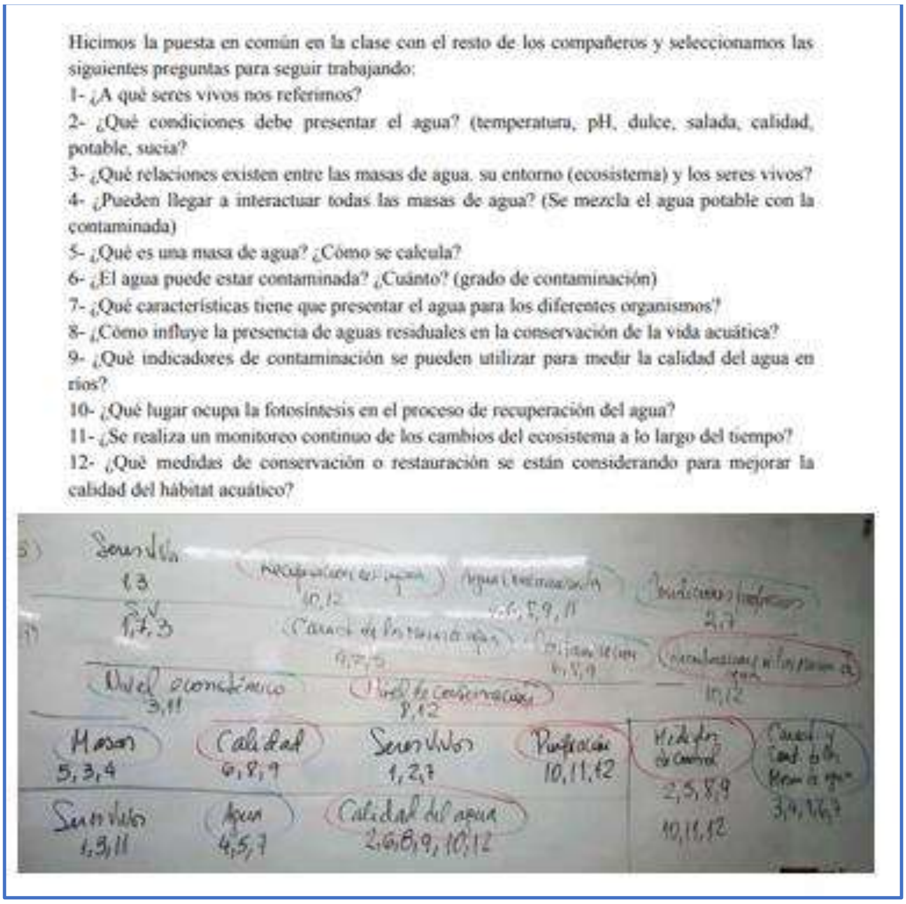
El equipo docente estuvo conformado por: una profesora titular, responsable del espacio curricular y una docente auxiliar, ambos profesores de Matemática. Esta última es quien llevó adelante las implementaciones del REI y, además, se encuentra en proceso de realización de la tesis doctoral. Asimismo, se contó con la presencia y asistencia de un Licenciado en Genética, que contribuyó con lo referido al estudio de los saberes biológicos que eventualmente emergieron en el desarrollo de las clases. Como parte del material de análisis se consideraron los datos obtenidos de las dos implementaciones. Para ello se dispuso de, las producciones escritas y/o audio de los grupos conformados en cada una de las clases y el registro de observaciones participantes y no participantes de la profesora a cargo del REI. Cada clase se registró en video (grabación-toma del grupo en general), con el previo consentimiento escrito de cada uno de los implicados. Por otra parte, es importante señalar que las puestas en común se realizaron de acuerdo a los avances producidos en la investigación realizada por los grupos. Estas no fueron pautadas de antemano, ni estaban previstas realizarse cada una cierta cantidad de clase, sino que se ejecutaron en función de las necesidades del grupo de la clase.

Análisis y discusión de resultados

La puesta en escena de la pregunta generatriz generó, en ambas implementaciones, una vasta arborescencia de preguntas derivadas, que, por razones de extensión, en este trabajo no se exponen en su totalidad. En esta sección sólo se describen y analizan algunas de las preguntas derivadas que emergieron para el estudio e investigación, tanto del modelo logístico de crecimiento poblacional como del modelo asociado a la demanda bioquímica de oxígeno, en los años 2023 y 2024, respectivamente.

Estudio e investigación sobre el modelo logístico de crecimiento poblacional

En la implementación efectuada en el año 2023, luego de la discusión y debate con las preguntas derivadas originadas en la primera clase (**Figura 1**), se realizó una categorización de ellas en forma colectiva, lo que permitió a los estudiantes centrarse en el estudio e investigación de las condiciones y calidad del agua (**Figura 2**). De la información recopilada por los estudiantes, se acordó en una puesta en común, proseguir estudiando sobre cómo interviene la contaminación en la población acuática y qué lugar ocupa el oxígeno disuelto en agua. De este modo, emergió como saberes claves a estudiar, la dinámica de una población en general y la presencia de oxígeno disuelto en agua para el estudio de la contaminación de una masa de agua. En ese mismo acuerdo, los estudiantes optaron por empezar a indagar por la dinámica de una población. Se piensa que en esta elección subyace el predominio de los estudiantes por estudiar e investigar saberes referidos a la biología, debido a la afinidad con la carrera de formación, en detrimento de los temas más referidos a la química, como es el caso del oxígeno disuelto.


Hicimos la puesta en común en la clase con el resto de los compañeros y seleccionamos las siguientes preguntas para seguir trabajando:

1- ¿A qué seres vivos nos referimos?

2- ¿Qué condiciones debe presentar el agua? (temperatura, pH, dulce, salada, calidad, potable, sucia?

3- ¿Qué relaciones existen entre las masas de agua, su entorno (ecosistema) y los seres vivos?

4- ¿Pueden llegar a interactuar todas las masas de agua? (Se mezcla el agua potable con la contaminada)

5- ¿Qué es una masa de agua? ¿Cómo se calcula?

6- ¿El agua puede estar contaminada? ¿Cuánto? (grado de contaminación)

7- ¿Qué características tiene que presentar el agua para los diferentes organismos?

8- ¿Cómo influye la presencia de aguas residuales en la conservación de la vida acuática?

9- ¿Qué indicadores de contaminación se pueden utilizar para medir la calidad del agua en ríos?

10- ¿Qué lugar ocupa la fotosíntesis en el proceso de recuperación del agua?

11- ¿Se realiza un monitoreo continuo de los cambios del ecosistema a lo largo del tiempo?

12- ¿Qué medidas de conservación o restauración se están considerando para mejorar la calidad del hábitat acuático?

Figura 1. Preguntas derivadas y categorización realizada por los estudiantes en la implementación 2023

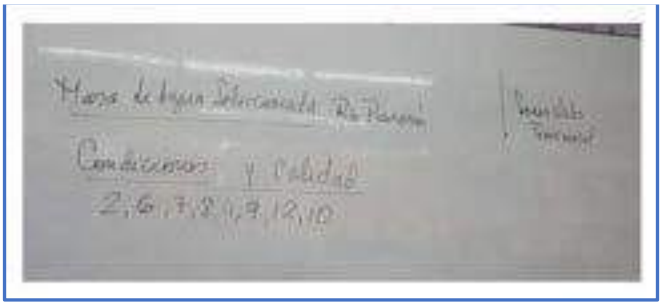


Figura 2. Categoría construida en forma colectiva en la implementación 2023

Anteriormente al trabajo con el modelo logístico de crecimiento poblacional, los estudiantes realizaron varias preguntas derivadas vinculadas al modelo de crecimiento exponencial, pero que por cuestiones de extensión en este trabajo no se presentan. El estudio del modelo logístico, surgió en función de interpelar el modelo exponencial por parte de los estudiantes, pues ellos manifestaron que, en la realidad una población no crece de manera indefinida en el tiempo, ya que, si este supuesto fuese cierto, la disponibilidad de los recursos en su medio sería ilimitado (Fernández von Metzen et al., 2024).

El abordaje matemático del modelo logístico de crecimiento poblacional permitió continuar el estudio de organizaciones matemáticas, previamente estudiadas con el modelo de crecimiento exponencial. Estas obras versaron en torno a problemas de valor inicial (PVI), ecuaciones diferenciales de primer orden, tasa de crecimiento media y tasa de crecimiento instantánea, derivadas de funciones reales de variable real e integrales indefinidas, entre otros. No obstante, este modelo permitió que emerjan saberes vinculados al crecimiento y decrecimiento de funciones, puntos críticos, valores extremos de una función, concavidad, punto de inflexión y asíntota horizontal, en funciones reales de variable real. El estudio de cada uno de estos saberes se realizó a partir de interrogar el modelo logístico, y realizar interpretaciones, en el contexto de dinámica poblacional, acerca de la información que proporciona el saber matemático en cuestión. Un ejemplo de ello, se puede observar en el extracto de uno de los grupos (**Figura 3**), en él se observa, el análisis que realizan sobre la información que proporciona el signo de la primera y la segunda derivada para el estudio del comportamiento de una población. Otro análisis interesante de subrayar, es el que emergió a partir de comprender el significado que alcanza el punto de inflexión y de la información que proporciona el signo de la derivada segunda en el contexto del modelo logístico. Allí, pudieron determinar que la ordenada del punto de inflexión se produce en $N = K/2$, siendo Kla capacidad de carga de la población en estudio y N representa el tamaño poblacional. Un análisis más exhaustivo sobre estas cuestiones puede ser consultado en un trabajo escrito por las autoras en (Fernández von Metzen et al., 2024).

¿Primera y segunda derivada?

La primera derivada de la función describe la tasa de cambio de la población en relación con el tiempo. Esta tasa de cambio representa el crecimiento o decrecimiento de la población en función del tiempo.
y justamente para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la población respecto al tiempo, debemos estudiar el signo de la primera derivada, que depende del término $1 - \frac{1}{K}.N(t)$
si N(t) es menor a K: crece
si N(t) es mayor a K: decrece

Figura 3. Interpretación del signo de la primera derivada por uno de los grupos en la implementación 2023

Estudio e investigación sobre la Demanda Bioquímica de Oxígeno (DBO)

A diferencia de la implementación del año anterior, en el año 2024, el estudio e investigación de los estudiantes estuvo centrado en cuestiones referidas a la DBO. Si bien, se había propuesto en la comunidad de estudio la investigación acerca de tres interrogantes centrales, tales como se mencionan a continuación, prevaleció continuar el REI a partir del tercer interrogante.

1) ¿Cómo se podría estudiar matemáticamente la proliferación de algas?

2) ¿Cómo se podría estudiar matemáticamente la intensidad de la luz en función de la profundidad en una columna de agua?

3) ¿Cómo se podría estudiar matemáticamente la concentración de oxígeno disuelto en agua para determinar la calidad del agua?

Para responder la tercera pregunta uno de los grupos propuso a la comunidad de estudio continuar investigando acerca de la DBO, ya que este constituye un indicador para analizar la contaminación de una masa de agua (**Figura 4**).

Durante la clase retomamos con una de las preguntas que se estaba estudiando las clases anteriores la cual era "¿Cómo se podría estudiar matemáticamente la concentración de oxígeno disuelto en agua para determinar la calidad del agua?"

Para poder responder esa pregunta recurrimos a una tesis donde nos proponía un concepto nuevo que fue la demanda bioquímica de oxígeno (DBO), y nos dice que es un parámetro utilizado para medir la cantidad de oxígeno disuelto que los microorganismos necesitan para descomponer la materia orgánica presente en un cuerpo de agua. La DBO es un indicador clave de la calidad de agua ya que nos proporciona información sobre la contaminación orgánica.

Ahora que sabemos que la DBO es un indicador que nos permite medir la calidad del agua la pregunta que nos proponemos es si "¿Cómo se podría estudiar matemáticamente la DBO?".

Figura 4. Extracto de la producción del grupo 1 en la implementación 2024

El estudio matemático de la DBO hizo emerger el modelo de Streeter & Phelps (**Figura 5**). Esta propuesta significó adentrarse a la investigación de ecuaciones diferenciales y problemas de valor inicial. No obstante, fue necesario emprender en primer lugar, el estudio de derivadas de funciones reales de variable real, puesto que el modelo establece una relación entre la tasa de oxidación biodegradable y la cantidad de materia orgánica presente.
Para el estudio de derivadas se destinó varias clases, que consistieron en comprender la definición de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, la interpretación geométrica de cada una de ellas, y su relación con el estudio de la DBO. A partir querer comprender la interpretación geométrica de la derivada en el contexto de la DBO, se hizo necesario pensar en el trazado de la curva que describe la concentración de materia orgánica remante en el agua y la concentración de materia orgánica satisfecha. Uno de los grupos propuso a la

comunidad de estudio un gráfico que habían extraído de un video de un sitio web, pero que aún no comprendían totalmente (**Figura 6**).

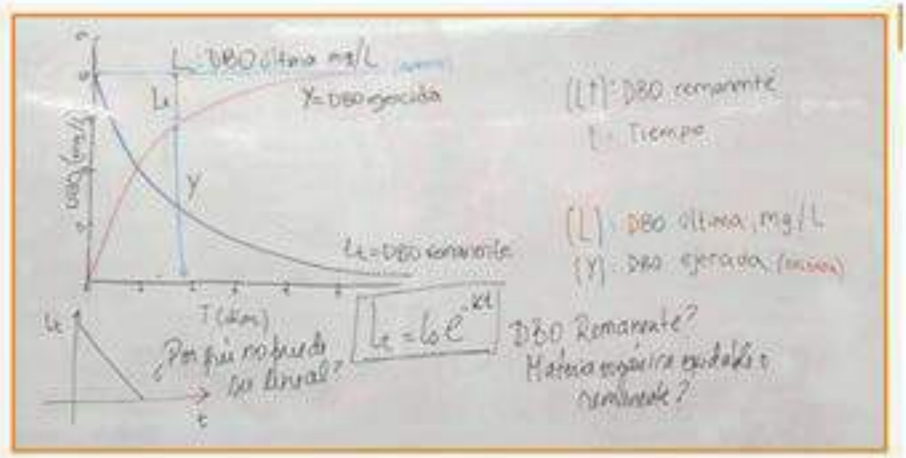
22\10\2024

Continuamos con la pregunta de ¿Cómo se podría describir matemáticamente la DBO?

El grupo 4 aporto un modelo matemático que nos podría ser útil para responder la pregunta; el modelo de Streeter y Phelps que establece que la tasa de oxidación bioquímica de la materia orgánica es directamente proporcional a la cantidad de materia orgánica biodegradable presente. Es el siguiente:

$$\underbrace{\frac{dL_t}{dt} = -kL_t}_{\text{Ecuación diferencial}} \qquad L_t(0) = L_0$$

Figura 5. Modelo propuesto por un grupo de estudiantes para el estudio de la DBO



Las preguntas que surgieron a partir de esta grafica fueron las siguientes:

- ¿La DBO y materia orgánica remanente son lo mismo?
- ¿Por qué la gráfica no puede ser lineal?

Figura 6. Gráfico construido por los estudiantes en el pizarrón durante el estudio de la DBO

La construcción del gráfico originó nuevas preguntas derivadas. Algunas de ellas fueron: ¿por qué la gráfica no puede seguir un comportamiento lineal?, ¿Qué representa la línea punteada en color azul?, ¿Qué relación guardan la DBO ejercida y la DBO satisfecha?, ¿Es lo mismo hablar de DBO remanente que de materia orgánica remanente?, entre otras. Junto a tales interrogantes, un grupo propuso la expresión $L_t = L_0 e^{-kt}$, alegando que eso era lo que habían visto en un video pero que no sabían cómo se la había obtenido, ni qué relación tenía con el modelo inicial. Puesto que para ese momento del REI ya habían investigado acerca de qué es una ecuación diferencial y de qué trata un PVI, surgió a modo de interrogante, si la expresión dada para L_t representa la solución del PVI (**Figura 7**). Cabe mencionar que, si bien en el informe escrito el grupo de estudiantes presenta dos expresiones para L_t, en el debate colectivo no se interpela por qué hay dos expresiones para la concentración de materia orgánica, ni qué relación existe entre ambas.

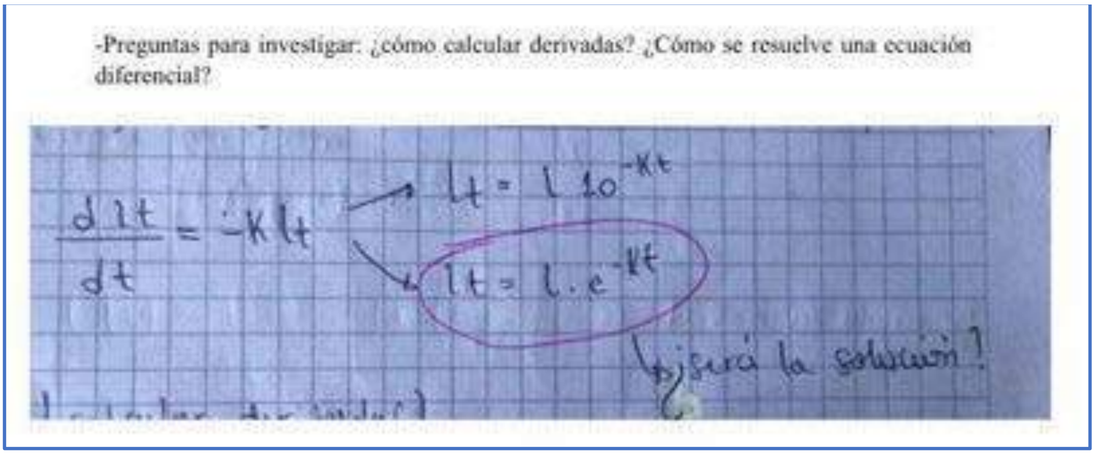


Figura 7. Expresiones propuestas por un grupo de estudiantes para la concentración de materia orgánica remanente.

Para poder determinar si la expresión dada es solución de la ecuación diferencial, los estudiantes recuperaron el concepto de solución de ecuación algebraica. Sin embargo, notaron que necesitaban ampliar lo estudiado de derivadas para poder hacer la sustitución en el primer miembro de la ecuación. Esto indujo el estudio de reglas de derivación. Luego de haber comprobado la igualdad (**Figura 8**), emerge un nuevo interrogante. Puesto que los estudiantes ya contaban con la posible solución de la ecuación diferencial, fruto de su investigación, surgió la inquietud de cómo se obtuvo dicha expresión. En general, ante una ecuación diferencial de primer orden, como aparece en el modelo propuesto, si no se cuenta con la posible solución de antemano, ¿cómo se la resuelve? Este nuevo interrogante movilizó a la comunidad de estudio a investigar sobre métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden y lo referido a integrales indefinidas.

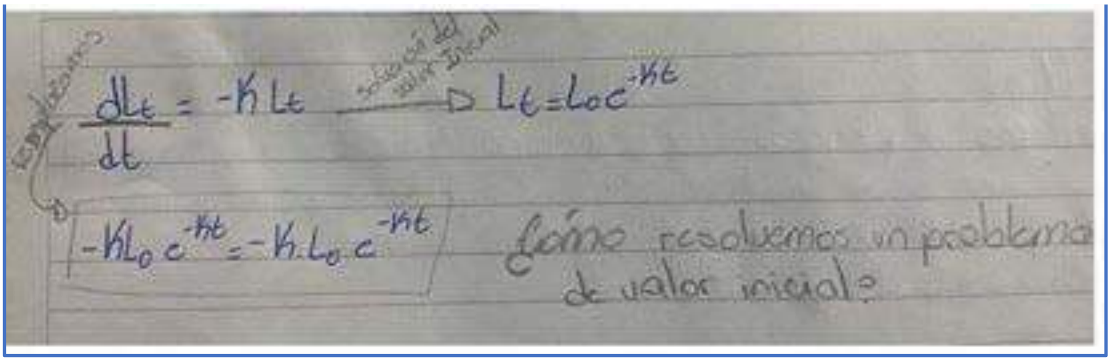


Figura 8. Interrogante que originó el estudio de métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de primer orden

Conclusiones

Concluimos que la pregunta generatriz propuesta posee gran potencial para el estudio de una matemática con sentido en la formación de profesores en biología, permitiendo la construcción y reconstrucción de diferentes saberes matemáticos y no matemáticos. A través del análisis de las producciones de los estudiantes, se observa que esta forma de enseñanza propicia un espacio fructífero para establecer vínculos entre la matemática y otras disciplinas de la formación básica de los estudiantes, además de posibilitar el estudio de modelos matemáticos de manera funcional a la biología. Por último, creemos que los resultados de esta investigación pueden representar una contribución valiosa para la planificación y análisis de futuras prácticas de enseñanza de la matemática en carreras donde la biología forma parte de su plan de estudios.

Referencias bibliográficas

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis Doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires. Libros del zorzal.

Camarena Gallardo, P. (2021). *Teoría de la matemática en el contexto de las ciencias*. Santiago del Estero, Editorial Edunse.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire*. http://yves.chevallard.free.fr

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la Théorie Anthropologique du Didactique. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2009). Didactique fondamentale: forum des questions. Université de Provence - Département des sciences de l'éducation.

Chevallard, Y. (2013). La Matemática y el mundo: Superar el Horror Instrumental. En: *La Matemática en la escuela, por una revolución epistemológica y didáctica* (pp. 35-82). Libros del Zorzal, Buenos Aires.

Chevallard Y., Bosch M. (2014). Didactic Transposition in Mathematics Education. In: Lerman S. (eds) Encyclopedia of Mathematics Education (pp. 170 174). Springer, Dordrecht.

Chevallard, Y. (2017). ¿Por qué enseñar matemáticas en secundaria? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, (1), 159-169.

Chevallard, Y. (2022). What is questioning the world? Towards an epistemological and curricular break. *7th International Conference on the Anthropological Theory of the Didactic (CITAD 7)*. Bellaterra, Barcelona, Spain. Disponible en https://citad7.sciencesconf.org/data/pages/Slides_YC_CITAD_7_1_1_.pdf

Fernández von Metzen, G., Parra, V., & Schuster, J. (2024). Enseñar matemática en la formación de Profesores en Biología: modelo logístico de crecimiento poblacional. *Revista De Ciencia Y Tecnología*, *42*(1), 86–93. https://doi.org/10.36995/j.recyt.2024.42.010

Hernández, R.; Fernández, C; Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación*. México D. F.: Mc Graw Hill

Otero, M. R., Fanaro, M. A., Córica, A. R., Llanos, V. C., Sureda, P. y Parra, V. (2013). *La Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de Matemática*. Buenos Aires: Editorial Dunken.

Parra, V., y Otero, M. R. (2017). Enseñanza de la matemática por recorridos de estudio e investigación: indicadores didáctico-matemáticos de las "dialécticas". Educación Matemática, 29(3), 9-50.

Análisis del problema de tráfico y movilidad en el transporte urbano en la ciudad de Medellín por medio de la modelización matemática con Álgebra Lineal

Fermín Rafael ÁLVAREZ MACEA

Universidad de Antioquia, Politécnico Colombiano Jaime Isaza Cadavid, Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

fermin.alvarez@udea.edu.co

Resumen

El estudio del tráfico y la movilidad urbana en Medellín se ha vuelto esencial para enfrentar los retos del transporte sostenible. Utilizando álgebra lineal para modelar el flujo de tráfico, este trabajo examina el impacto social y ambiental de la congestión vehicular en la ciudad. Se formularon sistemas de ecuaciones que reflejan el comportamiento del tráfico en diferentes zonas, considerando factores como la contaminación y el tiempo perdido en el transporte. Los resultados de diferentes modelos y la simulación con algunas herramientas informáticas revelan que la optimización de rutas de autobuses y la promoción del uso de transporte público podrían reducir significativamente la huella de carbono de la ciudad. Este enfoque matemático no solo ayuda a mejorar la eficiencia del transporte, sino que también promueve un desarrollo urbano más sostenible y responsable, además la enseñanza del Álgebra Lineal con estudiantes de ingenierías influye en unas matemáticas más realistas.

Palabras clave: Modelización matemática. Contexto de aprendizaje. Enseñanza matemática universitaria. Educación matemática realista. Enseñanza Álgebra lineal. Educación matemática en formación ingenieril.

Introducción

Es fundamental buscar maneras de involucrar y mejorar los procesos de aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. La meta es que el conocimiento matemático que se adquiere en la escuela sea relevante y útil. La modelación, que une los conceptos de "modelización" y "educación" (Álvarez-Macea y Costa), se presenta como una herramienta valiosa para conectar las matemáticas con la realidad, lo que transforma tanto el entorno como al estudiante que aprende. Esto implica una constante reconstrucción y enriquecimiento de significados (Córdoba, 2014). Se enfatiza la importancia de vincular el conocimiento matemático con otras áreas del saber, lo cual es crucial en la formación de ingenieros (Plaza, 2015; Romo-Vázquez, 2015). Según Salett y Hein (2004), la modelación no solo ayuda a los estudiantes al fomentar un aprendizaje matemático en contextos de otras disciplinas, sino que también mejora sus habilidades para interpretar y resolver problemas. Este enfoque aumenta la motivación, el compromiso y el esfuerzo de los estudiantes hacia las matemáticas (Krawitz y Schukajlow, 2018).
Hasta ahora en la investigación, no es fundamental determinar cuántos estudiantes aprueban o reprueban, sino más bien analizar cómo perciben, se sienten motivados e interesados en la implementación del proceso de modelación en el aula. El objetivo es describir este proceso en el que un estudiante de Álgebra Lineal examina el tráfico vehicular en ciertas áreas de Medellín y algunos puntos críticos de movilidad en el área metropolitana, abordándolo como un problema real. A lo largo de este proceso, los estudiantes interactúan, formulan hipótesis y desarrollan un modelo para construir y analizar diversos conceptos matemáticos relacionados con el Álgebra Lineal, como la formulación y resolución de sistemas de ecuaciones lineales, la naturaleza de las soluciones obtenidas y su interpretación a través de conceptos físicos como velocidad, tiempo, aceleración y análisis gráfico. El objetivo final es entender cómo esta experiencia influye en su aprendizaje y comprensión de los temas, contribuyendo a su formación como ingenieros mediante una matemática más realista que les ayude a resolver problemas contextualizados.

La modelización matemática y su importancia en la enseñanza del Álgebra Lineal

La modelación matemática aborda problemas que no son estrictamente matemáticos utilizando herramientas matemáticas (Kaiser & Maaß, 2007). Este enfoque ayuda a entender mejor los fenómenos al ofrecer diversas formas de representación y dar sentido a las actividades matemáticas (Molyneux-Hodgson, 1999). El proceso de modelación implica tomar un problema del mundo real, identificar las variables más relevantes, establecer relaciones entre ellas y convertirlas en un formato matemático para generar nuevos conocimientos (Sadovsky, 2005). Esto requiere habilidades matemáticas que permiten obtener una variedad de soluciones que reflejan el comportamiento del problema, lo que otorga a quien lo resuelve un papel activo y un mayor control en el proceso de resolución (Castro & Castro, 1997).
La modelación se presenta como una herramienta esencial para el aprendizaje en el aula, siendo aplicable en campos como la ingeniería, los negocios y las ciencias sociales, así como en la educación matemática (Plaza, 2016; Trelles & Alsina, 2017). Además de proporcionar un sentido a los conceptos matemáticos e integrar diferentes áreas del conocimiento, fomenta una manera alternativa de interpretar, razonar y actuar al conectar lo abstracto y formal con situaciones problemáticas (Blomhøj, 2004). Esto ayuda a construir bases cognitivas sólidas y facilita el desarrollo de diversos conceptos matemáticos.
Blum & Borromeo-Ferri (2009) destacan que la modelación es una herramienta que permite a los estudiantes comprender contextos y cultivar una actitud positiva hacia las matemáticas. En relación con el fortalecimiento de competencias científicas, Arrieta et al. (2007) subrayan la importancia de practicar la modelación, ya que ayuda a los estudiantes a crear modelos y argumentar, consolidando así su perspectiva científica del entorno. Por otro lado, Gabardo (2006) señala que la modelación transforma la percepción de las matemáticas, pasando de un enfoque centrado en la repetición y métodos analíticos a uno que prioriza la construcción, comprensión y aplicación de métodos cualitativos y numéricos (Plaza, 2016). En resumen, la modelación matemática no solo enriquece el aprendizaje, sino que también transforma la forma en que los estudiantes se relacionan con las matemáticas y su aplicación en el mundo real.

El papel de la Modelación matemática en la formación de los ingenieros

En los planes de estudios de los estudiantes de ingeniería se puede evidenciar la importancia del núcleo básico de las matemáticas como cimiento sólido en su área profesional y para tener unas bases conceptuales y procedimentales en distintas áreas disciplinares de las diversas ingenierías.

Al respecto, Rendón y Villa (2016), definieron las matemáticas como un área de conocimiento que promueve el desarrollo de habilidades para desempeñarse en los ámbitos académico y profesional, es decir, de una forma directa con los objetos matemáticos en su proceder.

En este orden de ideas, la Modelación matemática es una herramienta que le permite al sujeto interiorizar conocimientos, habilidades y competencias, para enfrentarse a la resolución de problemas en el ámbito ingenieril con una proyección hacia el futuro, donde el surgimiento de necesidades y problemas del medio así lo demandan a cada momento. En consecuencia, saber interpretar situaciones del mundo "real", extraer información con datos específicos de un contexto específico, modelar por medio de las matemáticas y comprender las variables inmersas en el campo social de cualquier ingeniera le servirá para su actuar como ingeniero.

En sintonía con lo anterior, una de las fortalezas de la Modelación matemática en la formación de ingenieros es la posibilidad de un escenario de diálogos entre los saberes de los dominios de las matemáticas y otros dominios específicos de las áreas disciplinares, lo que garantiza el desarrollo de investigaciones sincronizadas con un engranaje entre lo matemático y lo ingenieril, para la búsqueda de la solución de un problema. Lo anterior, aunque no todo se resuma en esa expectativa, dado que la Modelación matemática debe trascender más allá de un factor de motivación en el aula o de buscar una utilización o aplicación de las matemáticas, tal como lo expresaron Villa- Ochoa y Berrio (2015):

No se trata solo un aprendizaje de contenidos específicos en un contexto, ni desarrollo de habilidades para identificar formas del contexto equiparables con las formas matemáticas; Por el contrario, se trata de permitir una discusión entre las matemáticas y el contexto más allá de una relación utilitarista. (p. 1)

La Modelación matemática, como función esencial en la formación de ingenieros, permite reflexionar sobre distintos saberes como el pedagógico, el disciplinar y saberes didácticos por parte de los sujetos que están en el interior de los cursos de ciencias básicas y en las reestructuraciones del currículo en las facultades de ingenierías. Otro aspecto importante es el análisis de la teoría versus prácticas ingenieriles, puesto que actualmente se sabe de la importancia de las matemáticas en los pensum de las carreras de ingenierías. Sin embargo, los cambios de roles en la enseñanza han ido modificando la formación de los ingenieros y la Modelación matemática ha contribuido al desarrollo de modelos en diferentes contextos.

Con miras a la cuarta revolución industrial, el tratamiento de grandes datos (Big data), las proyecciones de varias variables en la era digital sobre sucesos que se pueden dar a futuro, el estudio de fenómenos y la Modelación matemática ponen de manifiesto la necesidad de usar y adaptar dichos modelos matemáticos en correspondencia con los requerimientos de una comunidad o desarrollo de productos a nivel empresarial, respondiendo así a las necesidades de una sociedad cambiante a cada momento. Desde ese punto de vista, la Modelación Matemática no debe agotarse en el uso de modelos; por el contrario, se propone asumirse como una actividad que posibilita el significado de la conceptualizaciones, procedimientos y actuaciones en relación con el campo de formación (Rendón y Villa, 2016).

Otro punto de vista importante con respecto al papel de la Modelación matemática en la formación de ingenieros es el planteamiento de Erbas et al. (2014), quienes hicieron referencia al concepto de sistema dentro la Modelación Matemática, estableciendo que existen dos sistemas: el primero relacionado con los sistemas conceptuales que posee el estudiante en sus estructura mental; y el segundo con aquellas nociones externas como, por ejemplo, los sistemas complejos que se encuentran en la naturaleza, es decir, una analogía entre un sistema conocido y otro desconocido.

En la misma línea de pensamiento sobre la importancia de la Modelación matemática en la formación de los ingenieros, se propone tener una apuesta a la renovación y restructuración en el currículo de las ingenierías en Colombia, puesto que las políticas públicas no están encaminadas a dichas finalidades dentro del sistema educativo. Esto último, dado que a través de los lineamientos curriculares de matemáticas y del Plan Nacional Decenal de Educación (PNDE) 2016-2026 no se ha pensado en los desafíos, caminos y proyecciones que debe tener la educación en Colombia, en este caso, las carreras de ingenierías. Como se mencionó anteriormente, estamos en la era de la cuarta revolución industrial, donde las habilidades y competencias del futuro ingeniero deben de estar a la altura de una sociedad competitiva.

Modelación matemática, la resignificación de conceptos con experiencias contextualizadas

En la actualidad, es fundamental que el aprendizaje de las matemáticas en los entornos educativos esté vinculado a situaciones reales, lo que permite a los estudiantes abordar problemas concretos y proponer soluciones efectivas (Kaiser, 2010). Sin embargo, la enseñanza tradicional de matemáticas a menudo carece de actividades prácticas que conecten los conceptos matemáticos con fenómenos del mundo real (Córdoba, 2014). La modelación matemática, que generalmente se presenta al final de los capítulos como ejercicios de aplicación, no se considera una fuente de conocimiento relevante debido a su falta de contexto. Por lo tanto, es esencial que la modelación se convierta en una herramienta de interacción con la realidad (Arrieta, 2003).

En este sentido, los conceptos del Álgebra Lineal pueden adquirir un nuevo significado al aplicarse en el análisis del tráfico vehicular en Medellín, lo que le otorga un sentido práctico y relevante. A pesar de la importancia de la modelación en los planes de estudio de matemáticas (Villa-Ochoa y Ruiz, 2009; Sarmiento-

Rivera et al., 2020), se observa una falta de actividades experimentales que permitan a los estudiantes conectar los conceptos matemáticos con diversas áreas del conocimiento, dándoles así un sentido y utilidad. La realización de experimentos es poco común, a pesar de que las matemáticas han avanzado gracias a su interacción con fenómenos del mundo físico (Martínez et al., 2005). Esta situación ha llevado a subestimar la capacidad de construir conceptos matemáticos a través de la experimentación, ya sea en el aula o en un laboratorio, ya que erróneamente se ha creído que estas actividades son exclusivas de las ciencias naturales.

La conexión entre la realidad y el entorno es crucial en la enseñanza de las matemáticas. La realidad se utiliza como punto de partida para identificar fenómenos y problemas que se pueden abordar matemáticamente, ya que existe una relación recíproca entre ambos (Córdoba, 2014). Según Blum y Ferri (2009), el concepto de realidad abarca todo lo que va más allá de las matemáticas, incluyendo elementos de la naturaleza, la sociedad y las actividades cotidianas. Esta realidad está relacionada con el contexto de los estudiantes, es decir, con su entorno social, cultural y científico (Parra-Sandoval & Villa-Ochoa, 2017).

Siguiendo la perspectiva de la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal, las matemáticas se consideran una actividad humana que organiza y estructura la realidad, incluyendo el ámbito de las propias matemáticas (Freudenthal, 1991). El enfoque "realista" se centra en situaciones problemáticas que los estudiantes pueden entender, en lugar de en la autenticidad de los problemas en sí (Van Den, 2003). Esto no implica que la conexión con la vida cotidiana sea irrelevante, sino que los contextos pueden ser tanto imaginarios como estructurados matemáticamente, siempre que sean percibidos como auténticos por los estudiantes.

La realidad, según D'Ambrosio (2009), se compone de fenómenos interrelacionados que proporcionan datos y estímulos para la toma de decisiones. En resumen, la realidad abarca todo lo que existe y ocurre, tanto dentro como fuera del ámbito escolar, y puede ser percibida o imaginada por los estudiantes a través de sus sentidos y procesos mentales. La subjetividad del estudiante y su contexto influyen en su interpretación y análisis (Córdoba, 2014). Por lo tanto, el contexto se convierte en un elemento esencial para comprender la realidad y construir significado a partir de ella.

Discusiones y reflexiones finales

La modelización en el aula de matemáticas es un proceso que fomenta la interacción entre los estudiantes y promueve el desarrollo del conocimiento a través de la colaboración y el diálogo, tal como lo mencionan Fernández y Angulo (2019). No se trata solo de un contenido adicional o de una técnica para resolver problemas, sino de una herramienta fundamental que permite a los estudiantes ver cómo sus descubrimientos matemáticos se relacionan con situaciones de la vida real. Esto resalta la conexión esencial entre las matemáticas y los contextos cotidianos.

Por ejemplo, al abordar problemas prácticos como el análisis del tráfico vehicular en la ciudad de Medellín y su área metropolitana, los estudiantes pueden aplicar conceptos matemáticos a situaciones reales y específicamente de la asignatura Álgebra lineal, lo que les ayuda a entender la relevancia de lo que están aprendiendo. Este enfoque se apoya en investigaciones previas que destacan la importancia de la modelización en la educación, especialmente en la formación de ingenieros, donde la aplicación de las matemáticas es crucial (Plaza, 2017; Roa et al., 2017; Agudelo y García, 2016).

La modelización no solo enriquece el aprendizaje, sino que también se convierte en una opción educativa valiosa y motivadora para los estudiantes (Córdoba, 2014). En el contexto colombiano, es vital que la enseñanza del Álgebra Lineal y otras áreas matemáticas se enfoquen en la reinterpretación del conocimiento, promoviendo un ambiente de aprendizaje donde la interacción entre estudiantes y profesores sea clave. Para ello, es fundamental integrar la modelización en la planificación curricular y en los programas de estudio, siguiendo las recomendaciones de Villa-Ochoa y Ruiz (2009) y Martínez et al. (2005).

Además, el interés y la motivación que los estudiantes muestran hacia la modelización subrayan la necesidad de estandarizar su implementación en el aula (Olarte, 2019). Esto no solo mejora la comprensión de conceptos matemáticos, sino que también prepara a los futuros ingenieros para enfrentar desafíos reales en su campo, fomentando una educación más realista y contextualizada que responda a las necesidades del entorno colombiano. En resumen, la modelización es una herramienta poderosa que puede transformar la enseñanza del Álgebra Lineal, haciendo que las matemáticas sean más accesibles y relevantes para los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Agudelo, Y. M., & García, L. I. (2016). Desarrollo de la estimación de cantidades continuas en la magnitud volumen a través de la implementación de la modelación como estrategia de enseñanza y aprendizaje. UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática, (46), 139-158. https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/565/314

Álvarez-Macea, F., & Costa, V. A. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Eco Matemático, 10(2), 65-78. https://doi.org/10.22463/17948231.2594

Arrieta, J. (2003). Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula (Tesis doctoral no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. https:// www.matedu.cicata.ipn.mx/tesis/doctorado/ arrieta_2003.pdf

Arrieta, J., Carbajal, H., Díaz, J., Galicia, A., Landa, L., Mancilla, V., Medina, R., & Miranda, E. (2007). Las prácticas de modelación de los estudiantes ante la problemática de la contaminación del río de la Sabana. En C. Crespo (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 20 (pp. 473-477). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes.edu.co/5299/1/ ArrietaLaspr%C3%A1cticasALME2007.pdf

Basurto, A., Reséndiz, J., & Sauza, M. (2016). La matemática formal, una alternativa para la resolución de problemas técnicos en la empresa. El Cálculo y su Enseñanza, 7, 46-58. https://doi. org/10.61174/recacym.v7i1.96

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby, K. Walby, International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics (pp. 145-159). National Center for Mathematics Education. https://www.famaf. unc.edu.ar/~revm/Volumen23/digital23-2/ Modelizacion1.pdf

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-48. https://proxy.furb.br/oj

Córdoba, F. J. (2014). Elementos de modelación en matemática escolar: Una práctica de aprendizaje para la formación en tecnología e ingeniería. Editorial Académica Española. Creswell, J. W. (2013). Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Approaches. Sage Publications.

D'ambrosio, U. (2009). Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 89-98. https:// bu.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/ view/1624/1080

Fernández, O., & Angulo, M. (2019). El proceso de modelación en clase de matemática. Scientia et Technica, 24(1), 96-103. https://doi. org/10.22517/23447214.1726.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education: China lectures. Kluwer Academic Publishers.

Gabardo, L. (2006). Modelación Matemática y ontología. En G. Martínez (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 19 (pp. 317-323). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. http://funes.uniandes. edu.co/5536/1/GabardoModelacionAlme2006. Pdf

Rendón, P., & Villa, J. (2016). Articulación entre la matemática y el campo de acción de un futuro ingeniero de diseño de producto. Componentes de un proceso de Modelación Matemática. Revista de la Facultad de Ingeniería U.C.V., 31(2), 21-36.

Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz, M. (2009). Modelación en Educación Matemática. Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares Colombianos. Revista VirtualUniversidad Católica del Norte, (27), 1-21. https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102.

Modelización matemática en educación a distancia

Estefanía CALVO

Universidad Nacional de Villa María, Universidad Católica de Salta, Argentina

ecalvo@unvm.edu.ar

Resumen

El trabajo con modelización matemática en educación a distancia suele considerarse inviable cuando se trata de grandes volúmenes de estudiantes. Sin embargo, esta experiencia muestra cómo se logra diseñar propuestas donde los propios estudiantes seleccionan subtemas dentro de una temática común, favoreciendo un aprendizaje activo y significativo. En particular, se presenta una actividad desarrollada con más de 3800 estudiantes en la que se les plantea analizar y fundamentar, desde el punto de vista matemático y económico, en qué momento es conveniente faenar o vender un animal destinado al consumo de carne.

Para abordar esta cuestión, los estudiantes investigan sobre diferentes razas, recopilan datos relevantes, proponen modelos matemáticos para describir el crecimiento y la ganancia de peso en función del tiempo mediante herramientas como GeoGebra, analizan la rentabilidad de distintas decisiones y evalúan la sensibilidad del modelo ante variaciones de parámetros. Además, la actividad se enriquece a través del intercambio en foros de discusión, donde los estudiantes analizan y mejoran las producciones de sus pares, simulando dinámicas del mundo laboral. Se evidencia que, incluso en entornos masivos de educación a distancia, se incorpora con éxito la modelización matemática de manera efectiva para el desarrollo de competencias profesionales.

Palabras clave: Modelización matemática. Educación a distancia. Competencias profesionales. Entornos virtuales de aprendizaje.

Introducción

En la enseñanza universitaria de la matemática, la educación a distancia ha expandido sus posibilidades en los últimos años, no solo en términos de acceso, sino también en cuanto a la diversificación de perfiles estudiantiles. Sin embargo, este crecimiento ha estado acompañado por desafíos didácticos significativos, especialmente cuando se trabaja con grandes volúmenes de estudiantes. Entre ellos, uno de los más relevantes es el diseño de propuestas que permitan superar el enfoque tradicional centrado en la resolución mecánica de ejercicios, y que promuevan un aprendizaje activo, significativo y contextualizado.

En ese marco, la modelización matemática se ha consolidado como una perspectiva valiosa para integrar el saber matemático con situaciones reales, demandando al estudiante no solo aplicar herramientas técnicas, sino también interpretar fenómenos, tomar decisiones y argumentar sus elecciones. No obstante, persiste la idea de que este tipo de enfoque resulta inviable en entornos virtuales, en particular cuando se trata de cohortes numerosas, heterogéneas y con un seguimiento pedagógico predominantemente asincrónico.

La presente propuesta parte del supuesto contrario: que resulta viable implementar experiencias genuinas de modelización matemática en educación a distancia, siempre que se adopten decisiones de diseño didáctico que contemplen la autonomía del estudiante, el uso pedagógico de las tecnologías y la organización de la propuesta en torno a consignas abiertas, con espacio para la exploración, la justificación y la comunicación de ideas.

Frente a este panorama, resulta pertinente preguntarse: ¿cómo puede diseñarse una propuesta de modelización matemática que, aún en escenarios masivos y a distancia, convoque a los estudiantes a investigar, modelar y argumentar en torno a fenómenos reales? ¿Qué condiciones didácticas deben garantizarse para que estas propuestas sean viables, formativas y sostenibles? Estas preguntas orientan el desarrollo del presente trabajo.

Modelización matemática en educación a distancia: antecedentes y fundamentos didácticos

El lugar de la modelización matemática en la enseñanza ha sido discutido desde múltiples perspectivas teóricas. Autores como Blum y Leiss (2007) o Borromeo Ferri (2010) han destacado que modelizar implica mucho más que aplicar procedimientos matemáticos sobre datos contextualizados. Se trata de un proceso complejo que requiere interpretar una situación, construir un modelo, trabajar con él matemáticamente, validar resultados y reformular el modelo en función de su adecuación a la situación de origen. Desde esta mirada, la modelización no es un adorno contextual, sino una vía para que los estudiantes articulen la matemática con la comprensión del mundo.

En particular, la modelización permite ubicar a los estudiantes en el centro del proceso de aprendizaje, asumiendo decisiones relevantes, seleccionando variables, justificando elecciones y comunicando sus resultados con base en evidencia. Es por ello que varios autores han planteado su potencial para el desarrollo de competencias profesionales, especialmente en carreras que requieren capacidad analítica y fundamentación técnica (Kaiser & Sriraman, 2006; Galbraith et al., 2007). Este enfoque, que privilegia problemas abiertos y decisiones no pautadas, contrasta con prácticas habituales donde los problemas se reducen a ejercicios cerrados, con datos irrelevantes o acomodados para la clase de matemática, impidiendo un trabajo genuino de modelización

Ahora bien, si modelizar en contextos presenciales ya implica desafíos para el docente —como diseñar tareas abiertas, habilitar múltiples estrategias, sostener procesos de indagación y discusión— hacerlo en contextos de educación a distancia y, además, con cohortes masivas, parece aún más complejo. La imagen de una enseñanza fragmentada, centrada en la transmisión de contenidos y con escasa interacción real entre estudiantes, ha llevado a pensar que la modelización matemática no es viable en estas condiciones. Sin embargo, como señala Pochulu (2024), la incorporación de tecnologías digitales y el rediseño intencional de las consignas permiten revertir esta situación, generando propuestas ricas, abiertas y desafiantes, incluso en entornos virtuales.

En esta línea, la modelización matemática en educación a distancia no puede limitarse a digitalizar actividades tradicionales. Es necesario que las tareas se piensen desde su diseño para habilitar el protagonismo del estudiante, su autonomía en la toma de decisiones y su capacidad de articular saberes para resolver situaciones relevantes. Tal como sostienen Stillman, Kaiser y Lampen (2021), el trabajo con modelización en línea puede favorecer aprendizajes profundos cuando se acompaña de recursos adecuados y estrategias de interacción colaborativa. Además, desde el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino et al., 2007), la modelización puede entenderse como una práctica social en la que se movilizan y transforman objetos y procesos matemáticos en función de un propósito contextual.

Esta visión permite analizar tanto las tareas como las gestiones docentes que median su implementación, considerando el tipo de práctica matemática que se promueve en cada caso. Los entornos virtuales ofrecen algunas ventajas para estas propuestas: la posibilidad de acceder a simuladores, realizar análisis en hojas de

cálculo o GeoGebra, construir informes colaborativos en plataformas digitales, o debatir argumentos en foros asincrónicos. Sin embargo, también demandan un trabajo cuidadoso en el diseño de las consignas, la mediación docente, la evaluación formativa y la construcción de comunidad en la distancia.
La experiencia que se presenta en esta conferencia parte de estos desafíos. Se plantea como una muestra concreta de cómo puede organizarse una actividad de modelización matemática en un contexto de educación a distancia, con más de 3800 estudiantes, de modo que promueva el desarrollo de competencias relevantes para la formación profesional sin renunciar a la riqueza didáctica que implica el trabajo con problemas abiertos.

Diseño de tareas de modelización matemática en contextos masivos

La enseñanza de la matemática en la universidad enfrenta nuevos desafíos cuando se desarrolla en entornos virtuales y con cohortes masivas. En estos escenarios, muchas veces se tiende a privilegiar estrategias de enseñanza estandarizadas, altamente estructuradas y centradas en la transmisión de contenidos, por considerarse más viables en términos organizativos. Sin embargo, este enfoque puede limitar las oportunidades para el desarrollo de competencias profesionales y para la construcción significativa de herramientas matemáticas. En contraste, las tareas de modelización matemática ofrecen una alternativa potente, en tanto permiten articular el saber matemático con problemas complejos del mundo real, promover la toma de decisiones, y fomentar el pensamiento crítico y la argumentación con base en datos y modelos.
Diseñar tareas de modelización en entornos virtuales masivos requiere reconsiderar varias dimensiones del proceso didáctico. En primer lugar, el tipo de situación problema: no cualquier actividad contextualizada constituye una genuina tarea de modelización. Como advierte Alsina (2007), muchas propuestas que se presentan como vinculadas a la realidad no son más que versiones maquilladas de ejercicios tradicionales, donde las decisiones ya están tomadas por el docente, los datos son artificiales, y no hay espacio para que los estudiantes definan el problema ni seleccionen las herramientas para resolverlo. En este tipo de actividades, el contenido matemático aparece como un fin en sí mismo, en lugar de ser una herramienta para comprender e intervenir en la realidad.
Frente a este riesgo, es necesario construir consignas que habiliten decisiones auténticas: ¿cuál es el fenómeno a estudiar?, ¿qué variables son relevantes?, ¿qué datos deben buscarse o estimarse?, ¿cómo representar el problema?, ¿qué tipo de modelo puede describir el comportamiento observado?, ¿cómo se validan las decisiones tomadas? Una tarea de modelización debe preservar la incertidumbre que caracteriza a los problemas reales, permitiendo que los estudiantes se enfrenten a dilemas, discrepancias y alternativas válidas, y no solo a la aplicación mecánica de algoritmos ya conocidos (Pochulu, 2024).
La complejidad de implementar este tipo de tareas se incrementa cuando el número de estudiantes es elevado. No obstante, investigaciones y experiencias recientes muestran que no solo se puede llevar adelante propuestas de modelización en contextos virtuales masivos, sino que estas pueden enriquecer significativamente el aprendizaje si se gestiona adecuadamente la autonomía de los estudiantes y se aprovechan los recursos tecnológicos disponibles (Pochulu & Font, 2025). Una de las estrategias más efectivas en este sentido es ofrecer una situación general que admita múltiples recortes temáticos, de modo que cada estudiante pueda delimitar su objeto de trabajo de acuerdo con sus intereses, disponibilidad de datos o afinidad con ciertos contextos profesionales.
Esta apertura permite que emerjan diferentes caminos de resolución, lo que no solo enriquece la diversidad de respuestas, sino que también favorece el desarrollo de competencias fundamentales en la formación universitaria: la formulación de problemas, la interpretación crítica de información, el uso de herramientas digitales para simular escenarios, y la comunicación de resultados en lenguaje técnico. Además, el trabajo en entornos virtuales facilita la incorporación de tecnologías como GeoGebra, hojas de cálculo, simuladores interactivos o plataformas de visualización de datos, que potencian el análisis de situaciones dinámicas, no lineales o sensibles a variaciones de parámetros.
Otro componente clave en el diseño de tareas de modelización en educación a distancia es la organización del proceso de trabajo. El uso de foros asincrónicos, rúbricas explícitas, consignas que explicitan el producto esperado (como un informe argumentado), y mecanismos de retroalimentación entre pares, permite gestionar la enseñanza sin resignar profundidad conceptual. Las tareas no se conciben como piezas aisladas, sino como parte de trayectos más amplios que articulan la construcción de modelos, la discusión de supuestos, la interpretación de resultados y la reflexión sobre la pertinencia de las decisiones tomadas. La evaluación, en este marco, también se transforma: se valoran los argumentos, la coherencia interna del modelo, la adecuación de las herramientas utilizadas, y la capacidad para comunicar los hallazgos de forma rigurosa y profesional.
Lejos de considerar a la educación a distancia como una limitación, estas experiencias muestran que, con un diseño didáctico cuidadoso, se puede lograr que los estudiantes se involucren activamente en procesos de modelización, aun cuando forman parte de cohortes masivas. En lugar de homogenizar las trayectorias, se promueve una enseñanza que reconoce la diversidad, valora la iniciativa del estudiante y posiciona a la matemática como una herramienta para comprender y transformar su entorno.

El desafío no está únicamente en el contenido matemático, sino en cómo las tecnologías disponibles y la arquitectura del entorno virtual permiten sostener interacciones significativas, retroalimentaciones oportunas y aprendizajes colaborativos. En este marco, el diseño didáctico se convierte en el verdadero motor de transformación.

Una experiencia con más de 3800 estudiantes en educación a distancia

Durante el mes de febrero de 2025 se llevó a cabo una experiencia de modelización matemática en el marco del Curso de Introducción a la Vida Universitaria (CIVU) de la Facultad de Economía y Administración de la Universidad Católica de Salta (UCASAL), destinado a todos los ingresantes a carreras de Ciencias Económicas en modalidad a distancia. En este espacio participaron más de 3800 estudiantes, distribuidos en diferentes cohortes, lo cual supuso un desafío didáctico considerable para sostener propuestas activas, abiertas y significativas en un entorno virtual y masivo.

La actividad diseñada tenía como eje una situación problemática vinculada a la producción animal: determinar el momento óptimo para faenar o vender un animal destinado a la producción de carne. Aunque la consigna permitía que cada estudiante eligiera el animal de análisis (pollo, cerdo, vaca, conejo, pato, pavo, entre otros), se presentó como ejemplo inicial el caso de la cría de pollos parrilleros. Lejos de tratarse de una situación cerrada o directamente matemática, el planteo invitaba a tomar decisiones fundamentales desde el inicio: recortar el problema, definir variables relevantes y establecer criterios de optimización.

Una de las primeras decisiones consistía en seleccionar la especie y raza sobre la cual trabajar. En el caso de los pollos, no solo se proponían distintas razas como Cobb, Ross, Hubbard o Lohmann Broiler, sino también subvariedades (por ejemplo, Cobb 500, Cobb 700, Ross 308, Ross 708) que presentan diferencias significativas en sus curvas de crecimiento, consumo de alimento y eficiencia de conversión. A su vez, se planteaba la necesidad de decidir si el estudio se enfocaría en machos o hembras, dado que el ritmo de crecimiento, la conversión alimenticia y el peso final pueden diferir sustancialmente según el sexo. Esta etapa inicial de análisis —previa incluso a la modelización matemática formal— requería búsqueda de información, análisis crítico de fuentes y discusión colectiva sobre el recorte más adecuado del problema. Es decir, lo que la modelización exige desde sus primeros pasos: comprender el fenómeno y decidir cómo abordarlo.

A partir de ese recorte inicial, cada estudiante debía considerar una estructura general de costos e ingresos como punto de partida para el modelo, donde las utilidades se estiman a partir de la diferencia entre ingresos por ventas y costos totales. Esta expresión, sencilla en apariencia, se complejizaba al incorporar categorías como alimentación, sanidad, infraestructura, mano de obra, transporte, energía, comercialización, entre otros. Para cada uno de estos factores, era necesario decidir si debían incluirse, cómo obtener datos confiables y en qué unidad de análisis debían modelizarse.

El trabajo continuaba con la construcción de modelos matemáticos que describieran el crecimiento del animal y su consumo de alimentos en función del tiempo. Para ello, se promovía el uso de herramientas digitales como GeoGebra, que permitían ajustar funciones a datos obtenidos por los propios estudiantes a partir de informes técnicos, fichas de razas o registros de producción. Se buscaba, además, que los estudiantes realizaran simulaciones de escenarios, variando parámetros como el precio de venta, el costo del alimento o el tiempo de cría, para analizar la sensibilidad del modelo construido.

Una de las estrategias fundamentales para sostener esta propuesta en un entorno virtual y masivo fue la organización de foros de discusión por grupos aleatorios, donde los estudiantes debían acordar un recorte común del problema, tomar decisiones compartidas, intercambiar criterios de modelización y construir una propuesta colectiva. Esta dinámica permitió reproducir, en formato asincrónico, aspectos clave de la práctica profesional en Ciencias Económicas, como el trabajo en equipo, la negociación de ideas y la toma de decisiones consensuada. A su vez, la instancia de evaluación consistía en la elaboración de un video breve (no mayor a 10 minutos), donde cada equipo presentaba su proceso de modelización, fundamentaba sus decisiones y compartía resultados.

El cierre de la actividad incluía una etapa de retroalimentación entre pares, donde cada grupo debía valorar los trabajos de otros equipos, formulando sugerencias de mejora, interrogantes o comentarios constructivos. Este componente fue especialmente valorado por los estudiantes, ya que permitió ampliar sus marcos de análisis, contrastar enfoques diversos y reconocer fortalezas y debilidades de las decisiones adoptadas. Asimismo, favoreció el desarrollo de competencias argumentativas y comunicativas, fundamentales para el ejercicio profesional en contextos complejos y colaborativos.

Finalmente, la actividad se organizó en etapas secuenciales: comprensión del problema, recorte y recolección de datos, modelización del crecimiento y consumo, resolución del modelo, análisis de resultados, sensibilidad del modelo y validación de la propuesta. Cada una de estas fases fue acompañada con orientaciones generales, sin pautar un único recorrido ni restringir la creatividad de los estudiantes.

La propuesta desarrollada demuestra que, incluso en entornos masivos y a distancia, es viable diseñar actividades de modelización matemática que convoquen a pensar, decidir, justificar y comunicar. El uso

estratégico de tecnologías, la claridad en los objetivos formativos y la confianza en la capacidad de los estudiantes para construir conocimiento complejo constituyen condiciones indispensables para avanzar en esta dirección. A su vez, se fomenta una cultura de aprendizaje basada en la colaboración, la responsabilidad compartida y la valoración de múltiples enfoques, aspectos que constituyen una preparación auténtica para el ejercicio profesional en contextos reales, complejos y dinámicos.
Lejos de ser una excepción, esta experiencia interpela nuestras concepciones tradicionales sobre lo que significa aprender y enseñar matemática en los escenarios contemporáneos, y abre caminos posibles para una enseñanza universitaria más pertinente, inclusiva y formativa.

Reflexiones finales

La experiencia presentada permite cuestionar la idea, aún persistente, de que la modelización matemática es inviable en contextos virtuales o con grandes volúmenes de estudiantes. En contraposición, esta experiencia confirma la factibilidad de diseñar propuestas didácticas que, mediante la incorporación de tecnologías, el trabajo colaborativo y la apertura del problema, habiliten procesos genuinos de modelización que vinculen las competencias matemáticas con la toma de decisiones profesionales.
Uno de los aspectos centrales para que esta experiencia fuera viable radica en el modo en que se concibe la modelización. Desde una perspectiva didáctica, no se trata de aplicar fórmulas previamente enseñadas ni de buscar un único procedimiento correcto, sino de construir modelos que permitan comprender, explicar o intervenir en fenómenos reales (Blum & Leiß, 2007). Esta construcción involucra múltiples decisiones: qué recortar del fenómeno, qué variables considerar, qué relaciones establecer, qué supuestos adoptar, y cómo validar las conclusiones obtenidas. Estas decisiones no son triviales y constituyen el núcleo de lo que se espera que desarrollen los estudiantes, en tanto futuros profesionales capaces de actuar con fundamento.
Tal como señalan Pochulu y Font (2025), uno de los riesgos habituales al diseñar actividades de modelización es reducirlas a situaciones que simplemente contextualizan técnicas previamente aprendidas. En cambio, cuando se promueve una modelización genuina, se habilita una experiencia formativa más rica, donde el conocimiento matemático se reconstruye y resignifica en función del problema abordado. Este enfoque permite desarrollar competencias argumentativas, comunicativas y decisionales, fundamentales en el campo de las ciencias económicas.
Por otra parte, la educación a distancia no debe entenderse como un obstáculo, sino como un entorno con potencialidades propias. El uso de foros asincrónicos, plataformas interactivas, simuladores y herramientas de visualización (como GeoGebra o hojas de cálculo) no solo permite sostener la interacción, sino que potencia la autonomía de los estudiantes y su capacidad para construir conocimiento colaborativamente. Como advierte Pochulu (2024), el desafío no reside en trasladar las prácticas presenciales a la virtualidad, sino en repensar el diseño didáctico desde las condiciones del entorno y los objetivos formativos perseguidos.
Asimismo, es relevante destacar que este tipo de experiencias favorecen un cambio de rol en los estudiantes. Ya no son ejecutores de algoritmos, sino diseñadores de soluciones, constructores de modelos y comunicadores de ideas. Esta transformación resulta coherente con las demandas actuales del campo profesional, donde se espera que los egresados sean capaces de analizar información cuantitativa, evaluar alternativas, tomar decisiones fundadas y comunicar sus conclusiones de forma clara y precisa (Alsina, 2007).
En definitiva, las prácticas de modelización matemática, cuidadosamente diseñadas y contextualizadas, pueden constituirse en una vía potente para transformar la enseñanza en la universidad, incluso en modalidades a distancia y con gran cantidad de estudiantes. El foco no está en la dificultad de la matemática utilizada, sino en la riqueza del proceso que se promueve: desde la formulación del problema hasta la validación y comunicación del modelo. Asumir este desafío requiere revisar nuestras concepciones sobre qué significa enseñar matemática, para qué se enseña, y qué formas de conocimiento queremos que construyan nuestros estudiantes. Este enfoque resulta especialmente valioso en la formación de profesionales en Ciencias Económicas, donde se requiere integrar análisis cuantitativo, interpretación de información y comunicación rigurosa, en escenarios que demandan toma de decisiones fundada. Formar profesionales capaces de argumentar, decidir y modelar desde lo cuantitativo no es solo un desafío pedagógico, sino una necesidad social.

Referencias bibliográficas

Alsina, Á. (2007). Competencias matemáticas: sentido y significado. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 66, 5–18.

Blum, W. & Leiss, D. (2007). *How do students and teachers deal with modeling problems?* In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, & S. Khan (Eds.), Mathematical modelling: Education, engineering and economics (pp. 222–231). Horwood Publishing.

Borromeo Ferri, R. (2010). *Modelling problems from a cognitive perspective: Findings of a think-aloud study*. In R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines, & A. Hurford (Eds.), Modeling students' mathematical modeling competencies (pp. 265–278). Springer.

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., & Edwards, I. (2007). *Modelling tasks for upper secondary and tertiary students*. In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI Study (pp. 267–276). Springer.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *The ontosemiotic approach to research in mathematics education.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 39(1–2), 127–135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). *A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education.* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 38(3), 302–310. https://doi.org/10.1007/BF02652813

Pochulu, M. D. (2024). *El diseño de tareas de modelización con inteligencia artificial*. En J. E. Sagula (Ed.), Memorias del V Simposio de Educación Matemática-Virtual (V SEM-V): Tendencias en investigación en educación matemática (pp. 70–76). Universidad Nacional de Luján. ISBN 978-631-6582-10-2.

Pochulu, M. (2024). *Didáctica de la Matemática - Profesorado en Matemática*. Villa María: Instituto Académico Pedagógico de Ciencias Humanas de la Universidad Nacional de Villa María.

Pochulu, M. & Font, V. (2025). Modelización matemática e inteligencia artificial generativa. En A. Córica, V. Parra y P. Sureda (Eds.), *Los desafíos de la educación en tiempos de la Inteligencia Artificial*. Tandil: Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires.

Stillman, G., Kaiser, G. & Lampen, E. (2021). *Mathematical modelling in the digital era: Potentials and challenges*. In G. Stillman, G. Kaiser, & E. Lampen (Eds.), Mathematical Modelling Education in the Digital Era (pp. 3–15). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-74843-0_1

Sobre la formación en Educación Matemática de docentes de matemática

Mabel RODRÍGUEZ

Universidad Nacional de General Sarmiento
Juan María Gutiérrez 1150, Los Polvorines, Buenos Aires. Argentina
mrodri@campus.ungs.edu.ar

Resumen

Problematizamos la formación planteada en asignaturas de educación matemática que recibe un futuro docente de matemática.

Desarrollamos esta presentación alrededor de dos ejes. Uno que alude a los contenidos de educación matemática que forman parte de los planes de estudio de la formación docente y, en segundo, referido a la metodología de trabajo que el formador plantea en las clases.

Articulamos la presentación con aportes de distintos autores de la comunidad científica.

Palabras clave: Enseñanza de educación matemática. Formación inicial de profesores de matemática. Contenidos de educación matemática de la formación docente.

Introducción

Hoy en día, las instituciones, ministerios y autoridades exigen que la formación matemática en los distintos niveles se actualice, debido, entre otros motivos, a los avances de las tecnologías y su creciente accesibilidad. Así, los docentes enfrentan el desafío de adaptarse a estos cambios para responder de manera efectiva a las exigencias del contexto actual. Para ello, resultan clave, inicialmente, las decisiones previas a la entrada al aula: cómo organizar la enseñanza, qué actividades proponer, qué rol asumirán los estudiantes, qué recursos dispondrán, etc. Éstas, y más, se enmarcan en tareas propias de la *planificación de la enseñanza*. Sobre esta temática se encuentran múltiples aportes teóricos provenientes del campo de la Didáctica General, sin embargo, la especificidad propia del quehacer matemático imprime características particulares a los aprendizajes y por lo tanto a la enseñanza de esta disciplina. Del mismo modo sucede con otra actividad clave, posterior a la planificación, la *gestión de la clase*; y a la *reflexión* sobre la globalidad de la labor docente. Para estos tres momentos de trabajo de un docente, previo, durante y posterior a la clase, la Educación Matemática brinda herramientas, resultados de investigaciones y estudios de distinta naturaleza que permiten a un docente desenvolverse con idoneidad en su rol. Así como algunos resultados relacionados con la planificación de la enseñanza, entre otros tantos son: Cevikbas et al., 2024; Burgos et al., 2024; Baumanns y Rott, 2024; Barreiro et al., 2022 o Leavy y Hourigan, 2020; para la gestión de la clase pueden verse criterios de idoneidad y sus indicadores en Pochulu y Font Moll (2025) o pautas para intervenciones docentes en Barreiro et al. (2022). Sobre la formación de docentes reflexivos, bastaría ver, entre otros, el aporte de Flores (2007) quien retoma en su artículo múltiples perspectivas sobre la temática. Más aún, distintas líneas teóricas de Educación Matemática ofrecen elementos, conceptos, metodologías, etc. particulares que podrían ser utilizados por docentes que enmarquen sus prácticas en alguna de ellas. Además, las pautas curriculares o requerimientos institucionales suman condicionantes que los docentes deberían comprender y considerar para llevar adelante procesos de enseñanza pertinentes según el nivel escolar, institución, contexto o requerimientos didáctico-matemáticos recibidos.

Solo considerando este marco, entre otras tantas variables que podríamos haber incluido, se comprende la complejidad de la formación docente, así como su significativa relevancia para ajustarse a las necesidades cambiantes y contextuales. Desde hace más de dos décadas, González (2000) señaló que parte central de la complejidad es el devenir incierto en el que los profesores de matemática deberán actuar con solvencia. Ya en la actualidad, mientras Llinares et al. (2022) señalan desafíos para un desempeño adecuado en todos los niveles, Pino-Fan et al. (2022) plantean la necesidad de identificar habilidades profesionales esenciales para la práctica docente, así como formas de promover el desarrollo del conocimiento matemático y didáctico. Los autores consideran que se han desarrollado modelos y conceptualizaciones sobre los componentes del conocimiento y las habilidades profesionales; por ejemplo, sobre la importancia de la reflexión en la práctica docente. Sin embargo, resaltan que todavía falta un marco teórico detallado y herramientas metodológicas para observar, evaluar y mejorar el conocimiento de los profesores.

Con este marco situamos el interés de esta presentación que es compartir aspectos y preocupaciones vinculadas a *la formación inicial del futuro profesor sobre contenidos de Educación Matemática*.

El campo de la Educación Matemática tiene un enorme alcance, tanto por líneas teóricas, como por la especificidad de sus aportes, de modo que la selección de contenidos a ser enseñados en la formación inicial de profesores resulta un asunto delicado. Supongamos, momentáneamente y solo a modo de ejemplo, que nos interesara la selección, modificación o diseño de actividades para la clase de matemática. Nadie dudaría que este tema debe ser abordado en la formación inicial de un profesor. Ahora bien, diversas investigaciones reportan tareas de diseño de actividades matemáticas, y la complejidad que conlleva, ya por parte de *profesores en ejercicio*. En algunos de estos casos, las exigencias de ciertas instituciones respecto de la formación profesional, ha producido un cúmulo de trabajos que documentan las decisiones docentes. Ejemplo de ello es la formación en carreras de ingeniería que está vigente en Argentina que debe encararse alrededor del desarrollo de competencias profesionales. Al respecto, D'Andrea (2019) presenta y describe etapas para el diseño de actividades, considerando las competencias que ponen en juego los ingenieros en sus tareas. En sintonía con esto, D'Andrea y Pochulu (2020) dan pautas para que el diseño de actividades resulte coherente con el desarrollo de competencias. Por su parte, Pino-Fan et al. (2020) exploran las concepciones y prácticas pedagógicas de un grupo de profesores de Chile, en relación con el planteamiento de problemas de matemática para sus clases y los criterios utilizados para tal fin. Surgió del grupo de docentes involucrados la necesidad de la creación de un espacio para reflexionar sobre la propia práctica, como potenciador de las competencias profesionales clave para el profesor de matemática. Todo esto exhibe una minúscula parte de la complejidad solamente contemplando *un* asunto y en docentes ya *graduados*. Así, esperamos que se evidencie el enorme abanico de decisiones que han de tomar quienes tienen a cargo la formación inicial de docentes.

En la siguiente sección planteamos dos discusiones: una referida a los contenidos de la Educación Matemática que se incluyen en la formación inicial de profesores y la otra respecto a la metodología de trabajo en clases de asignaturas de este campo.

Desarrollo

Sobre los contenidos de la Educación Matemática incluidos en los planes de formación inicial de docentes

La Historia de la Educación Matemática, nos lleva a comprender de qué modo tuvo lugar el inicio del desarrollo en Argentina de este campo. Deriard (2020) explica cómo surge una comunidad de especialistas en nuestro país quienes gestan los primeros grupos de investigación. La autora ofrece precisiones sobre cómo llega la didáctica francesa (entendida como los aportes de la Teoría de Situaciones Didácticas, Brousseau, 1986) a documentos curriculares oficiales de la Ciudad de Buenos Aires. A partir del trabajo mencionado, observemos que:

- esta entrada al país de la didáctica francesa, producto de una triangulación Francia-México-Buenos Aires permitió el acceso en español a resultados de investigaciones de actualidad en aquel momento;
- los avances curriculares en la Ciudad de Buenos Aires, pioneros en su momento, se difundieron a lo largo del país y fueron tomados por otras regiones;
- lo que inicialmente se desarrolló para el nivel primario se extendió a la escolaridad media;
- estaba vigente la necesidad de ofrecer alternativas superadoras a la matemática moderna, instalada en libros escolares (Deriard, 2019)
- la formación de maestros y profesores requería atención para que los cambios impulsados llegaran a las aulas.

Así, resultó de vital importancia atender la formación inicial de docentes de los niveles primario y secundario y ésta fue impregnándose de las pautas y consideraciones de la didáctica francesa. Este breve punteo explica un genuino interés en mejorar la formación de estudiantes de la escolaridad básica y la consecuente necesidad de trabajar en la formación de los docentes. Si volvemos al día de hoy, reconocemos que el contexto cambió desde aquellos tiempos y seguirá haciéndolo rápidamente. La Educación Matemática creció sustancialmente en Argentina y en el mundo y el acceso a perspectivas, consideraciones, resultados de investigaciones, etc. está facilitado. Incluso el idioma ya deja de ser una barrera, aunque con algunas limitaciones. Encontramos hoy que los documentos curriculares de los niveles obligatorios mencionan la necesidad de que el estudiante resuelva y plantee problemas, la modelización matemática adquiere presencia, se enfatizan la alfabetización matemática y digital, se promueve la formación de ciudadanos críticos, entre otros aspectos. Por otra parte, al desempeñarse en el nivel superior, los docentes reciben pautas y requerimientos de distinta naturaleza (promover desarrollo de habilidades, formar en competencias profesionales, por ejemplo) y la posibilidad de ofrecer una formación específica que atienda a las carreras de los sujetos que forman se torna imperiosa. A pesar de esto, la mayoría de los planes de formación de profesores sigue casi exclusivamente planteando contenidos de la didáctica francesa, dejando fuera el trabajo con otros enfoques, la actualización y diversidad hoy presente en el campo, la elección de teorías pertinentes en función de los requerimientos, sus limitaciones, etc.

Este sesgo hacia la didáctica francesa actual, encontrado en documentos curriculares de los niveles obligatorios y los planes de formación de docentes que se han de desempeñar en ellos, tiene al menos dos riesgos que resaltamos aquí. Por un lado, provoca que toda interpretación a diferentes situaciones de enseñanza o aprendizaje se realice desde esa única perspectiva. Por otro, se asimila la didáctica francesa con el campo de la Educación Matemática y muchos docentes desconocen la existencia de otras teorías o, lo que es peor, al leer resultados enmarcados en otras teorías, las interpretan desde su único conocimiento disponible.

A modo de ejemplo visual, compartimos la imagen de la **Figura 1** (Pochulu y Rodríguez, 2022), que desde hace tiempo intentamos difundir. Esta imagen muestra la diversidad de aportes del campo, mientras que la **Figura 2** resalta lo que se denominó la didáctica francesa, asimilada a la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1986).

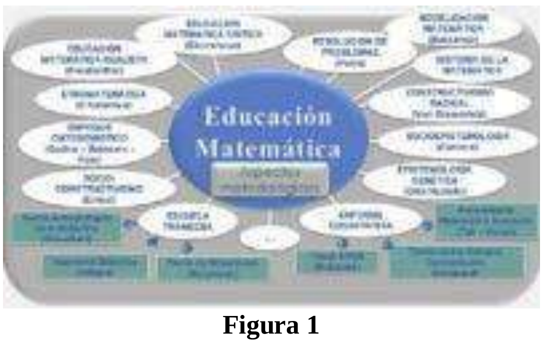


Figura 1

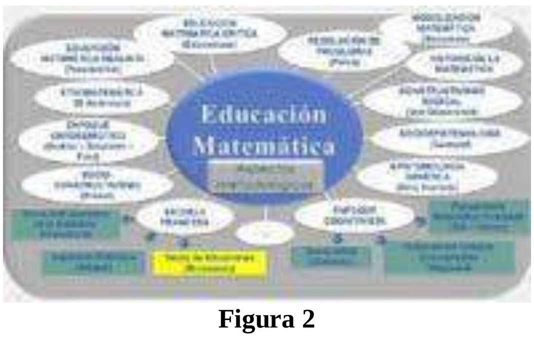


Figura 2

Sin embargo, consideremos que un docente de matemática asume, en el campo laboral, otros roles, más allá de enseñar matemática en los niveles de escolaridad obligatoria. (Pueden verse desarrollos a este respecto en Rodríguez, 2022). Para estos otros roles, requiere sumar otro tipo de aportes del campo de la Educación Matemática.

Con la intención de que no se asocien las líneas de Educación Matemática de la Figura 1 a los únicos elementos teóricos de este campo, podríamos reformular la imagen para resaltar su especificidad para la enseñanza de la matemática. De ningún modo se pretende desestimar que muchos de estos enfoques también dan herramientas para otras tareas, investigaciones, o formación de profesores, por ejemplo. Pero, primariamente, contribuyen a comprender la enseñanza de la matemática (entendida en sentido amplio). De este modo, tenemos la **Figura 3**.

Figura 3

Pero, al contemplar otros roles que un docente asume, podríamos también intentar gestar una imagen diferente del campo de la Educación Matemática. Sin pretensión de exhaustividad, ensayamos, para ello, la **Figura 4**.

Sin dudas los saberes específicos para enseñar matemática han de estar, pero podríamos sumar: el modelo del conocimiento especializado del profesor de matemática conocido por sus siglas en inglés MTSK (Carrillo et al., 2013), el conocimiento metacognitivo, la formación reflexiva del docente, el modelo de planos de la formación de profesores (Rodríguez et al., 2019 y Rodríguez et al., 2024), etc. Este ejercicio simplemente pretende alertar que cada formador deberá responderse qué otros aspectos decidirá incluir, en función del contexto en el que se desempeñe. De este modo, dará contenido a algunas de las imágenes en las que aquí figuran los puntos suspensivos.

Figura 4

Para cerrar esta sección, queremos resaltar algo venimos sosteniendo desde hace años: los contenidos de la Educación Matemática de la formación inicial de docentes, no deberían cerrarse a una única línea. Ni siquiera con el argumento de que es la que está vigente en documentos curriculares en un cierto tiempo y espacio. Los vertiginosos cambios exigen una flexibilidad mayor, adaptabilidad y conocimiento del campo y de su potencialidad para crecer en respuesta a distintas demandas.

Sobre la metodología de trabajo en asignaturas de Educación Matemática de la formación de docentes

Sería de algún modo una contradicción, pensar que un aprendizaje valioso de contenidos de Educación Matemática que se hayan seleccionado para formar a un docente, se alcance en clases con modalidad tradicional. ¿Nos encontramos con clases de didáctica de la matemática en la que un formador expone teorías y la finalidad pretendida es que sus estudiantes sean capaces de explicarlas? Sí, esto sucede y en gran medida. En cuanto el formador reconozca que "*buenos*" *objetivos* para la formación deben superar el planteo de *conocer teoría*, las propuestas irán cambiando. En algún modo hay una analogía respecto de la enseñanza de la matemática, que intentamos plantear. Si uno cree que "si el estudiante no es capaz de operar (numérica y algebraicamente) con idoneidad, no podrá aprender conceptos matemáticos más complejos", centrará su enseñanza en las operaciones hasta lograr ese desempeño esperado. Si éste no llega, el docente no avanzará. Análogamente si el formador cree que "si el futuro docente no conoce cabalmente una teoría de Educación Matemática, no podrá aprender cuestiones más complejas de la práctica profesional", centrará su enseñanza en los entramados teóricos que tienen extrema riqueza y refinamiento. Así, si el futuro docente no domina esta complejidad, no llegará a aprender cuestiones centrales que necesitará para su desenvolvimiento profesional.

Un problema similar se manifiesta cuando las clases de didáctica de la matemática se centran en el trabajo matemático alrededor de la resolución de ciertas actividades. Se produce un desplazamiento del tipo de aprendizaje que el futuro docente debería adquirir en estos espacios.

En este apartado queremos traer recomendaciones y sugerencias que datan de varios años e invitar a la reflexión de quienes tenemos a cargo espacios de este tipo.

Llinares (2007) hace casi veinte años que plantea que las tareas profesionales deberían ser organizadoras de los programas de formación de profesores. Asimismo, resalta que el aprendizaje para profesor tendría que concebirse como un proceso de enculturación. Esto significa una inmersión en el tipo de prácticas que realiza un docente en ejercicio. Si consideramos que un docente que se forma deberá resolver problemáticas que le suceden en su desempeño profesional, y que sería deseable que articule conocimiento teórico y práctico para ello, se nos aclara la necesidad de fortalecer al futuro profesor en herramientas de distinta naturaleza. Solo a modo de ejemplo, necesitará:

identificar esas problemáticas evitando proponer explicaciones que las trivializan

manejarse autónomamente para buscar información sobre el asunto

establecer alguna hipótesis o bien de su origen o de cómo se podría abordar

hacer una propuesta enmarcada en las perspectivas teóricas que su contexto imprime

implementar y evaluar el funcionamiento de su propuesta, sumando evidencias que le permitan dar cuenta de lo sucedido, trascendiendo la opinión.

Por su parte, Flores expresa:

> En la formación inicial, el estudiante tiene que ejercitarse en identificar y resolver situaciones conflictivas, poniendo en juego estrategias racionales, para afrontar la práctica docente, en la que la mayoría de las veces hay que actuar con premura. Este planteamiento lleva a proponer que los profesores generen actitudes reflexivas (Schön, 1992) con las que puedan contemplar las situaciones habituales docentes, y afrontar las cuestiones profesionales que se van planteando (Elliot, 1993; Stenhouse, 1984). (Flores, 2007, p. 141)

Esto probablemente nos deje inquietudes para delinear cómo plantear el trabajo en clases de asignaturas del campo de la Educación Matemática.

A modo de cierre

Esto que hemos desplegado aquí alude, en mayor medida a la formación inicial de profesores y maestros de matemática. Cuando nos situamos en instancias de desarrollo profesional docente las problemáticas se comparten y, en alguna medida, se agravan. En ellas, el capacitador se encuentra con la realidad de docentes inquietos y comprometidos que asisten a espacios de formación, sabiendo que una gran mayoría soslaya estas instancias. Si en el grupo pequeño de docentes con quienes se trabaja, se advierte la necesidad de actualizar una formación que les abra perspectivas y les brinde herramientas para un manejo académico, sólido y autónomo; queda manifiesta la preocupación al pensarla extendida al resto de docentes en ejercicio con los que no se tiene contacto.

En este Simposio, el Grupo de Trabajo y Discusión sobre *Formación de profesores en Educación Matemática* incluye tres exposiciones de colegas: Rubén Escobar Sánchez, Paula Leonian y Adilio Lezcano. La primera aborda la formación inicial de maestros, la segunda la de profesores y la última expone una propuesta de desarrollo profesional docente. El escrito Post-SEM expondrá cómo éstas dan respuestas particulares a las cuestiones centrales aquí aludidas: los contenidos y la modalidad de trabajo en instancias de formación en Educación Matemática.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (3ra. Ed.). Rodríguez, M. (Coord.). Ediciones UNGS.

Baumanns, L., & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior, 73,* 101130.

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática, *Recherches en didactique des mathematiques*, *7*(2), 33-115.

Burgos, M., Tizón-Escamilla, N., & Chaverri, J. (2024). A model for problem creation: implications for teacher training. *Mathematics Education Research Journal.* https://doi.org/10.1007/s13394-023-00482-w

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L., & Muñoz-Catalán, M. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser y M. A. Mariotti (Eds.). *Proceedings of the CERME 8*, (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, Ankara, Turquía: ERME.

Cevikbas, M., König, J., & Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM - Mathematics Education*, *56*(1), 101-113.

D'Andrea, L. J. (2019). Un diseño de actividades matemáticas para el desarrollo de competencias en las carreras de Ingeniería. *Revista digital El enfoque por competencia en las Ciencias Básicas* (CIIE – CONFEDI), 1, 125-136.

D'Andrea, L. J., & Pochulu, M. D. (2020). Competencias de Ingeniería Electrónica como generadoras de actividades matemáticas asociadas al cálculo diferencial e integral en una variable. *III Jornadas sobre las Prácticas Docentes en la Universidad Pública* (Edición en línea, junio de 2020).

Deriard, A. (2019). Los libros del maestro así aprendemos matemática: un cambio de paradigma en la enseñanza de la matemática en los 80 en la ciudad de Buenos Aires. *HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática, 5*(1), 150-167.

Deriard, A. (2020). Llegada de las ideas de la Didáctica de la Matemática francesa a los documentos oficiales de la Municipalidad de Buenos Aires. *Historia de la educación: Revista Interuniversitaria, 39*, 157-175.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *1*(4), 139-158.

González, F. (2000). Los nuevos roles del profesor de matemática. Retos de la formación de docentes para el siglo XXI. *Paradigma*, *XXI* (1), 1-20.

Leavy, A., & Hourigan, M. (2020). Posing mathematically worthwhile problems: Developing the problem-posing skills of prospective teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *23*(4), 341-361.

Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. Conferencia en XIII JAEM-07.

Pino-Fan, L., Castro, W., & Font Moll, V. (2022). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*(5), 1407-1432.

Pino-Fan, L., Molina Cabrero, J., Báez Huaiquián, D., & Hernández Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia*, *34*(2), 114-136. http://dx.doi.org/10.15359/ru.34-2.7

Pochulu, M. D., & Font, V. (2025). Idoneidad didáctica de tareas de matemáticas reformuladas con inteligencia artificial. *Paradigma*, *46*(1), e2025027.

Pochulu, M. y Rodríguez, M. (comp.) (2022). *Educación matemática: aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 1.* UNGS-EDUVIM. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf

Rodríguez, M. (2022). El profesor ante el desafío de formar docentes de matemática. Mucho más allá de saber enseñar matemática. En F. & L. A. Castillo (Comps.). *Memorias del II CONVIBE FORPRO, Segundo Congreso Virtual Iberoamericano sobre Formación de Profesores de Matemática, Ciencias y Tecnología*, Universidade Federal Do Río Grande Do Norte, Brasil. https://www.youtube.com/watch?v=GLH8ON_dMoA

Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (2024). Desarrollo profesional para docentes de matemática superior: un encuadre teórico y una propuesta. *Cuadernos de investigación y formación en educación*, *17*(1), 35-50. Universidad de Costa Rica.

Rodríguez, M., Pochulu, M., & Fierro, M. (2019). Modelo de planos de formación docente para abordar distintos roles del profesor de matemática. *Revista Electrónica De Divulgación De Metodologías Emergentes En El Desarrollo De Las STEM*, *1*(1), 84-103. http://www.revistas.unp.edu.ar/index.php/rediunp/article/view/95

¿Clases de matemáticas en una asignatura de didáctica de la matemática?: Cuando, por qué, para qué. Una experiencia en Formación de Maestros

Rubén Esteban ESCOBAR SÁNCHEZ

Universidad Antonio Nariño
Calle 58 A BIS # 37 – 94, Bogotá, Colombia
rescobar52@uan.edu.co

Resumen

Este trabajo presenta la implementación de una serie de actividades dentro de un modelo pedagógico diseñado para la formación inicial de maestros en educación matemática, específicamente para aquellos que enseñarán en educación básica primaria. El modelo propone tres fases: diagnóstica, preparatoria e inmersiva. Aquí, se aborda la fase preparatoria, en la cual se diseñaron y desarrollaron actividades para estudiantes del programa de formación complementaria de una Escuela Normal Superior en Bogotá, Colombia.
La implementación de esta fase dentro del curso de didáctica de la matemática busca situar a los futuros maestros en una experiencia de aprendizaje basada en la resolución de problemas desde un enfoque constructivista. A través de esta aproximación, los participantes asumen el rol de estudiantes en una clase de matemáticas, lo que les permite reflexionar sobre su propio aprendizaje y fortalecer sus conocimientos matemáticos. Este proceso es clave para su futura práctica docente, ya que les proporciona herramientas para comprender y abordar los desafíos de la enseñanza en educación básica primaria.

Palabras clave: Formación de maestros. Formación matemática del futuro maestro. Resolución de problemas. Experiencias pedagógicas.

Introducción

La formación docente en el siglo XXI enfrenta desafíos sin precedentes debido a los avances tecnológicos, los cambios sociales y las crecientes demandas educativas. En este contexto, es fundamental que los educadores adopten estrategias pedagógicas innovadoras que permitan a sus estudiantes desarrollar conocimientos y habilidades pertinentes a las necesidades actuales. Desde la Educación Matemática se le otorga, a la resolución de problemas, un papel central. Al respecto mencionamos que la resolución de problemas no solo implica dotar a los estudiantes de herramientas para abordar problemas, sino también fomentar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos a través de su construcción o aplicación en situaciones reales (Cai, 2022; Cai & Leikin, 2020; Liljedahl & Cai, 2021; Schoenfeld, 2014, 2016; Schoenfeld et al., 1999). En lugar de limitarse a la memorización de procedimientos, este enfoque invita a los estudiantes que aprenden matemática, a explorar, utilizar y construir conceptos mediante el trabajo con problemas significativos. El objetivo que se persigue, bajo esta perspectiva teórica, es fortalecer las estrategias heurísticas y la reflexión metacognitiva sobre el quehacer matemático. Asimismo, se ponen en juego, y se verán desarrolladas, habilidades como el razonamiento lógico, la creatividad, la perseverancia, la abstracción y la comunicación de ideas matemáticas. Para intentar lograr esto es necesario que quien aprende matemática aborde la resolución de problemas, es decir actividades que le generen al resolutor un bloqueo inicial, y que le exijan el trabajo con conocimientos matemáticos, el desarrollo de estrategias de resolución y el ejercicio del pensamiento crítico.
Ahora bien, para que este tipo de actividades llegue a las aulas es necesario que los docentes sean capaces de seleccionarlas, modificarlas o diseñarlas. Por lo tanto, el reto se extiende a la formación inicial de docentes. En este trabajo, en particular, situamos nuestro interés en la formación inicial de maestros de la escolaridad primaria. Será imperativo que el futuro maestro (FM) sea capaz de seleccionar, modificar o diseñar problemas para los niños del nivel primario. *¿De qué modo sería posible plantear una formación inicial de maestros que los prepare para que sean capaces de planificar la enseñanza en el nivel primario enmarcada en la resolución de problemas?*
Aquí, se presenta una experiencia de formación inicial de maestros llevada a cabo en la Escuela Normal Superior Distrital María Montessori en Bogotá, Colombia, durante los años 2024 y 2025. Se llevó a cabo en la asignatura Formación de Conceptos Matemáticos I. La experiencia se enmarca en un Modelo Pedagógico (Escobar & Rodríguez, 2025) para la formación inicial de maestros en asignaturas de Educación Matemática. En este modelo se establecen tres fases. Una inicial diagnóstica, seguida de una preparatoria para culminar en una fase inmersiva. Con la primera de ellas el propósito es recopilar datos sociodemográficos básicos (edad, género, lugar de residencia, entre otros), así como información sobre la experiencia previa en el aprendizaje de las matemáticas y las concepciones respecto al futuro rol docente. Todo ello planteado en función del contexto específico de la escuela y en concordancia con los lineamientos nacionales establecidos. La segunda está pensada para hacer vivenciar al FM el aprendizaje de las matemáticas bajo perspectivas constructivistas. Por su parte, la tercera de las fases pone al futuro maestro en el rol que ejercerá y, desde éste, se le proponen actividades para que construya conocimientos especializados y específicos de la formación que adquiere. En esta presentación nos dedicamos exclusivamente a explicitar el sentido de la fase preparatoria. De este modo, queremos reflexionar sobre las preguntas *¿cuándo, por qué y para qué consideraríamos enseñar matemáticas en asignaturas de didáctica de la matemática?*

Reflexiones sobre la formación matemática en espacios de didáctica de las matemáticas

En la formación inicial de docentes, resulta imprescindible una comprensión profunda de cómo los conceptos matemáticos pueden ser enseñados de manera efectiva. Ahora bien, esto conlleva que el futuro maestro maneje con cierta solvencia los conceptos matemáticos. Dependiendo de cómo son los programas de formación en las instituciones de nivel superior, pueden encontrarse asignaturas de contenido matemático y otras de contenido didáctico o únicamente asignaturas de contenido didáctico-matemático. Los contenidos matemáticos que el maestro debe enseñar, en el nivel primario, suelen no ser objeto de enseñanza. Esto aplica también a ciertos tipos de prácticas (el *saber-hacer*) sobre contenidos como son la resolución de problemas, la integración disciplinar o la argumentación, por dar ejemplos. Lo central sobre lo que queremos reflexionar aquí alude a lo que se conoce sobre la biografía escolar y cómo ésta opera conscientemente, o no, sobre la tarea docente. Las vivencias que haya tenido el futuro maestro cuando aprendió matemáticas contribuyen a la conformación de su biografía escolar. De este modo, si en su formación matemática las clases a las que asistió fueron mayoritariamente tradicionales, es altamente probable que tienda a repetir este modelo al momento de ejercer el rol. Entonces, y atendiendo al cuestionamiento que da título a esta ponencia, planteamos que, si un futuro maestro **no** tuvo vivencias como estudiante (aprendiendo matemáticas) que se enmarquen en perspectivas

constructivistas, entonces sería deseable que las tenga. Si hubiera espacios específicos (o asignaturas) en la institución de nivel superior en los que se atiende a esta cuestión, no sería necesario que las asignaturas de Educación Matemática aborden esta enseñanza. Pero, si no hay asignaturas disciplinares en el programa de formación o el trabajo que se hace en ellas **no** responde a perspectivas constructivistas, proponemos (y así queda expresado en el Modelo Pedagógico) que se incluya en la planificación en alguna asignatura de Educación Matemática, la enseñanza de la matemática bajo perspectivas constructivistas. Es decir, el docente a cargo de la materia de Educación Matemática asume el rol de docente de matemáticas y los FM son estudiantes de matemáticas. De este modo abordamos el porqué y el para qué de la inclusión de clases de matemáticas, mientras que para abordar el cuándo diríamos que lo antes posible. Esto se debe a que se suman experiencias a las que se puede hacer referencia, en la formación didáctica. Una clase en la que el formador funcione como un docente que enseña matemáticas desde alguna perspectiva constructivista también permitirá al FM vislumbrar cuán diferente es la gestión en comparación con los enfoques tradicionales. Verá un modelo de docente que no se le presentó en su formación anterior. Así, el formador, cuando retome el rol de docente de la asignatura de Educación Matemática puede plantear actividades para que el FM reflexione sobre sus vivencias como aprendiz de matemáticas.
El análisis de la influencia de la biografía escolar en las concepciones de los futuros maestros, sobre la enseñanza recibida, permite reconocer y transformar sus propias ideas acerca del aprendizaje matemático, favoreciendo así una práctica docente reflexiva. Como señala Zárate-Montero (2016):

> Esta tarea de aprendizaje puede desarrollarse con estudiantes que inician su carrera y con quienes realizan su práctica docente al finalizarla. La acción clave que se promueve es tomar conciencia de las concepciones construidas a lo largo de la vida sobre el papel y quehacer docente, y cómo estas pueden influir en el actuar de las futuras y futuros educadores (p. 83).

Una experiencia en la formación de maestros

La experiencia consistió en la implementación de una secuencia de actividades en la que los futuros maestros aprendieron matemáticas bajo el enfoque de la resolución de problemas, siguiendo los principios de Polya (1945) y Mason et al. (1989). Estos autores proponen estrategias para abordar problemas de manera efectiva, enfatizando dos procesos fundamentales, la particularización y generalización, desarrollados en tres fases: abordaje, ataque y revisión.

Abordaje: En esta fase, los estudiantes responden tres preguntas clave para comprender y plantear el problema:
¿Qué sé?: Analizar el problema, identificar datos relevantes y recordar experiencias previas similares.
¿Qué quiero?: Clasificar información, identificar ambigüedades y delimitar el problema real.
¿Qué puedo usar?: Utilizar representaciones visuales, diagramas y símbolos para estructurar el pensamiento.

Ataque: En esta etapa, los estudiantes generan y justifican conjeturas, enfrentando momentos de incertidumbre ("¡Estoy atascado!") y de comprensión ("¡Lo tengo!"). Se fomenta la exploración de distintos enfoques y estrategias para avanzar hacia la solución.

Revisión: Esta fase implica reflexionar sobre el proceso de resolución, verificando la solución y extrayendo aprendizajes aplicables a nuevos contextos:
Comprobar la solución.
Analizar ideas clave y momentos significativos.
Generalizar el conocimiento a otros problemas y situaciones.

Presentamos algunas de las actividades diseñadas que resultaron ser *problemas* para los futuros maestros y algunas de las respuestas que han dado al abordarlos, evidenciando que efectivamente les provocaron un bloqueo inicial.
Es relevante destacar que el formador motivó a los estudiantes a explorar, planteando preguntas clave para desbloquear su pensamiento matemático, en los casos en los que fue necesario.
Propusimos actividades diseñadas para enfrentar a los futuros maestros a la resolución de problemas (algunas de estas se ilustran en las **figuras 1 y 2**), intención que surge a partir de la información obtenida del diagnóstico realizado, el cual permitió evidenciar la carencia en los FM de haber participado en clases bajo un enfoque constructivista. El propósito era situarlos en el rol de estudiantes en una clase de matemáticas en la que deban

resolver problemas, de manera análoga a la experiencia que vivirán sus propios alumnos en el aula, cuando el FM sea quien les haya propuesto los problemas.

Figura 1- Problema de la huerta.

Situación 1 (el problema)
(Individual: Tiempo previsto 25 minutos)

Don Pedro ha cultivado manzanas durante años, utilizando un método probado de huertos cuadrados rodeados de pinos como cortavientos. Sin embargo, últimamente ha pensado en expandir su huerto utilizando un gran terreno disponible (manteniendo la forma y relación entre la cantidad de manzanos y pinos del cultivo). Inicialmente en su huerta tiene 16 manzanos y 32 pinos, como lo puedes ver en la figura. Al empezar a pensar en su ampliación, se ha dado cuenta de que necesitaría plantar muchos más pinos que manzanos para rodear la nueva parcela. Esto lo tiene muy preocupado, pues el costo de los pinos podría aumentar considerablemente sus gastos.

¿Qué consejo le darías a Don Pedro sobre cómo abordar esta situación?

(Individual: Tiempo previsto 20 minutos)

1. Don Pedro tiene dudas de si podría plantar cualquier cantidad de manzanos que se proponga. ¿Esto será posible? Argumenta tu respuesta.
2. Don Pedro también se pregunta lo siguiente: si él compra una cierta cantidad de pinos, ¿sería posible que supiera cuántos manzanos sembrar? Argumenta lo que le dirías.
3. ¿Cómo cambia tu percepción sobre la enseñanza de la matemática cuando enfrentas problemas que no tienen una solución inmediata, única o un procedimiento previamente conocido?

Figura 2 - Problema del juego con cartas.

Situación 1 (el problema)
(Individual: Tiempo previsto 25 minutos)

A la hora del descanso, dos compañeros del salón de clases, Carlos y Andrés, juegan con una baraja española de 48 cartas, sin el comodín. Andrés le dice a Carlos: "escoge una carta de la baraja, duplica su valor, al resultado le sumas 1 y finalmente, a lo obtenido lo multiplicas por 5. Si la carta que seleccionaste es de copas, súmale 4, si es de bastos, súmale 2, si es de espadas, súmale 5 y si es de oros le sumas 3. Dime el resultado".

Carlos le responde: 79 es el resultado que obtuve.
Andrés (responde de inmediato): La carta que seleccionaste es 7 de copas.
Carlos: ¡Increíble, esa es la carta!!

¿Cómo hizo Andrés para adivinar la carta que seleccionó Carlos? ¿Andrés podrá adivinar siempre la carta que escoja Carlos? Argumenta tu respuesta.

(Individual: Tiempo previsto 20 minutos)

1. Carlos quiere mostrar a Andrés que no siempre va a poder adivinar la carta escogida. ¿Esto será posible? Argumenta tu respuesta.
2. Andrés quiere que Carlos también pueda realizar un juego similar con otros compañeros pero que tenga certeza de que siempre podrá adivinar. ¿sería posible que Carlos pudiera modificar algo del truco de modo que le resulte efectivo siempre? Argumenta lo que podría hacer Carlos.
3. ¿Cómo cambia tu percepción sobre la enseñanza de la matemática cuando enfrentas problemas que no tienen una solución inmediata, única o un procedimiento previamente conocido?

A continuación de un tiempo de trabajo en el que avanzaron sobre la resolución, se les pidió responder una serie de preguntas orientadas a estimular la reflexión sobre el proceso de resolución, fomentando la exploración de estrategias heurísticas poco habituales para ellos. Estas preguntas apuntaron a que los participantes analizaran el conocimiento matemático que consideraran esencial para abordar la situación propuesta, promoviendo así una comprensión más profunda de los desafíos cognitivos que implica el aprendizaje de las matemáticas.

Tras la resolución de los problemas, se promovieron preguntas orientadas a la reflexión:
¿Tu respuesta realmente responde la pregunta planteada?
¿El resultado obtenido tiene sentido en el contexto del problema?
¿Puedes justificar tu solución con otra estrategia o método?
¿Podrías explicar tu solución a otra persona?
¿Existen otras formas de resolverlo?

Figura 3 - Socialización y reflexión.

Situación 2: compartir las resoluciones y conversar sobre lo matemático
(Colectiva: Tiempo previsto 20 minutos)

El formador invita a los estudiantes a compartir sus resoluciones (o intentos fallidos) y a conversar sobre las cuestiones matemáticas que han surgido en las diferentes resoluciones. Valorará los intentos realizados como parte del quehacer matemático.

Para ello menciona las siguientes preguntas como orientativas del tipo de discusión que pretende llevar adelante.

1. Fue necesario o no, hallar alguna "expresión matemática", "fórmula" o "función" asociada al problema propuesto ¿por qué la hallaste?, ¿para qué la utilizaste? Argumenta con detalle tus respuestas.
2. Seleccionar la "expresión matemática", "fórmula" o "función" que consideren "más sencilla" y las "más compleja" de las socializadas dentro del grupo.

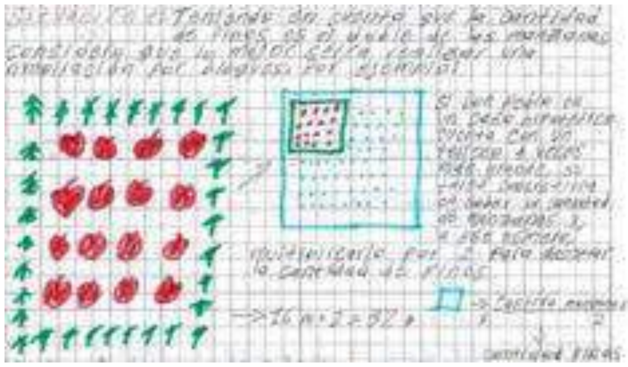
Situación 3: reflexión metacognitiva sobre lo matemático puesto en juego
(Colectiva: Tiempo previsto 25 minutos)

1. ¿Qué consideras que aprendiste hoy de matemáticas?
2. En caso de no haber sabido cómo abordar la actividad, explicar cómo trataron de superar esa situación.
3. ¿Cambia tu percepción sobre la matemática cuando enfrentas problemas que no tienen una solución inmediata, única o para resolverlos no basta aplicar un procedimiento previamente conocido?

Después de abordar la resolución de problemas como eje central de la actividad, se planteó la necesidad de fomentar la reflexión en los futuros maestros sobre el trabajo matemático realizado. Con este propósito, se propuso responder a una serie de preguntas clave (**Figura 3**).

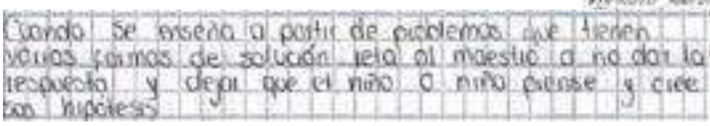
A continuación, se presentan algunos extractos del trabajo realizado por los futuros maestros como parte de la solución a los problemas propuestos como a las demás situaciones planteadas.

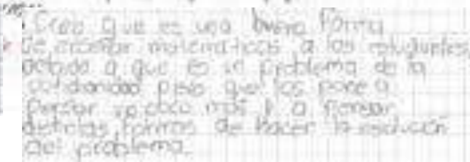
Problema de los pinos y los manzanos



Problema del juego con cartas

Percepción sobre la matemática al enfrentarse a problemas no rutinarios





A modo de cierre

Esta experiencia resalta la importancia de incluir clases de matemáticas en las asignaturas de didáctica de la matemática, cuando esto es necesario. Esta necesidad refiere a permitir que los futuros maestros vivencien los desafíos del aprendizaje matemático y, a partir de ello, a posteriori, con actividades ya de naturaleza diferente, construir estrategias didácticas fundamentadas para su práctica docente. La vivencia del aprendizaje matemático desde una perspectiva constructivista resulta necesaria para contribuir a la conformación de una biografía escolar que no esté sesgada por las prácticas tradicionalistas y conductistas. De este modo, se contribuye a formar docentes capaces de diseñar experiencias de enseñanza innovadoras, alineadas con las demandas del siglo XXI.

Referencias bibliográficas

Cai, J. (2022). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Éducation et Didactique, 16,* 31-50. https://doi.org/10.4000/educationdidactique.10642

Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics, 105*(3), 287-301. https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x

Escobar, R., & Rodríguez, M. A. (2025). Modelo pedagógico para la formación inicial de maestros en educación matemática. *Paradigma*, *XLVI*(1), e2025017. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025017.id1607

Liljedahl, P., & Cai, J. (2021). Empirical research on problem solving and problem posing: A look at the state of the art. *ZDM – Mathematics Education, 53*(4), 723-735. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01291-w

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1989). *Pensar matemáticamente*. Labor. https://books.google.com.co/books?id=XmGENAAACAAJ

Pochulu, M. D., & Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (1.a ed., Vol. 1). Editorial Universitaria de Villa María, Universidad Nacional de Villa María. https://docer.ar/doc/s88vx5

Pólya, G. (1981). *Mathematical discovery: On understanding, learning, and teaching problem solving*. Wiley.

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education, 196*(2), 1-38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Schoenfeld, A. H., Minstrell, J., & van Zee, E. (1999). The detailed analysis of an established teacher's non-traditional lesson. *The Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 281-325. https://doi.org/10.1016/S0732-3123(99)00035-8

Zárate-Montero, M. J. (2016). La biografía escolar como instrumento para la reflexión de los conocimientos previos y construidos durante la formación docente entorno al "cómo enseñar". *Revista Ensayos Pedagógicos, 11*(2), 83-97. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/ensayospedagogicos/article/view/9148

Profesionalización docente: una experiencia en formación inicial de profesores

Paula V. LEONIAN

Universidad Nacional de General Sarmiento
Juan María Gutiérrez 1150 (B1613), Los Polvorines, Pcia. Buenos Aires
pleonian@campus.ungs.edu.ar

Resumen

En este trabajo describimos una experiencia llevada a cabo en formación inicial de profesores de la Universidad Nacional de General Sarmiento en la que los estudiantes participan de distintas actividades de inmersión en el rol docente a la vez que adquieren contenidos de Educación Matemática.

En una primera instancia planteamos la problemática que da lugar a esta propuesta, el contexto de trabajo en la materia y explicamos la base sobre la cual está pensada esta experiencia, para luego describir tres actividades que fueron utilizadas para tal fin. En particular, hemos seleccionado una de ellas para mostrar detalles y analizar las cuestiones que se trabajan a través de ella. Por último, explicamos cuál es el rol docente durante el proceso, de qué forma realizamos el seguimiento de cada estudiante y mostramos, a modo de ejemplo, cómo fue pensado un examen final de la materia.

Para finalizar el trabajo, dejamos indicadas algunas sugerencias de modificación de actividades que entendemos podrían contribuir a diseñar nuevas situaciones de la práctica profesional docente.

Palabras clave: Formación inicial de profesores de Matemática. Problemas de práctica profesional docente. Educación Matemática.

Introducción

Situados en la formación inicial de profesores, una preocupación que toma cada vez más relevancia está relacionada con la actualización de las materias del profesorado para que éstas no resulten obsoletas ni lejanas a la realidad docente. Esto es algo que, consideramos, debe mirarse tanto desde el lado de las materias específicas de Matemática, como las de Didáctica de la Matemática e indudablemente las prácticas o residencias docentes.

Aunque esta preocupación va más allá de la Educación Matemática y es compartida por autores de la didáctica general, específicamente para nuestro campo Llinares (2007) utiliza el concepto de *proceso de enculturación* para referirse al proceso de aprendizaje de los futuros profesores poniéndolos ante la necesidad de dar respuesta a situaciones que, como docentes, deberán enfrentar. Tomando esta idea diseñamos una de las materias de Educación Matemática del Profesorado Universitario de Educación Superior en Matemática (PUES) de la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS): Enseñanza de la Matemática 1 (EM1). EM1 es la primera materia de Educación Matemática a la que asisten los estudiantes del Profesorado de Matemática de UNGS. Previo a ella, han cursado asignaturas que brindan encuadres generales de educación, teorías de aprendizaje, elementos para comprender la institución y por supuesto asignaturas disciplinares de cálculo, álgebra y geometría. Las clases de matemática vivenciadas en la formación en la UNGS, mayoritariamente podrían describirse como tradicionales. Por este motivo, la propuesta de trabajo de EM1 resulta novedosa y difícil de comprender, inicialmente a los estudiantes. Suelen expresar que sus expectativas para esta materia estaban situadas en recibir indicaciones sobre cómo enseñar contenidos matemáticos. Sin embargo, al finalizar la cursada valoran el trabajo en la materia y expresan que las experiencias vividas les dan un gran acercamiento a su futuro trabajo como profesores. Resaltamos que una parte de los estudiantes no han comenzado a trabajar como docentes aún.

Teniendo en cuenta lo mencionado, desde EM1 consideramos dos cuestiones centrales a la hora de organizar esta propuesta:

- Pensar la materia incorporando actividades en las que sea posible la inmersión en el rol docente para el cual se están formando.
- Inclusión de diversidad de teorías didácticas matemáticas que puedan ser utilizadas de acuerdo a la situación que deban resolver y la necesidad de reconocer qué enfoques subyacen en los documentos de trabajo (diseños curriculares, aportes de investigación, entre otros).

En EM1 se espera que el futuro docente incorpore elementos de distintas líneas teóricas en Educación Matemática como por ejemplo el concepto de *situaciones de acción, formulación y validación* de la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1994), el concepto de *heurísticas* de la Escuela Anglosajona (Polya, 1989), los *tres usos de la variable* dentro del Enfoque Cognitivo (Ursini, 2005), entre otros. También trabajamos cuestiones metodológicas vinculadas a la tarea de enseñar Matemática, como lo son los criterios para redactar consignas y para valorar el uso de TIC (Barreiro et al., 2022).

En nuestra propuesta de trabajo para la inmersión en el rol docente, las cuestiones teóricas y metodológicas son las herramientas que el futuro docente deberá comprender y utilizar de manera pertinente para dar respuesta a las distintas situaciones planteadas. Es importante señalar que EM1 es una materia que no incluye actividades en clases reales de matemática del nivel medio, por lo que el trabajo que se plantea es, en general, un primer acercamiento a las tareas que debe realizar el docente previo a entrar al aula.

A continuación, describimos las ideas de algunas situaciones de la práctica profesional que se utilizaron en EM1, en particular las que se llevaron a cabo en la cursada del primer semestre del año 2024.

- *Situación 1: Convocatoria que realiza una escuela secundaria de provincia de Buenos Aires para cubrir un cargo docente.*

  Cabe señalar que la UNGS está situada en la provincia de Buenos Aires por lo que es el contexto natural en el que, al menos inicialmente, los graduados se insertan en el sistema.

  Los estudiantes, asumiendo el rol de profesor, deben enviar por correo electrónico su *Curriculum Vitae* y una *propuesta de actividades* para enseñar un tema determinado (en este caso, expresiones algebraicas y resolución de ecuaciones e inecuaciones). Ambos requerimientos tienen fecha de envío y entrega, para luego pautar una entrevista con la coordinación del área de Matemática y de la dirección del colegio. Iniciamos el trabajo invitando a una docente del área de Lengua para conversar sobre la forma de elaborar el Curriculum Vitae, la forma esperada de comunicación a través de correo electrónico y la respuesta a pedidos, así como estrategias para enfrentar entrevistas laborales. En la parte oral de defensa del trabajo, la docente de Lengua asumió el rol de Directora del colegio y participó de la entrevista junto a la docente de EM1 quién representó a la Coordinadora del Área de Matemática. De esta manera, los futuros profesores que asistieron a la entrevista pudieron vivenciar intercambios que suelen ocurrir con una autoridad cuya mirada no se focaliza en cuestiones ni matemáticas ni del campo de la Educación Matemática, por no ser del área, así como también participar de un intercambio específico sobre la propuesta de actividades enviada.

- *Situación 2: Cobertura de cargos docentes para una sede nueva de una escuela en la provincia de Chubut.*
  Tomando como base la escuela de nivel medio Nº 765 Roca del Tiempo de la provincia de Chubut, , se convoca a docentes para cubrir cargos de profesor/a en todas las áreas debido a la apertura de una nueva sede en una zona aledaña. Los futuros profesores debían enviar una *carta de interés* a la Comisión Evaluadora conformada por directivos y responsables del área teniendo fecha tope para el envío. Una vez recibido ese mail, desde el colegio enviarían una *prueba técnica* para cada postulante. En este caso, la prueba constó de un escrito con actividades pensadas para un par de clases de Matemática, en el que debían explicitar el año elegido, los objetivos propuestos, la modalidad de trabajo y agregar una breve fundamentación. El contenido matemático quedó a elección del futuro profesor. Esta segunda parte de la actividad también tuvo plazo de entrega. Se indicó que el proceso terminaría con una presentación de las actividades en las que estarán presentes todos los postulantes al cargo, además del cuerpo directivo del colegio. La profesora de Lengua participó, a modo de consultora, para el armado de la carta de interés. A diferencia de la Situación 1, en este caso la presentación oral se realizó en público (en la clase de EM1), y se habilitó la posibilidad de realizar consultas sobre cada presentación. En la exposición, los futuros profesores debieron utilizar un soporte digital. La evaluación de esta situación de la práctica profesional incluye tanto el envío de la carta de interés y la propuesta de actividades, su exposición como así también la participación durante la exposición de los colegas.
- *Situación 3: Participación en una Jornada Docente con modalidad de Seminario*
  Como partícipes de una comunidad educativa, los docentes de la institución deben asistir a distintas jornadas docentes. En este caso, el colegio al que pertenecen los futuros profesores decide realizar una en la que cada área debe trabajar con una propuesta específica. Desde el área de Matemática, se propuso llevar adelante un *Seminario sobre Educación Matemática*, a raíz de haber identificado que sería deseable reforzar conocimientos de este campo. Los requerimientos para participar de la Jornada son: lectura de material bibliográfico que es sugerido desde la Coordinación del Área como base para conocer y manejar distintas líneas de Educación Matemática y buscar información adicional en función de los propios intereses. Todas las cuestiones referidas a lo que cada línea teórica propone son discutidas en un encuentro presencial en el que se pretende generar una conversación fluida entre colegas, mediante la cual cada docente podrá nutrirse con los aportes ajenos, así como también elegir compartir lo que considere aportará a sus compañeros y compañeras. En esta instancia, invitamos al Seminario a un especialista en Educación Matemática. En este caso, la evaluación de la situación incluye tanto la comprensión de los aportes de las distintas líneas teóricas como también la ampliación de bibliografía y la participación activa en la conversación de la Jornada.

Como mencionamos en las situaciones recién descriptas, el desarrollo de cada una incluye una instancia de comunicación (por mail), de elaboración de un escrito (para enviar o para organizar la conversación pautada), y una instancia oral posterior para fundamentar las propuestas, así como también comentar, consultar distintas cuestiones relativas a la realización de los escritos o de cuestiones teóricas que surja de cada participante.
Es importante mencionar que las fechas de entrega de los escritos son anteriores a las instancias de fundamentación oral (entrevista/defensa/seminario) de manera tal que cuenten con una primera devolución docente para enriquecer el trabajo y, luego, mostrar las mejoras en la exposición oral.
En todos los casos, se pretende enriquecer el trabajo realizado pensando en una futura entrega final de alguna o todas las situaciones llevadas a cabo.
A continuación, incluimos, a modo de ejemplo, el planteo de la consigna correspondiente a la *Situación 2*.

La escuela de nivel medio Nº 765 Roca del Tiempo (Lago Puelo, Chubut) abrió una sede nueva que le permite ofrecer vacantes a estudiantes de todos los años. Por ello, convoca a docentes a cubrir cargos de profesor/a en todas las áreas. Quienes estén interesados deberán enviar una ***carta de interés*** a la Comisión Evaluadora conformada por directivos y responsables del área, antes del *sábado 20/4 a las 13hs*. No omitir en el asunto del mail a qué área se postulan. La dirección electrónica para el envío de la carta es: pleonian@campus.ungs.edu.ar En caso de quedar preseleccionados, recibirán por mail una prueba técnica. Para más información de la escuela, visitar el sitio: https://escuela765.wordpress.com/

Convocatoria docente

Prueba técnica para el área de Matemática
La nueva sede de la escuela Nº 765 cuenta con modernas instalaciones: salón de usos múltiples, campo de deportes, biblioteca actualizada, acceso a Internet en todas las aulas, sala de computación y carrito con netbooks para los estudiantes.
Le solicitamos que presente *por escrito* actividades que propondría para una o dos clases de Matemática, explicitando el año elegido, el/los objetivos que persigue, la modalidad de trabajo propuesta y una breve fundamentación de su propuesta. El contenido matemático es a elección.
El plazo para la entrega es el día *miércoles 17/5 a las 10 h*, a la dirección de correo pleonian@campus.ungs.edu.ar. La presentación ante los colegas postulantes se llevará a cabo el día *jueves 18/5 entre las 18 y las 21 horas* de manera presencial. Se dispondrá de 20 minutos para presentar oralmente su propuesta utilizando un apoyo digital que permita compartir las ideas y actividades pensadas. Luego, 10 minutos para responder preguntas, si hubiera.

Prueba técnica

Para abordar esta situación, en las distintas clases se trabaja con las siguientes cuestiones:

- *Carta de interés*: luego de haber trabajado con la profesora de Lengua sobre el armado del Curriculum Vitae, se la convoca nuevamente para que abordar pautas para la redacción de cartas de interés. La idea es poder plasmar el interés genuino de pertenecer a la institución, explicando las razones y mostrando conocimiento de la misma. La profesora envió pautas, recomendó bibliografía, y respondió a través de un aula virtual que utilizamos en la materia las consultas recibidas.
- *Línea teórica de Resolución de Problemas* (Polya, 1989): les proponemos a los estudiantes hacer una búsqueda bibliográfica sobre las cuestiones teóricas que deben utilizar, tanto desde lo matemático como de las cuestiones didácticas involucradas. Esta búsqueda debe estar orientada según los lineamientos del diseño curricular de la provincia, que en este caso pertenecen a la línea de Resolución de Problemas (Polya, 1989). Los futuros profesores aspirantes al cargo deben reconocer esto y la propuesta de trabajo que envíen debe estar en concordancia con este marco. En caso de que lo consideremos necesario, sugerimos alguna bibliografía para comenzar con la búsqueda de información, pero ésta no debería ser la única consultada. En particular para esta situación, utilizamos el aporte de Pochulu (2018) y Pochulu et al. (2015) como sugerencia y punto de partida de la búsqueda autónoma de material bibliográfico.
- *Uso pertinente y significativo de TIC*: por las características de la institución, la inclusión de TIC en las actividades es un punto fuerte en el trabajo que se proponga para las clases. En este sentido, proponemos el uso de criterios para analizar, en consignas matemáticas, la pertinencia y significatividad del uso de TIC por parte de los estudiantes (Barreiro et al., 2022). También consideramos la lectura de Rodríguez et al. (2024) pues allí encuentran análisis de tareas matemáticas mediadas por TIC, una de ellas consistente con el enfoque del diseño curricular de Chubut.

A modo de cierre del trabajo en la cursada, considerando las distintas situaciones que resolvieron desde el rol de *profesores*, promovimos una última actividad para la reflexión personal sobre el trabajo realizado, de modo de identificar cuestiones aprendidas, dificultades, etc., contemplado su futuro trabajo docente.
La evaluación de la materia se realiza a través de una lista de cotejo en las que se plasma el grado de avance, en distintos momentos, de aspectos centrales a ser aprendidos. Además, el examen final es obligatorio y en él incluimos una consigna para retomar lo abordado en la materia. En esta instancia se propicia una reflexión sobre el trabajo realizado a lo largo de la cursada, identificando cuestiones que hayan aprendido sobre el rol docente y aprendizajes didácticos y matemáticos. De este modo pretendemos conocer si reconocen que la propuesta favoreció estos aprendizajes o si, por el contrario, consideran que les obstaculizó. Además, se espera ver conocimiento de las distintas líneas teóricas estudiadas. El examen tiene dos instancias: una escrita y una oral. A modo de ejemplo, incluimos una consigna de final..

Instancia escrita
Tiene el objetivo de que reflexionen sobre lo realizado, lo mejoren a la luz de lo transitado en la materia y argumenten usando las pautas académicas. Les pedimos que retomen el trabajo realizado en la materia alrededor de cada una de las tres *situaciones de la práctica profesional docente* que han abordado y en función de eso preparen:
a) Una mejora de las actividades que presentaron en la *Situación 1* (que en su momento se realizó de manera grupal, para esta instancia debe pensarse individualmente) con el análisis que argumente sobre la mejora. (Estimar un máximo de 2 carillas)
b) Alguna mejora a la consigna de la *Situación 2* o bien alguna consigna que dé continuidad a la presentada. (Estimar 1/2 carilla)
c) Identificar cuestiones que consideren que aprendieron en el Seminario (*Situación 3*). Puede ser a partir de lo estudiado, de la bibliografía buscada o de los intercambios. (Estimar un máximo de 2 carillas)
Además, deberán identificar cuestiones que consideran que han aprendido para el rol docente y reflexionen intentando advertir qué condiciones de la enseñanza (en la materia **EM1**) resultaron clave, desde su perspectiva, para tal fin. (Estimar 1/2 carilla)

Instancia oral
En el oral conversaremos sobre la *instancia escrita*, que deberán llevar impresa.

Observaciones
Todos los análisis y fundamentaciones que entreguen deben estar bien planteados.
Deben mostrar el uso de material bibliográfico buscado autónomamente (**no** solamente el ofrecido en la materia) por lo menos para el ítem c) de este examen (punto correspondiente al Problema 3).

Examen final EM1 – 1°S 2024

El rol de los docentes de EM1 es el de acompañar a los futuros profesores en la búsqueda de material bibliográfico, teórico y/o práctico sobre los conceptos de Educación Matemática que se trabajen en la cursada, en las resoluciones de las actividades matemáticas, de los análisis, presentación de entregas, etc. El acompañamiento es integral y fortalece la construcción de su propia identidad docente.
En todos los semestres en los que se cursa EM1 sostenemos la riqueza del trabajo con este tipo de situaciones y pensamos en nuevas opciones o modificaciones para los siguientes semestres. Esto implica pensar en nuevas situaciones que contribuyan a la *profesionalización docente*, así como también incluir variaciones en los contenidos que se trabajan en cada una de ellas. Algunos ejemplos de estas variaciones son las siguientes:

- manteniendo la idea de la *situación 1* que hemos descripto, variamos el contenido matemático.
- en la *situación 2* buscamos provincias que utilicen otros marcos teóricos en sus diseños curriculares o modificamos el planteo para que se puedan trabajar enfoques de Educación Matemática distintos al de la provincia de Buenos Aires.
- para una variación de la *situación 3*, consideramos realizar una jornada de capacitación donde cada futuro profesor deba oficiar de capacitador teniendo a cargo algún contenido de Educación Matemática o también consideramos hacer un encuentro de tipo *clínica*.

Entendemos que esta propuesta de trabajo es un inicio para atender a la *profesionalización docente*, y tiene la intención de acercar a los estudiantes a distintas situaciones que podrían llegar a afrontar en su futuro desempeño profesional.

Referencias bibliográficas

Barreiro, P., Leonian, P., Marino, T., Pochulu, M., & Rodríguez, M. (2022). *Perspectivas metodológicas en la enseñanza y en la investigación en educación matemática* (3ra. Ed.). Rodríguez, M. (Coord.). Ediciones UNGS.
Brousseau, G. (1994). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la Matemática*. Córdoba: Serie B. Trabajos de Matemática, FAMAF, UNC.
Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional.* Conferencia en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, España.
Pochulu, M. (Comp.). (2018). *La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones*. http://gided.unvm.edu.ar/index.php/book/la-modelizacion-en-matematica-marco-de-referencia-y-aplicaciones/.

Pochulu, M., & Rodríguez, M. (comps). (2015). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 1*. Editorial Universitaria de Villa María y Universidad Nacional de General Sarmiento. https://ediciones.ungs.edu.ar/wp-content/uploads/2022/08/9789876301169-completo.pdf

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas* (2.a ed.). Editorial Trillas. https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/como-resolver.pdf

Rodríguez, M., Pochulu, M., & Espinoza, F. (comps). (2024). *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos. Volumen 2*, Universidad Nacional de General Sarmiento.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del Álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* Trillas.

Fortalecimiento del desarrollo profesional de docentes de matemática del nivel medio: experiencias y prospectivas desde un Ciclo de Formación en Paraguay

Adilio Gabriel LEZCANO CABALLERO

Universidad Nacional de Pilar
2800 Mello esq. Vicente Ignacio Iturbe, Pilar, Paraguay
adiliolezcano@gmail.com

Resumen

La indagación de las perspectivas ministeriales en contraste con las prácticas docentes, arrojó como resultado la necesidad de fortalecimiento de las capacidades del profesor de matemática de educación media del sistema educativo paraguayo. Para atender esta situación dentro del marco de la ejecución de un proyecto de investigación cofinanciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Paraguay) se diseñó e implementó un dispositivo de formación a los efectos de fortalecer las competencias del docente para la enseñanza de la matemática. El mismo consistió en un Diplomado en Educación Matemática, dirigido a docentes en actividad de los departamentos Itapuá, Misiones y Ñeembucú. Se trabajó con un grupo de docentes en el estudio y análisis de consignas provistas por la instancia ministerial para su uso en clases. En el Diplomado se problematizó la formulación de actividades y su potencial para trabajarlas en clases bajo la resolución de problemas o modelización matemática. Asimismo, en un segundo momento, los docentes asistentes estuvieron enfrentados a diseñar un plan de clases para su posterior implementación. En el presente trabajo se presentan los puntos más relevantes de esta experiencia. Como resultados, se comparten las percepciones acerca de cómo los participantes abordaron las consignas propuestas del cursado y el proceso que recorrieron los docentes para la elaboración del plan de clase, a partir del cual se advierte la necesidad de fortalecer el conocimiento especializado de matemática de los profesores.

Palabras clave: Desarrollo profesional docente. Educación matemática. Conocimiento especializado del profesor de matemática. Práctica docente.

Introducción

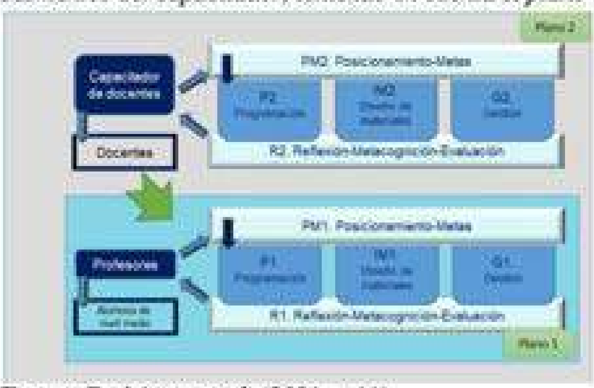
Reportamos una fase de una investigación que se enmarca en el campo de la Educación Matemática, cuya aspiración tiende a contribuir al desarrollo profesional de los docentes activos de la disciplina de matemática de la enseñanza media del Paraguay, a los efectos de obtener un mejoramiento en la calidad del aprendizaje de los estudiantes. En un estudio anterior, detectamos una brecha entre las directrices ministeriales propuestas en los documentos para profesores y el reconocimiento y comprensión de esas directrices por parte del docente (Rodríguez et al., 2021; Enciso et al.,2021 y Lezcano et al., 2021). De la indagación mencionada se desprendió la necesidad de fortalecer los conocimientos del docente de matemática de la enseñanza media.

A partir de allí, diseñamos e implementamos un dispositivo de formación dirigido a docentes de matemática en ejercicio de los departamentos de Misiones, Itapúa y Ñeembucú (Paraguay) en el marco de un proyecto de investigación cofinanciado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología de Paraguay y la Universidad Nacional de Pilar. Reportamos la experiencia en el proceso de diseño e implementación de un *Diplomado en Educación Matemática*, orientado a fortalecer el desarrollo profesional de los docentes participantes. Se toma como marco teórico el Modelo Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (conocido con su sigla en inglés, MTSK, Carrillo et al., 2013). Este modelo exhibe los tipos de conocimientos de un profesor de matemática, explicitando el dominio del conocimiento didáctico del contenido y del conocimiento matemático, los que son permeados por las creencias de los profesores acerca de la matemática, el aprendizaje y la enseñanza.

El dispositivo de formación diseñado se fundamenta en el Modelo de Planos de la Formación de Profesores (Rodríguez et al., 2019), y aborda el fortalecimiento de los conocimientos específicos de cuestiones metodológicas para la clase de matemática (Rodríguez et al., 2022) y las directrices brindadas en el Curriculum del Ministerio de Educación y Ciencias (MEC) (MEC, 2016a, 2016b, 2016c). Para este trabajo nos propusimos que los docentes amplíen sus conocimientos para: definir metas, diseñar instrumentos, gestionar la clase y reflexionar sobre su trabajo. Estos últimos, corresponden a momentos de trabajo del profesor en el Plano 1 (Rodríguez et al., 2021). Para ello, el equipo capacitador, diseñó estratégicamente las actividades del Diplomado (Plano 2, del Modelo de Planos referido) como puede verse en la **Figura 1**.

Figura 1

Momentos del capacitador, teniendo en cuenta el plano 1



Fuente: Rodríguez et al. (2021, p.11)

El cursado del Diplomado se estructuró en tres módulos desarrollados en clases sincrónicas (teleconferencias) y asincrónicas a través de la plataforma Moodle, con una duración de 100 horas en total. El primero de los módulos refirió al enfoque de enseñanza de la matemática que el MEC propicia. El segundo, se centró en la planificación de la clase de matemática, y el tercero tuvo foco en la integración de los módulos anteriores sumando un análisis y reflexión sobre lo propuesto. Se contó con una matrícula inicial de 105 participantes, sin embargo, iniciaron 45 y concluyeron 37. Los participantes accedieron a una serie de herramientas para planificar y gestionar la clase, cuyo potencial radica en ayudar a organizar y seleccionar las actividades para los diferentes momentos de la enseñanza en consonancia a la perspectiva teórica adoptada y en sintonía con las pautas del MEC.

Resultados

Sobre el Dispositivo de Formación

La propuesta diseñada para la formación se planificó en tres módulos, el Módulo 1: Cuestiones teóricas y metodológicas en Educación Matemática (agosto del 2024); Módulo 2: Planificación de clases de matemática para el nivel medio (setiembre); Módulo 3: Implementación y análisis de secuencias didácticas. Socialización de la experiencia (finales de octubre). El trabajo asincrónico se dispuso y organizó en la plataforma Moodle (**Figura 2**). Los participantes, en primera instancia, pudieron acceder a materiales varios y consignas de trabajo que fueron retomados en clases sincrónicas para la discusión y retroalimentación.

Figura 2

Fuente: Elaboración propia

En las clases se trabajaron contenidos de Educación Matemática, de corte teóricos, metodológicos, como así también, acerca de pautas para el trabajo académico. Se les propuso inicialmente escoger una consigna propuesta por el MEC, analizarla e identificar si la misma era potencialmente apropiada para trabajar bajo el enfoque de Resolución de Problema (RP) (Rodríguez, 2012) o Modelización Matemática (MM) (Pochulu, 2018), siendo que ambas se encuentran incluidas como sugerencias a trabajar en clases, por parte del MEC. Para llevar adelante esta tarea, organizamos una actividad para abordar aspectos metodológicos para fundamentar, analizar o argumentar en contexto académico y sobre un uso adecuado de inteligencia artificial para la tarea docente. Superada esta etapa siguió la tarea de planificar una clase, estableciendo pautas para ello. Cada una de las actividades preparadas para que los participantes trabajen contaron con materiales para la lectura previa, pautas a seguir y evaluaciones al finalizar cada módulo.

Sobre las consignas diseñadas

Las consignas presentadas se fundamentan en el Modelo de Planos y para resolverlas, cada participante debió poner en diálogo el subdominio del *conocimiento de la enseñanza* y así como el dominio del *conocimiento del contenido matemático*. De este modo pretendimos que el docente articule conceptos de la Educación Matemática (conocer las características que debe cumplir una actividad para ser potencialmente un *problema*) con el conocimiento de la disciplina (para resolver la actividad) y generar argumentaciones articulando heurísticas advertidas en las resoluciones matemáticas con afirmaciones en torno a si la actividad resultaría un problema para los estudiantes del nivel medio. Además, el docente tuvo que recurrir al *conocimiento de los estándares*, pues la sugerencia consistió elegir la consiga similares a las que usualmente emplea en la clase, y que la misma esté en sintonía con las pautas ministeriales. *Véase* **Figura 3**.

Figura 3

Fuente: Elaboración propia

Las respuestas ofrecidas como respuestas a las consignas resultaron ser poco satisfactorias, puesto que no hemos podido constatar con los trabajos presentados el conocimiento matemático de los docentes. Esto se debió a la ausencia de las resoluciones matemáticas de las consignas seleccionadas para el análisis. Al no resolverse tampoco pudimos constatar saberes del dominio del conocimiento didáctico del contenido. Puntualmente, no tenemos evidencias de que los participantes puedan discernir entre la RP y la MM. Además, hemos advertido la dificultad para comprender las consignas propuestas. Otro aspecto relevante detectado es que, la selección de la consigna que requiere el uso de conceptos matemáticos, los participantes en su mayoría asumen, de manera implícita, que se trata de un problema de RP. Sin embargo, las seleccionadas no siempre cumplen con las condiciones necesarias para ser considerados dentro del enfoque de RP en el sentido planteado por Polya (1989) y que la misma se constituya en un problema para el estudiante (Colombano et al., 2009). A continuación, en la **Figura 4**, presentamos una consigna y la argumentación expuesta por uno de los participantes.

Figura 4
Consigna Propuesta para el docente

Figura 5
Análisis de la consigna

Respuestas como la que se expone se presentan en forma constante y mayoritaria. Las mismas se presentan sin la aplicación de la teoría en el proceso argumentativo, así, los docentes no reconocen que los enunciados presentados no se corresponden con la MM, puesto que como se puede notar, la situación seleccionada no invita a buscar información para ensayar modelos matemáticos, ni plantea variables que eventualmente puedan colaborar en la toma de decisiones para resolver la situación. Las valoraciones hechas por el docente sobre el potencial de la consigna, se circunscriben en el campo de la opinión. Así, afirman que las consignas seleccionadas pueden ser útiles para trabajar la modelización, pero estas afirmaciones no se apoyan en evidencias, ni articulan teoría. Por el contrario, las posturas asumidas se estriban en intuiciones a partir de la posibilidad del uso del contenido matemático para dar una respuesta al enunciado. La no aparición de lo matemático como herramienta argumentativa para la generación de evidencia se mantuvo hasta el cierre del cursado, poniendo en perspectiva que el conocimiento matemático requiere especial atención. Como cierre del cursado presentamos una serie de consignas en contexto extramatemático y el objetivo a trabajar en MM o RP. El planteo solicitó que los participantes eligieran una de ellas para atravesar la experiencia que se pretende desarrollar con el estudiante en las aulas. De este modo, el docente debe resolver la actividad poniendo en juego cuestiones matemáticas. Sin embargo, como se puede ver en las siguientes figuras, lo matemático por lo general estuvo ausente en los trabajos presentados.

Figura 6
Tarea elegible

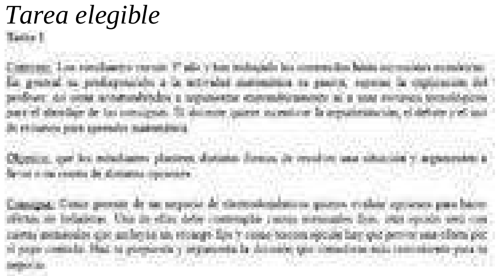
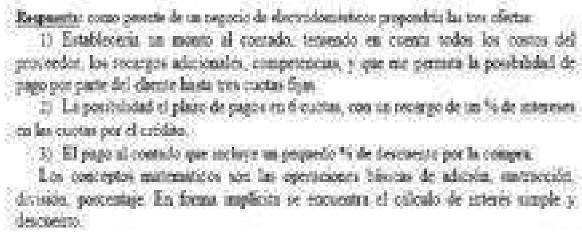


Figura 7
Trabajo final presentado



Respuesta: como gerente de un negocio de electrodomésticos propondría las tres ofertas:

1) Establecería un monto al contado, teniendo en cuenta todos los costos del proveedor, los recargos adicionales, competencias, y que me permita la posibilidad de pago por parte del cliente hasta tres cuotas fijas.

2) La posibilidad el plazo de pagos en 6 cuotas, con un recargo de un % de intereses en las cuotas por el crédito.

3) El pago al contado que incluye un pequeño % de descuento por la compra.

Los conceptos matemáticos son las operaciones básicas de adición, sustracción, división, porcentaje. En forma implícita se encuentra el cálculo de interés simple y descuento.

Se esperaba que el docente resolviera la consigna matemática de diversas formas, poniendo en juego conceptos matemáticos y que sean identificados por el resolutor. Además, se les solicitó indicar con qué conceptos matemáticos se podría relacionar cada resolución de la actividad. La planificación y la aplicación de la misma quedó postergada ante la persistencia de la no aparición de lo matemático, hecho que plantea discernir si esta ausencia se debe a algún tipo de falla en el diseño de la consigna o por la falta de conocimiento matemático. No obstante, sí queda a la vista, la necesidad de fortalecer la comprensión y el conocimiento matemático del docente participante del cursado.

Sobre la permanencia de los participantes

El Diplomado se desarrolló íntegramente en forma virtual, no obstante, del 100% de los preinscriptos se matriculó el 24% y concluyó el 21% (**Figura 8**). Si bien la cantidad de matriculados presenta una marcada diferencia en comparación con el número de preinscriptos, es importante destacar que el 86% de quienes finalmente se matricularon lograron concluir el proceso (**Figura 9**), a razón del ajuste indicado en la sección 3.3 es del 86%; se gestó un plan de seguimiento, puesto que los docentes participantes paulatinamente mermaban su participación en los encuentros sincrónicos.

Figura 8
Comparación entre Pre-Inscripto e Inscriptos

Fuente: Elaboración propia

Figura 9
Retención de Participantes

Fuente: Elaboración propia

Se observaron en los encuentros sincrónicos, hechos como que las cámaras escasamente se mantenían encendidas, exponiendo como razón para tal situación, la débil conectividad en la región donde se encontraban en el momento de la clase. De este modo, se le imposibilitaba estar visibles. Por otro lado, cuando se trataba de trabajar sobre lectura de los materiales a leer, la participación era pronunciadamente escasa. Este último hecho asociado a la no aparición de lo matemático debilitando cualquier intento de línea argumentativa, permite pensar que es necesario revisar la formación docente y que el problema es anterior a las cuestiones metodológicas de la enseñanza de la disciplina.

Conclusiones

El recorrido por el cursado del Diplomado pone en relieve la necesidad de profundizar el conocimiento *matemático* ante la no exhibición de los argumentos matemáticos que permitan evidenciar si las consignas reúnen las condiciones para ser empleadas bajo clases que promuevan la modelización matemática o la resolución de problemas. La no exhibición de lo matemático se observó longitudinalmente durante el periodo de ejecución del dispositivo diseñado para fortalecer el desarrollo profesional docente, lo cual advierte la necesidad de trabajar desde las instituciones de formación de formadores el *conocimiento matemático* de los participantes, en sus tres subdominios previo a seguir intentando fortalecer el conocimiento didáctico del contenido. Las omisiones reiteradas de lo matemático en las entregas de las tareas, las dejaron en la categoría de incompletas. Más allá de esto, los silencios ante el pedido de respuestas a consignas, nos invita a preguntarnos dónde están posibles causas: si son los subdominios del conocimiento matemático o el didáctico; o incluso si el problema se encuentra fuera del espectro de la educación matemática y alude a algún tipo de idiosincrasia docente. Independientemente de la respuesta a la disyuntiva planteada es necesario fortalecer el *conocimiento matemático* de los docentes en ejercicio.

Referencias bibliográficas

Carr, W., & Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza: la investigación-acción en la formación del profesorado*. Martínez Roca.

Colombano, V., Isla Zuvialde, D., Marino, T., & Real, M. (2009). El problema de diseñar problemas. *Actas de la XXXII Reunión de Educación Matemática*. Universidad Nacional de Mar del Plata. https://www.researchgate.net/publication/326161138_El_problema_de_disenar_problemas

Enciso, V., Lezcano, A. y Rodríguez, M. Planificación docente en relación con la propuesta paraguaya en el área de matemática. *Noticiero de la Unión Matemática Argentina, 56*(2). 50-53. https://www.union-matematica.org.ar/images/Noticiero/Noticiero%20de%20la%20UMA%20-%20Volumen%2056%20Nmero%202.pdf

Lezcano, A., Enciso, V. y Rodríguez, M. Posicionamientos estatales sobre la enseñanza de la matemática en Paraguay y perspectivas docentes en contraste. *Noticiero de la Unión Matemática Argentina, 56*(2). 62-65. https://www.union-matematica.org.ar/images/Noticiero/Noticiero%20de%20la%20UMA%20-%20Volumen%2056%20Nmero%202.pdf

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016a). *Guía didáctica para docente. Matemática. 1° curso*. MEC. https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13209.

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016b). *Guía didáctica para docente. Matemática. 2° curso.* MEC. https://www.mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13210.

Ministerio de Educación y Cultura - Paraguay. (2016c). *Guía didáctica para docente. Matemática. 3° curso*. MEC. https://mec.gov.py/cms_v2/adjuntos/13211.

Pochulu, M. (2018). *La modelización en Matemática: marco de referencia y aplicaciones*. Villa María: GIDED. http://gided.unvm.edu.ar/index.php/book/la-modelizacion-enmatematica-marco-de-referencia-y-aplicaciones/

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas. https://cienciaymatematicas.files.wordpress.com/2012/09/comoresolver.pdf.

Rodríguez, M. (2012). Resolución de problemas. En M. Pochulu & M. Rodríguez (Comps.), *Educación matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos* (pp. 153-174). Editorial Universitaria de Villa María y Universidad Nacional de General Sarmiento.

Rodríguez, M., Pochulu, M., & Fierro, M. (2019). Modelos de planos de formación docente para abordar distintos roles del profesor de matemática. *Revista Electrónica de Divulgación de Metodologías emergentes en el Desarrollo de las STEM, 1*(1), 84-103.

Rodríguez, M. A., Enciso V., & Lezcano A. (2021). *Desarrollo profesional de docentes de matemática de Paraguay en relación con perspectivas didácticas ministeriales. Revista RECUS, 6*(3), 8-20. *https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=8273568*

Tecnología en Educación Matemática

Juan E. NÁPOLES VALDES

Universidad Nacional del Nordeste, Argentina
U.T.N.–Facultad Regional Resistencia, Argentina
Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina

Resumen

El propósito de esta Conferencia yace en abundar sobre las posibilidades de uso y beneficios que brinda el uso de tecnologías en las prácticas docentes; algunos de esos beneficios son:

Visualización de conceptos abstractos: La tecnología permite representar de forma visual y dinámica conceptos matemáticos que, de otra manera, serían difíciles de comprender. Herramientas como gráficos, simulaciones o software de geometría (por ejemplo, GeoGebra) permiten a los estudiantes ver en forma interactiva cómo funcionan las ecuaciones, transformaciones geométricas, o el comportamiento de funciones.
Interactividad y personalización: Las plataformas tecnológicas permiten a los estudiantes interactuar con el contenido matemático, lo que facilita el aprendizaje autónomo. Pueden practicar a su propio ritmo, recibir retroalimentación inmediata y adaptar el contenido a sus necesidades y estilos de aprendizaje.
Fomento de habilidades del siglo XXI: El uso de la tecnología en matemáticas no solo desarrolla las habilidades matemáticas, sino también habilidades digitales, de resolución de problemas y de pensamiento crítico, todas ellas esenciales en la sociedad actual. Los estudiantes aprenden a utilizar herramientas que les serán útiles en muchos otros campos.
Facilita el aprendizaje colaborativo: Las tecnologías permiten que los estudiantes trabajen juntos en proyectos matemáticos, resolviendo problemas en equipo, lo que fomenta la colaboración, la discusión y el intercambio de ideas.
Acceso a recursos educativos de calidad: Internet ofrece una gran cantidad de recursos matemáticos, desde tutoriales hasta problemas resueltos y aplicaciones interactivas. Los estudiantes pueden acceder a estos recursos en cualquier momento y desde cualquier lugar, lo que les permite enriquecer su aprendizaje fuera del aula.
Automatización de tareas repetitivas: Herramientas como calculadoras avanzadas, software de álgebra computacional y hojas de cálculo permiten a los estudiantes realizar cálculos complejos en forma rápida y precisa, permitiéndoles centrarse en la comprensión de conceptos y en la resolución de problemas en lugar de perder tiempo en cálculos tediosos.
Evaluación continua y personalizada: Las plataformas tecnológicas permiten realizar evaluaciones constantes y adaptativas, brindándoles a los docentes la oportunidad de seguir el progreso de cada estudiante detalladamente. Esto facilita la detección temprana de áreas problemáticas y permite una intervención oportuna.

En el seno de la Conferencia, se ilustrarán estas y otras ventajas, sobre todo vinculadas a la Educación por Proyectos.

Enseñanza por proyectos en Educación Matemática como oportunidades de aprendizaje de calidad en estudiantes de un contexto rural

Sandra Patricia ROJAS SEVILLA
Universidad de Sucre, Sincelejo, Colombia

Resumen

La enseñanza por proyectos en Educación Matemática constituye un escenario que brinda oportunidades de aprendizaje de calidad y un acceso equitativo a las mismas. Una forma que se ha explorado, para su implementación es mediante movimientos entre distintos ambientes de aprendizaje, en el contexto de la Educación Matemática Crítica. Estos movimientos, ofrecen andamiaje a los estudiantes para desarrollar habilidades propias del pensamiento matemático. Además, el trabajo por proyectos, despierta el interés y motivación en los estudiantes, siempre que este ocupe el centro del proceso de aprendizaje. Aunque, existe una plétora de investigaciones que se reportan sobre esta metodología de enseñanza y aprendizaje, aún existen desafíos en su implementación y evaluación.

La resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas en la educación básica y media

Roberto Carlos TORRES PEÑA
Universidad del Magdalena
Santa Marta, Colombia
Rtorres@unimagdalena.edu.co

Resumen

La resolución de problemas puede ser una buena estrategia en el proceso de enseñanza de las matemáticas, especialmente en niveles de educación básica y media, ya que permite a los estudiantes desarrollar el pensamiento matemático de manera gradual, sobre todo si se trabaja desde problemas simples a problemas complejos. En ese sentido, es importante plantear problemas que desafíen a los estudiantes y les permitan desarrollar habilidades de razonamiento y de resolución de problemas, es decir, la resolución de problemas como medio y como fin. Así mismo, es importante que los profesores planteen buenas preguntas para guiar el proceso de resolución de problemas y hacerlo más eficiente.
La educación matemática ha experimentado una evolución significativa, pasando de un enfoque centrado en la memorización de reglas y procedimientos a una pedagogía que enfatiza la resolución de problemas como un medio primordial para el aprendizaje. Esta transformación reconoce que la alfabetización matemática implica mucho más que la simple adquisición de datos; se trata fundamentalmente de la capacidad de aplicar el conocimiento en situaciones nuevas y desafiantes. En este contexto, la resolución de problemas como articulador del aprendizaje promueve en los estudiantes avances en el pensamiento matemático y la perseverancia frente a tareas complejas. El Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) insiste en la resolución de problemas como un eje central del currículo de matemáticas desde 1980, lo que resalta su importancia en la disciplina.
La resolución de problemas puede ser entendida como una habilidad superior de pensamiento que exige la capacidad de identificar y comprender la naturaleza de un problema, descomponerlo y desarrollar estrategias efectivas para abordarlo y se presenta como un componente fundamental del aprendizaje escolar, ejerciendo un fuerte efecto formativo en los estudiantes. De hecho, diversas investigaciones indican que el aprendizaje a través de estrategias de resolución de problemas es más eficaz que el enfoque científico para mejorar las habilidades matemáticas de los estudiantes en áreas como la comunicación, la creatividad, la propia resolución de problemas y el razonamiento matemático.

Palabras clave: Educación Matemática. Resolución de Problemas. Habilidad superior. Educación Básica y Media.

Introducción

Al poner la resolución de problemas como centro de la actividad matemática en el aula en los niveles de educación básica y media implica un cambio significativo y retador para docentes y estudiantes. Pues, ya no se trata de una mera aplicación de fórmulas aprendidas de memoria, sino una estrategia que cultiva una comprensión profunda y un pensamiento flexible. Un problema matemático genuino requiere el uso de herramientas para las cuales no existe una solución inmediata aparente, lo que desafía a los estudiantes a pensar críticamente y a desarrollar una comprensión conceptual que va más allá de la fluidez procedimental. Por lo tanto, es fundamental reconocer que la resolución de problemas no es una técnica de enseñanza, sino un elemento central de en el aprendizaje de las matemáticas.

Investigaciones recientes destacan la importancia y las diversas facetas de la resolución de problemas en la educación matemática. Mason, Burton y Stacey (2010) proponen un marco de tres fases para abordar la resolución de problemas: Entrada, Ataque y Revisión. La fase de Entrada implica familiarizarse con el problema, identificando lo que se sabe y lo que se quiere encontrar. La fase de Ataque se centra en idear y llevar a cabo una estrategia para resolver el problema. Finalmente, la fase de Revisión implica reflexionar sobre la solución y el proceso utilizado. Este enfoque no solo promueve el desarrollo del pensamiento matemático, si no el proceso mismo de resolución de problemas.

Por su parte, English (2016) destaca la necesidad de fomentar enfoques creativos para la resolución de problemas, enfatizando el papel de la heurística para ayudar a los estudiantes a idear y practicar soluciones. Su perspectiva se alinea con la idea de que la resolución de problemas va más allá de la aplicación de procedimientos rutinarios y requiere agilidad mental para abordar tareas complejas y no familiares. English también ha desarrollado los pasos para la resolución de problemas en cinco etapas: centrarse en los problemas, describirlos como conceptos, planificar las soluciones, implementar los planes y evaluar las soluciones.

Por otro lado, las investigaciones de Cai (2017) a cerca de la integración de la "formulación de problemas" en la enseñanza de las matemáticas, sugieren que permitir a los estudiantes formular sus propios problemas basados en situaciones dadas, puede proporcionar oportunidades de aprendizaje más ricas y de mayor calidad. Para ello, define la formulación de problemas como el acto de formular o reformular y expresar un problema o tarea basado en un contexto particular. Su investigación explora cómo los maestros pueden apoyar a los estudiantes en esta actividad y cómo la instrucción basada en la formulación de problemas afecta tanto a los maestros como a los estudiantes.

Lo anterior, pone de manifiesto que la resolución de problemas mejora significativamente la comprensión conceptual y la capacidad de aplicar el conocimiento en diversos contextos. A través de la resolución de problemas, los estudiantes desarrollan una comprensión matemática más profunda, mejorando su capacidad para conectar ideas y aplicar estrategias en diversos contextos. Shakila (2024). La resolución de problemas representa el camino más expedito para la contextualización de los conceptos y para la transferencia de conocimientos matemáticos, asegurando un aprendizaje duradero y significativo. En el enfoque de enseñanza a través de la resolución de problemas, los estudiantes desarrollan los conceptos matemáticos resolviendo problemas que promueven su apropiación, esto fomenta la creatividad, la flexibilidad cognitiva y la perseverancia. Un entorno de aula que promueve la resolución de problemas brinda oportunidades para la creatividad y apoya el desarrollo de una identidad matemática positiva para todos los estudiantes.

La resolución de problemas en el aula de clases y fuera de ella

La implementación de la resolución de problemas como estrategia pedagógica en la educación básica y media conlleva muchos beneficios que impactan positivamente el desarrollo cognitivo y las habilidades de los estudiantes.

Uno de los beneficios es el desarrollo del pensamiento matemático y el razonamiento lógico. Al desarrollar habilidades para resolver problemas, los estudiantes aprenden no solo a abordar problemas matemáticos, sino también a trabajar lógicamente a través de cualquier dificultad que puedan enfrentar. Participar en la resolución de problemas agudiza sus habilidades analíticas, permitiéndoles abordar problemas complejos, proponer diversas soluciones y justificar sus elecciones. Además, las habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico preparan a los estudiantes para comprender y analizar su entorno, capacitándolos para ser líderes contribuyentes en la sociedad.

Para que la resolución de problemas sea una estrategia pedagógica efectiva en el desarrollo del pensamiento matemático, es importante implementar una progresión lógica que va desde problemas simples hasta problemas complejos.

Esta progresión permite a los estudiantes construir una base sólida de comprensión antes de enfrentarse a desafíos más exigentes, el tránsito por problemas más sencillos o introductorios antes de introducir problemas complejos y retadores motiva el aprendizaje y promueve el desarrollo gradual del pensamiento matemático. Esta idea se hace visible en los documentos orientadores del Currículo colombiano de matemáticas en los niveles de básica primaria, secundaria y media, en donde, el estudiante demuestra logros en el desarrollo de los diferentes tipos de pensamiento definidos en los lineamientos curriculares y los derechos básicos de aprendizaje, a medida que avanza en los grados de educación. Este aumento gradual en la dificultad permite a los estudiantes desarrollar confianza a medida que abordan tareas más exigentes, fomentando una sensación de logro, confianza y autoeficacia, evitando la frustración y el fracaso. De esta manera, los estudiantes aprenden matemáticas resolviendo problemas y construyen nuevas ideas a partir de los conocimientos previos.

Los problemas que requieren un esfuerzo intelectual significativo son esenciales en la educación matemática por varias razones fundamentales. Un buen problema de matemáticas exige un alto nivel de pensamiento y habilidades para resolverlo. El objetivo de esta estrategia es guiar a los estudiantes para que se conviertan en solucionadores de problemas creativos y altamente capaces en situaciones no rutinarias.

El papel del profesor radica en promover la exploración, la discusión y la justificación de soluciones en el aula, a través del diseño de tareas de resolución de problemas que sean apropiadas y desafiantes, promoviendo la participación y el discurso de los estudiantes en el aula. Se debe animar a los estudiantes a explorar las matemáticas a través de la indagación, donde plantean preguntas, realizan investigaciones y descubren principios. El trabajo en grupo y la resolución colaborativa de problemas permiten a los estudiantes compartir diferentes enfoques y aprender unos de otros.

Hacer la pregunta adecuada es una habilidad fundamental para los profesores que orientan el proceso de enseñanza a través de la resolución de problemas. Comenzar las lecciones de matemáticas con una buena pregunta puede desarrollar el razonamiento matemático y para ellos se deben hacer preguntas abiertas que permitan múltiples respuestas y fomenten procesos avanzados del pensamiento. Preguntas como ¿De qué otra manera puedes resolver el problema?, ¿Puedes ver un patrón? ¿Cómo puede este patrón ayudarte a encontrar una respuesta? Entre otras.

Para evitar dar respuestas directas, los profesores deben fomentar que los estudiantes reflexionen y se esfuercen. En ese sentido, el profesor no debe ser la única fuente de respuestas, sino que debe animar a los estudiantes a preguntarse y a luchar con los problemas. En lugar de apresurarse a dar pistas y soluciones, se debe pedir a los estudiantes que evalúen qué es lo difícil del problema y animarlos a resolverlo por sí mismos.

Conclusiones

La resolución de problemas emerge como una estrategia pedagógica en la educación básica y media, fomentando el pensamiento matemático, el razonamiento lógico, la creatividad, la flexibilidad y la perseverancia. Una progresión gradual desde problemas simples hasta complejos, respaldada por un buen proceso de instrucción o acompañamiento, permite a los estudiantes construir una base sólida y desarrollar una comprensión conceptual profunda. Los problemas desafiantes son esenciales para estimular las habilidades de razonamiento y promover una mentalidad de crecimiento. Las técnicas efectivas de cuestionamiento por parte de los profesores desempeñan un papel importante en la guía de los estudiantes a través del proceso de resolución de problemas sin proporcionar respuestas directas. En última instancia, la resolución de problemas sirve tanto como un medio poderoso para aprender conceptos matemáticos como un importante objetivo educativo en sí mismo, desarrollando habilidades transferibles valiosas para la vida.

Para que los educadores implementen de manera efectiva la resolución de problemas en sus aulas, se recomienda priorizar las actividades de resolución de problemas como partes integrales de las lecciones de matemáticas, en lugar de ejercicios aislados. Es crucial seleccionar y secuenciar cuidadosamente los problemas para garantizar un aumento gradual en la complejidad, en consonancia con los niveles de desarrollo de los estudiantes. Se deben incorporar problemas desafiantes y abiertos que fomenten la exploración, la discusión y la justificación de las soluciones. Es fundamental fomentar un entorno de aula colaborativo y de apoyo donde los estudiantes se sientan cómodos asumiendo riesgos, cometiendo errores y aprendiendo unos de otros. Se debe alentar a los estudiantes a reflexionar sobre sus procesos de resolución de problemas, incluidas las estrategias que utilizaron, lo que funcionó bien y lo que podrían hacer de manera diferente la próxima vez. Finalmente, es beneficioso conectar los problemas matemáticos con contextos del mundo real e intereses de los estudiantes para mejorar el compromiso y demostrar la relevancia de las matemáticas.

Referencias Bibliográficas

Cai, J. (2017). What research says about teaching mathematics through problem posing. *Mathematics Education*, *52*(5), 589-600.

English, L. D., & Gainsburg, J. (2016). Problem solving in a 21st-century mathematics curriculum. En *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 1-25). Routledge.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically*. Pearson Education.

MEN. (2006). Estándares Básico de Competencia. En MEN. Bogotá.

Wilkerson, T. (2022, July). Problem-Solving: An Approach to Understanding and Critiquing Our World. *NCTM*. Recuperado de https://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Trena-Wilkerson/Problem-Solving_-An-Approach-to-Understanding-and-Critiquing-Our-World/

Shakila. J. Learning of Mathematical Concepts in Relation to Spatial Ability and Problem-Solving Skills among Secondary School Pupils. IRA International Journal of Education and Multidisciplinary Studies, [S.l.], v. 6, n. 1, p. 106-112, feb. 2017. ISSN 2455-2526.

Reflexión sobre el uso de herramientas digitales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Jaider Albeiro FIGUEROA FLÓREZ
Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales, Colombia

Resumen

Se pretende hacer una reflexión sobre algunos usos dados a las herramientas digitales en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la forma en que estos usos se apartan o direccionan hacia las directrices o lineamientos planteados por las investigaciones recientes sobre este tema. La clave está en cómo estos usos pueden jugar un papel trascendental o no en la comprensión del conocimiento disciplinar, el desarrollo del pensamiento matemático y la resolución de problemas. En cuanto a los usos sin trascendencia se esbozan: el uso icónico, el cambio de representaciones estáticas a ejecutables y en el peor de los casos, aquellos que tergiversan el conocimiento disciplinar. En lo atinente a los usos con capacidad de trascendencia se resaltan: el uso como validación o apoyo a la actividad demostrativa, como procesadores de grandes cantidades de datos (simulación y programación) y como instrumento de mediación cognitiva, estos últimos no son jerárquicos ni disjuntos, su alcance depende de la guía del orientador o docente. Se pretende incentivar y motivar a todos aquellos sujetos o actores implicados en la formación matemática a realizar o hacer un buen uso de estas herramientas que busquen la mediación o co-construcción de aprendizajes en los estudiantes, es decir, que brinden la posibilidad de reorganizar y amplificar su conocimiento, y dejar de lado la idea de llevarlas al aula sin un propósito determinado, esto es, sin que lleven intrínsecamente la anhelada intención de innovar.

Estadística y Probabilidad en Contexto, su importancia: una rápida vista desde el pasado hacia el futuro…

Jorge E. SAGULA

Profesor Titular, División Matemática, Departamento Ciencias Básicas
Profesor Asociado, División Estadística, Departamento Ciencias Básicas
Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Equipo COIN, DCB-Universidad Nacional de Luján, Argentina
Asesor Rectorado, Universidad Nacional de Luján, Argentina
Director Científico, Workshop INCOIN
CEO y Consultor-Investigador, INCOIN-LEARNING
Jorgesagula@gmail.com

Resumen

¿Por qué son importantes el Pensamiento Estadístico y el Pensamiento Probabilístico, y específicamente el Pensamiento Bayesiano? La respuesta es simple, pues reflejan la necesidad del cerebro que también se corresponde análogamente, Cerebro Estadístico, Cerebro Probabilístico, Cerebro Bayesiano; todos estos conceptos se desarrollaron en niveles superiores desde los estudios biológicos, y luego desde las Neurociencias, hace cerca de 100 años, como también desde el nacimiento de la Inteligencia Artificial, a mediados del siglo XX, y en medio de problemas críticos para la humanidad, distintas disciplinas se unieron para mejorar los enfoques, primero interdisciplinarmente y luego, en forma transdisciplinar, permitiendo el nacimiento de nuevas vertientes, nuevos focos de atención en la mejora de los constructos de aprendizaje. Por cierto, ambas grandes disciplinas se necesitan y potencian en la construcción de los procesos de aprendizaje y en sus mejoras, los consecuentes procesos de meta-aprendizaje; por lo tanto, es fundamental la integración de estas disciplinas en el campo de la Educación Estadística y la Educación Probabilística, visibilizadas en el contexto de la Educación Estocástica, enseñando a pensar con el propósito de resolver situaciones de incertidumbre. Sin embargo, la Estadística y la Probabilidad, que en numerosas oportunidades, “a duras penas” se enseñan en algunos contextos en niveles educativos desde el nivel escolar básico hasta la enseñanza superior, no son las únicas disciplinas para resolver situaciones de incertidumbre, … y otras peores, situaciones de imprecisión, pero eso constituye… otros acápites, aunque, precisamente la mentada, hoy por hoy, Inteligencia Artificial, es la que ha permitido, mediante la interpretación de sus investigadores, utilizar muchas de esas teorías, en forma adecuada y en contexto, como por caso el nacimiento de la mano de **Lofti Zadeh (1962)** de la Matemática Difusa, con su protagonista “estrella”, la Lógica Difusa.

Palabras Clave: Pensamiento Estadístico. Pensamiento Probabilístico. Cerebro Estadístico. Cerebro Probabilístico. Cerebro Bayesiano. Incertidumbre. Inteligencia Artificial. Educación. Aprendizaje.

Introducción

El Pensamiento Estadístico se sustenta en la Teoría en Administración del estadístico **William E. Deming (1994)**, quien desarrolló el Sistema de Conocimiento Profundo, cuya esencia son los tres principios del Pensamiento Estadístico: (1) Todo trabajo ocurre en un sistema de procesos interconectados; (2) La variación existe en todos los procesos; (3) La clave del éxito se alcanza comprendiendo y reduciendo la variación del proceso.
El Pensamiento Probabilístico, esencialmente, consiste en tratar de estimar, mediante algunas herramientas lógicas y matemáticas, la probabilidad que suceda algún resultado específico. En este contexto, el Pensamiento Probabilístico posibilita identificar los resultados más probables; de tal modo, las decisiones se consideran más precisas y efectivas. El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones.
Laplace afirmó: "Es notable que una ciencia que comenzó con consideraciones sobre juegos de azar haya llegado a ser el objeto más importante del conocimiento humano". Comprender y estudiar el azar es indispensable, pues la probabilidad es un soporte necesario para tomar decisiones en cualquier ámbito. Esta afirmación es la base del proceso de aprendizaje, y por eso, es absolutamente necesario definir modelos de aprendizaje, y enfáticamente, el trabajo de la Educación Estocástica, en puntualizar estas ideas y formalizar el pensamiento intuitivo, en el context del razonamiento abductivo, que específicamente no se considera como tal, excepto en algunas disciplinas y asignaturas, a pesar de su importancia natural, pues permite la resolución contextual de situaciones, en las cuales el razonamiento inductive y el razonamiento deductive no pueden utlizarse, debido a sus fuertes restricciones de veracidad absoluta; pero pues, entonces, aquí la frase de **Bart Kosko (1994)** cobra vital importancia, pues expresó que "La ciencia es blanca o Negra, pero la realidad es gris", y paradójicamente, en términos naturales, el razonamiento abductivo es el proceso que permite reflejar la necesidad de presentar a las teorías que posibilitan estudiar y tratar las situaciones de incertidumbre y precision, aquellas donde se revelan "los niveles de gris", siempre en términos de aproximación, en lo posible objetiva, aunque haya dejos de "cierta subjetividad", que siempre como investigadores y resolutores de problemas, se procura minimizer, a pesar de la certeza de ser humanos.
En tanto que para que exista una significativa percepción de lo Estocástico, es necesario el desarrollo del Pensamiento Estadístico y Probabilístico, hecho que exige un trabajo orientado hacia las formas de razonamiento combinatorio, asociados al razonamiento probabilístico y estadístico. El Pensamiento Estocástico evoluciona continuamente por el desarrollo de la matemática y la física principalmente.
La exploración al azar, la curiosidad estocástica y la generación aleatoria de descargas neuronales juegan un rol clave en el proceso de aprendizaje, y en el aprendizaje mismo.

Estadística y Pensamiento Estadístico

La Teoría del Cerebro Estadístico deviene en que el cerebro superar a las máquinas, siempre en términos de incertidumbre y probabilidades, optimizando su capacidad de aprendizaje. Los algoritmos que sustentan a Machine Learning y Deep Learning, su evolución, aún están en forma de desplazamiento Bottom Up (sin capacidad de reflexión) respecto de la capacidad del cerebro. Es importante consignar que el cerebro puede reconocer un patrón, tanto en sonido como imagen, en una fracción de segundo, en tanto que una máquina requiere de un análisis de Big Data y miles, millones de datos. Los algoritmos implementados en redes neurales de aprendizaje llegan a un óptimo de cómputo, estabilizándose, marcando una tendencia en sus datos; en tanto que el cerebro humano logra un registro constante de la incertidumbre asociada a cada nodo de información y procede a actualizarla en cada momento de aprendizaje **(Jorge E. Sagula, 2023)**. El cerebro genera permanentemente modelos del contexto en el cual se mueve y, en función de la información que percibe a partir de los sensores humanos, efectúa predicciones sobre el futuro inmediato (en este primer nivel es lo que ocurre en todos los seres humanos, existe una capacidad esencial de supervivencia), y en algunas instancias, en mayores desarrollos, en el futuro mediato **(Jorge E. Sagula, 2022).**
Lopes y Meirelles (2005) enfatizan que las raíces de la Estadística provienen de diferentes áreas del conocimiento, llevándonos a la interdisciplinariedad, que capacita al estudiante para investigar cuestiones de otras áreas del conocimiento humano, integrando conceptos, procedimientos y metodologías, y agrega: "Para la efectividad del trabajo pedagógico interdisciplinario, creemos necesario desarrollar un proyecto educativo más integral, centrado en el trabajo en equipo".
Héctor Hevia, en su disertación titulada "Redescubrimiento del Pensamiento Estadístico, desde la visión de la Fenomenología", regresó a las fuentes, a reconstruir la visión de la Fenomenología, dándole preeminencia no sólo a la coherencia de los significados, a la semántica, tema crucial en la Estadística, en sus distintas

fases, sino que se dirigió a profundizar la preservación de los significados, y enfatizó la reivindicación a los investigadores más importantes en la Fenomenología, invitando a indagar en torno al Pensamiento Estadístico, esencial precisamente, en la perspectiva de la Fenomenología. En su aporte, en el intercambio producido al finalizar la cuarta disertación, enfatizó sobre la resignificación, el Pensamiento Estadístico y la importancia de la Visión de la Fenomenología, destacando a Moore, Husserl y Bruner. Y estas ideas quedaron reflejadas en las Post-Memorias, tituladas "La Fenomenología como Lugar del Sentido Común". **(Jorge E. Sagula, Héctor Hevia, Cassio Giordano, Enrique Álvarez, 2025).**
Desde el punto de vista computacional, y particularmente en la Inteligencia Artificial, y con mayor énfasis en la temática inherente a la gran disciplina de la Ingeniería de Conocimiento, con especificidad en su acápite de Representación del Conocimiento, en el caso de los Sistemas de Producción, la formalización del razonamiento humano, en general, obedece a un sistema basado en reglas, tales reglas responden a la lógica y el razonamiento, en el caso del conocimiento estrictamente determinístico, responde a Inferencia Inductiva e Inferencia Deductiva, sin embargo, cuando el conocimiento no es determinístico debido entre otras cuestiones a situaciones de incertidumbre, imprecisión, intuición, conjeturas y/o sentido común, enmarcadas en la heurística, el modelar se recurre a ponderaciones en el contexto de modelos propios o híbridos provenientes de la Probabilidad, la Estadística, la Plausibilidad, la Posibilidad, la Creencia, los Grados de Confianza, entre otros, razón por la cual ni la Inducción ni la Deducción tienen cabida, y es necesario introducir y considerar, la Abducción, por tanto, la representación de conocimiento es "aproximada", dependiendo de la experticia de quien dispone del conocimiento sobre el dominio específico, esta realidad, es merced a la gran disciplina, la Ingeniería de Conocimiento, que lleva a plantear que la Heurística y su evolución, la Metaheurística, se sustentan en los modelos que intentan, de la mejor forma posible, resolver el indeterminismo, sujeto en cuestiones de carácter amplio, por eso aquí, tanto el Pensamiento Estadístico como el Pensamiento Probabilístico se ven reflejados **(Jorge E. Sagula, 2023).**
Los significados estadísticos constituyen la sustancia sobre la cual opera el pensamiento estadístico, con el objetivo de construir, coherentemente, más significados estadísticos, nuevas y más avanzadas síntesis de este pensamiento. **Héctor Hevia (2024)**, por ejemplo, ha asignado significado estadístico a la Ley de los Grandes Números expresando que (en versión simplificada): ***"una muestra aleatoria de tamaño n cae, en promedio, sobre μ; salvo error, el que se controla con n".***
El desafío es cómo lograr la formación de un significado estadístico como el anterior, sin tener experiencias acordes al respecto. Según Husserl, esto es **imposible**. **Héctor Hevia (2023)**, expresa que: "desde la fenomenología, significado es exclusivamente contenido. Husserl afirma, que un objeto es para la conciencia, lo que son sus significados; los cuales dicen relación directa con los contenidos de nuestra experiencia con ese objeto".
En general, un problema de Aprendizaje Estadístico puede sintetizarse en la búsqueda de "la predicción de una variable objetivo", asociada a un individuo o una observación: desde la observación de p características diferentes, y X, Predictores. La variable Y puede ser cuantitativa y así, se tendrá un problema de regresión, en tanto que, si Y es cualitativa, se tendrá un problema de clasificación.
El objetivo es hallar una función f(X), que relacione a los predictores X con la respuesta Y, tal que las predicciones para nuevas observaciones X, al desconocer la respuesta Y, sean lo más precisas posibles.
El uso de los modelos de análisis predictivos como herramientas de simulación del futuro, se orienta a la meta de optimizar los resultados consecuentes.
El nacimiento del Análisis Estadístico se remonta al año 1749, sin embargo, el análisis sistemático comenzó en el Siglo XX; a partir de la Estadística Descriptiva, pero el quid de la cuestión fue el hallazgo de sólidos métodos de inferencia estadística, a partir de: "Dada una colección de datos (empíricos) originados desde alguna dependencia funcional, inferir esta dependencia".
¿Trabajar desde esta expresión equivale a construir un proceso de aprendizaje? ¿Qué cantidad de estrategias posibles pueden aplicarse para acceder a responder la pregunta en cuestión?
A inicios de la década de 1920, comienza el tratamiento de la Inferencia Estadística, a partir de los aportes de Fisher, Glivenko, Cantelli y Kolmogorov.
Los enfoques de Fisher y de Glivenko, Cantelli y Kolmogorov permitieron contribuir al nacimiento de la Inferencia Estadística, a saber:

1. La Inferencia Particular (Paramétrica), que permite la creación de métodos inferenciales simples que pueden emplearse para atender la resolución de problemas reales.
2. La Inferencia General, que permite encontrar un método (inductivo) para algún problema de Estadística Inferencial.

El objetivo de la Teoría de la Estadística Paramétrica permite establecer que el investigador que intenta resolver un problema debe conocer los fenómenos y las leyes que han engendrado el comportamiento estocástico de los datos, además puede estimar los parámetros empleando los datos, que precisamente

constituye la base de la Inferencia Estadística; para hallar esta información, básicamente se utiliza el Método de Máxima Verosimilitud. La meta de la Teoría es justificar esta aproximación. En cambio, en la Teoría Estadística Inferencial General no se dispone de información previa sobre el comportamiento físico de los fenómenos que circunscriben el problema o bien no se dispone de información a priori de la función que se desea aproximar, siendo necesario encontrar un método para inferir una función de aproximación desde los ejemplos dados en esta situación.
La reformulación del Teorema de *Glivenko-Cantelli*, da una aserción para algún conjunto específico de eventos donde existe una Ley Uniforme de Grandes Números y el Límite de *Kolmogorov* es el límite sobre la razón (o tasa) asintótica de convergencia uniforme de las frecuencias a sus probabilidades sobre dicho conjunto específico de eventos.
Para construir la Teoría General del Principio EMR para Reconocimiento de Patrones, se debe generalizar la Teoría de *Glivenko, Cantelli y Kolmogorov*, así:

(1) Para algún conjunto dado de eventos, se determina cuando ocurre la Ley Uniforme de los Grandes Números.
(2) Si se produce la Convergencia Uniforme, se hallan los límites para la razón (o tasa) no-asintótica de convergencia uniforme.

Pensamiento Probabilístico y Probabilidad

El Pensamiento Probabilístico está fuertemente afectado por el mecanismo de construcción de Modelos Mentales, que constituyen representaciones psicológicas de situaciones reales, imaginarias o hipotéticas, desde las cuales se construyen escenarios en base a marcos referenciales, y que permiten, mediante posteriores mecanismos cognitivos, el planteo y la resolución de problemas, y el proceso de toma de decisiones. Las teorías de representación de la mente permiten que las representaciones de constructos mentales y el uso de las mismas en los procesos de decisión sean posibles, existiendo sustento en la cognición, generando acciones. Se puede postular que “una representación mental es un isomorfismo entre procesos que ocurren en el cerebro y el comportamiento de ciertos aspectos del mundo” **(Jorge E. Sagula, 2023)**.
El Pensamiento Probabilístico suele ser empleado en forma intuitiva, en una acotación del Criterio de von Mises, esto es “no como el paso al límite para n tendiendo a infinito” **(Jorge E. Sagula, 2004)** sino como aproximación delimitando la tendencia, razón por la cual existe una componente de subjetividad, y la diferencia entre el valor experimental y el valor teórico no necesariamente resulta como debería ser; por supuesto, aquí hay un vínculo entre el modelo mental de quien resuelve y la transcripción o decodificación del mismo; esto evidencia la existencia de un nivel de incertidumbre más allá de la incertidumbre en sí misma, pudiendo concluir que la información es sesgada **(Jorge E. Sagula, 2023)**.
Gal (2005), propone un modelo, en el cual el componente cognitivo incluye los conceptos:
(1) Ideas Centrales: variación, aleatoriedad, independencia, predictibilidad, incertidumbre;
(2) Cálculo de probabilidades: estimando la probabilidad de ocurrencia de eventos;
(3) Idioma: términos y métodos utilizados para comunicarse sobre el azar;
(4) Contexto: comprender el papel y las implicaciones de los problemas y mensajes probabilísticos en varios contextos y en el discurso público y personal;
(5) Preguntas críticas: cuestiones sobre las que reflexionar cuando se trata de probabilidades.
Consecuentemente, el Pensamiento Probabilístico puede verse como una línea de pensamiento de mayor complejidad, el Pensamiento Heurístico, y allende, el Pensamiento Metaheurístico, no excluyente de tales procesos, pero que constituye una línea metodológica orientada a la Resolución de Problemas, y que precisamente, puede definirse mediante un conjunto de reglas metodológicas, sobre la base de la creatividad, el ingenio y la invención; así, parte de la percepción contextual hacia la asimilación y la comprensión del conocimiento en pro de la capacidad en la resolución de problemas **(Jorge E. Sagula, 2024).**

La Evolución permanente a requerimiento de otras disciplinas

En la década de 1960 surge una nueva aproximación, en términos de la Teoría del Aprendizaje, para estudiar la estimación en problemas de dependencia; luego de la primera generación de computadoras capaces de dirigir análisis multidimensional en problemas reales.

La teoría esencial de esta aproximación estadística (visión externa del paradigma), fuertemente desarrollada en la década de 1980 se conceptualizó en los bordes de la ciencia estadística, procurando analizar el problema de la generalización en el modelo más simple de la inferencia estadística: “el problema del Reconocimiento de Patrones”; esta metodología es uno de los modelos más simples de la inferencia inductiva, pues los resultados del modelo se pueden emplear para generalizar modelos de mayor complejidad, mediante diferentes técnicas matemáticas.
La teoría correspondiente *debe describir* condiciones bajo las cuales se puedan hallar conjuntos de funciones que respondan a la mejor aproximación a una función dada desde los ejemplos dados en esta situación y, además, *debe encontrar* el mejor método de inferencia para un número determinado de ejemplos.
La base conceptual del Paradigma Paramétrico Clásico (1930-1960) se fundamenta en:

(1) Hallar una dependencia funcional desde los datos; así, el analista estadístico debe ser capaz de definir un conjunto de funciones, lineales en sus parámetros, tal que este conjunto contenga una buena aproximación a la función deseada; resultando un pequeño número de parámetros libres que describen al conjunto. Esta confianza está soportada por el Teorema de *Weierstrass*, que permite aproximar una función continua mediante una construcción polinómica. Así, surge el Principio de Regresión.
(2) La ley estadística donde subyacen los componentes estocásticos de numerosos problemas reales satisface a la Distribución Normal. Esa confianza está soportada por los teoremas límites, con énfasis en el Teorema Central del Límite (Convergencia de una distribución general a una Distribución Normal o convergencia de una distribución muestral a la distribución poblacional).
(3) El “motor” inductivo en el Paradigma, constituido por el Método de Máxima Verosimilitud, representa una buena metodología para la estimación de parámetros. Esta confianza está soportada por numerosos teoremas que plantean la optimización condicional.

Los tres conceptos sobre Confianza dados previamente se sintetizan en el Principio:

“Si existe una demostración matemática con la consideración que algún método provea una Solución Asintóticamente Óptima, entonces en la vida real este método permitirá proveer una solución razonable para una muestra de tamaño pequeño”.
Luego del período de auge del Paradigma Paramétrico Clásico surgieron grandes dificultades en la aplicación del mismo, pues la atención se focalizó en el Análisis de Datos, con el objetivo centrado en auxiliar a los investigadores a realizar inferencias inductivas desde los datos, formulando una ampliación del uso de técnicas estadísticas exclusivamente, a raíz de esto se incorporaron y también se desarrollaron técnicas de: Visualización de Datos, Análisis de Clustering y Construcción de Características (Patrones). Así, fue la primera etapa de generación de Inferencias Informales.
La Aproximación del Paradigma del Análisis de Datos se puede sintetizar así: “La Inferencia Estadística constituye una acción informal y los estadísticos contribuyen a esta acción, sólo con la prestación de su asistencia técnica”
A pesar de la Aproximación previa, no cayó abruptamente el Paradigma Clásico pues tres contribuciones lograron su continuidad, posibilitando una generalización de las confianzas planteadas en el período inicial:

1. En la Década de 1960, Huber desarrolló la Aproximación Robusta, aplicándola a la Estadística Paramétrica, no siendo necesario especificar una ley en orden a estimar una función desde un conjunto paramétrico de funciones dado.
2. En la Década de 1970, Nedler y Wederburn sugirieron los Modelos Lineales Generalizados, empleando un amplio conjunto de funciones creando el Problema de Selección de Modelos.
3. En la Década de 1980, Breiman, Huber y Friedman, consideraron tipos de funciones especiales, no-lineales en sus parámetros e iniciaron el uso del Método de Minimización Regularizada del Riesgo Empírico (EMR), partiendo del Método de Máxima Verosimilitud.

Sin embargo, no todos los investigadores en la temática, consideran al Paradigma Clásico como la principal aproximación en Inferencia Estadística.
La Necesidad de Modelar Big Data recorre “un amplio espinel”, desde: Seguimiento y Optimización del Rendimiento Educativo; Atención Primaria en Salud; Optimización en Investigación Científica; Entendimiento y Segmentación de clientes, en mercados existentes y emergentes; Optimización en Rendimiento Deportivo; Optimización de Dispositivos y Máquinas; Mejoras en Protocolos de Seguridad y Legales; Optimización de Recursos en Ciudades; entre otros temas.
Una ventaja significativa aplicando tecnologías de Big Data en una organización es poder disponer de diversas metodologías a los datos para predecir la evolución de ciertas variables: al conjunto de técnicas estadísticas y de aprendizaje automático se los denomina, Modelos Predictivos (*Predictive Analytics*), estos

modelos provienen de la Matemática y la Estadística, en general, y de Inteligencia Artificial, permitiendo "inferir" cómo se comportará en el futuro una variable (predicha) en función de una serie de variables predictoras (antes, Sistemas Basados en Conocimiento, hoy Inteligencia Artificial Generativa).

La Ingeniería de Prompts, la reversión de la Ingeniería de Conocimiento, y casualmente (¿o causalmente?), pues de Human-Computer Interaction se produce un paso a Computer-Human Interaction, postula la necesidad de "saber formular una adecuada pregunta" o "un adecuado planteo" para la evolución de los Transformers, a la Era del ChatGPt y sus congéneres; en consecuencia, un buen prompt para IA debe tener información relevante y precisa, evitando no sólo datos que puedan ser erróneos o confusos, sino también las ambigüedades, los dobles sentidos y esencialmente, los sesgos. Esto implica que cualquier información que tienda a confundir a la IA es mejor no incluirla….
Pero, cabe preguntar: ¿qué hay detrás? Cada algoritmo combina las resoluciones de cada uno de los términos, a partir de la experticia humana, considerando la interacción humana, y esto evidencia que ese conocimiento no siempre es preciso, determinístico, sino refleja el conocimiento empírico, las conjeturas, las opiniones, distintas apreciaciones, enfoques, …, detrás están los árboles de probabilidad, los modelos basados en estadística y en probabilidad, reflejando en el mejor de los escenarios, conclusiones plausibles… **(Jorge E. Sagula, 2024).**

Referencias Bibliográficas

Deming, William E. (1994); The New Economics. Boston.

Gal, I. (2005); Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas.

Hevia, Héctor (2023). Pensamiento Estadístico: ¿Qué aportan las Matrices de Koestler? En Memorias del IV Simposio de Educación Matemática Virtual, Paradigmas evolutivos en Educación Matemática. Editor Científico y Compilador: Jorge E. Sagula. Universidad Nacional de Luján. EdUnLu. Libro digital, PDF. ISBN 978-987-3941-87-0, mayo'2024.

Hevia, Héctor (2024). Redescubriendo el Pensamiento Estadístico desde la Fenomenología. En Memorias del V SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual): Tendencias en Investigación en Educación Matemática. Compilación de Jorge E. Sagula. Luján, EdUnLu, agosto'2024. ISBN 978-631-6582-10-2.

Kosko, Bart (1994); Fuzzy Thinking: The New Science of Fuzzy Logic. Hyperion. ISBN: 078688021X.

Lopes, C. E. e Meirelles, E. O. (2005). Desenvolvimento da probabilidade e da estatística. In *VIII Encontro Regional de Professores de Matemática LEM/IMECC/UNICAMP* (pp. 1-8). UNICAMP.

Sagula, Jorge E. (2004); Fundamentos de Estadística y Probabilidad, Universidad Americana, Asunción, Paraguay. Pp. 76-77.

Sagula, Jorge E. (2022); Pensamiento Estocástico, un puente entre Neurociencias e Inteligencia Artificial. En Memorias del III SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual, Tomo I, ISBN 978-987-3941-86-3, EdUnLu, mayo'2022.

Sagula, Jorge E. (2023); Pensamiento Metaheurístico, una posible consecuencia del Pensamiento Estadístico y del Pensamiento Probabilístico. En Memorias del IV SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual): Paradigmas evolutivos en Educación Matemática, Tomo I. Compilación de Jorge E. Sagula. Luján, EdUnLu, 2023. ISBN 978-987-3941-87-0.

Sagula, Jorge E. (2024); La Estadística y la Probabilidad, soportes vitales para el desarrollo de la IAG. En Memorias del V SEM-V (Simposio de Educación Matemática-Virtual): Tendencias en Investigación en Educación Matemática. Compilación de Jorge E. Sagula. Luján, EdUnLu, agosto'2024. ISBN 978-631-6582-10-2.

Sagula, Jorge E.; Hevia, Héctor; Giordano, Cassio; Álvarez, Enrique (2025); En Post-Memorias del Grupo de Trabajo-Discusión GTD "Educación Estocástica" del V SEM-V (V Simposio de Educación Matemática Virtual): Tendencias en Investigación en Educación Matemática. [Pronta aparición, en proceso de registro].

Zadeh, Lofti (1992); Fuzzy Logic for the Management of the Uncertainty. Wiley-Interscience. ISBN 0471547999.

El emerger del pensamiento estadístico

Héctor HEVIA

Universidad Adolfo Ibáñez, Chile

hhevia@edu.uai.cl

Resumen

Pareciera ser relevante profundizar en el origen del pensamiento estadístico; una indagación como tal, podría arrojar luces acerca de su naturaleza. Datos apropiados son el terreno donde se desarrolla este pensamiento. Al respecto, hay evidencia del esfuerzo puesto en ciertas investigaciones aplicadas acerca de una apropiada generación de los datos; por ejemplo, en investigaciones clínicas uno de los criterios de revisión de lo que se considera datos apropiados dice relación con las denominadas “definiciones operacionales”; ver Moses, 1992. Sin embargo, es claro que estas precisiones respecto a las mediciones que se realizan no son garantía suficiente de que los datos recabados contengan la información que permita obtener los resultados que se espera.

Por otro lado, en más de un estudio estadístico, los datos han sido generados inteligentemente relegando a segundo lugar el énfasis en el control del error de la medición bajo una precisión exacerbada. En particular, en esta disertación revisamos parcialmente el estudio de Galton, 1886 y aludimos a otras situaciones de interés para explorar una visión acerca del pensamiento estadístico que reconoce la existencia de este pensamiento en forma previa a la generación de los datos. Esta visión podría ayudar a precisar el rol del pensamiento estadístico en el ambiente de la ciencia de los datos en general.

Palabras Clave: Pensamiento Estadístico. Definiciones Operacionales. Moses. Galton. Ciencia de Datos.

Introducción

Una respuesta a la pregunta: ¿Desde dónde surge el pensamiento estadístico? podría arrojar ciertas luces acerca de este pensamiento y de cuáles son esos elementos imprescindibles en su manifestación. Con esta finalidad nos hemos acercado a la investigación en ciencias, en particular, en ciencias de la salud, para investigar acerca de los fenómenos que dan origen a este pensamiento en esa área del conocimiento científico. En esta dirección, el texto de Bailar III y Mosteller, *Medical Uses of Statistics*, segunda edición, 2018; resulta del mayor interés. Su origen se remonta al año 1977. Ese año, el comité editorial de la revista *New England Journal of Medicine*, organizó un estudio de los trabajos de investigación publicados en los últimos volúmenes de esa revista y también de algunas otras importantes revistas médicas, con la finalidad de determinar qué métodos estadísticos estaban realmente siendo usados en las publicaciones. Se les pidió a estos autores, evaluar lo apropiado de los métodos aplicados y si estos usos pudieran ser mejorados solicitándoles hacerlo en un lenguaje simple que pudiese ser comprendido incluso por lectores que no tenían educación en bioestadística. Como resultado, el editor de la mencionada revista señala, en la primera edición del libro el año 1986 (ver Bailar III y Mosteller, 2018, p. xvii) que se logró un libro excepcional el cual reúne dos importantes características:

"En primer lugar … se basa en el uso corriente (de las técnicas estadísticas en estudios clínicos), y su preocupación es mejorar ese uso. A diferencia de la mayoría de los textos estándares, este libro tiene un enfoque empírico y práctico. No usa simplemente ejemplos de la literatura para ilustrar aspectos didácticos; cuidadosamente revisa lo que los investigadores clínicos están realmente haciendo con los métodos estadísticos, tal como se revela mayormente en las páginas del *Journal*. Les dice a los lectores lo que ellos necesitan saber para comprender esos métodos, y señala formas a través de las cuales los que escriben artículos médicos pueden hacer sus reportes de métodos y resultados más informativos y sus análisis de datos más útiles.

En segundo lugar, la orientación de este libro se dirige a una comprensión de ideas -cuándo y por qué usar ciertas técnicas estadísticas. Hay muchos textos que explican los cálculos estadísticos, pero pocos o ninguno de ellos que intente ir, como este lo hace, a lo que está detrás de los cálculos y decir a qué se refieren realmente. Este libro no se involucra con la mecánica de los cálculos estadísticos. No hay instrucciones en cómo desarrollar cálculos, y hay pocas fórmulas matemáticas. El énfasis aquí está en explicar el propósito de los métodos estadísticos, de manera que el lector en general tendrá una mejor comprensión de la estrategia a ser empleada y de las alternativas que necesitan ser consideradas."

En un primer momento, nos centraremos en el primer capítulo del libro de Bailar III y Mosteller. Este capítulo, en su totalidad, consiste en el trabajo de Lincoln E. Moses, *Statistical Concepts Fundamental to Investigations.*

En relación con este capítulo, Bailar III y Mosteller, escriben en la introducción de su libro: "Ese capítulo examina algunas de las ideas centrales que subyacen a los métodos y técnicas estadísticas -ideas que guían todo trabajo estadístico. Estos amplios conceptos son importantes aun cuando ningún número aparezca en un artículo de investigación: los usuarios de los métodos estadísticos no deberían pensar en las técnicas numéricas (tales como estimación o métodos especiales de test de hipótesis) como las principales ideas en estadística, mientras que dejan las grandes ideas sin reconocer y descuidadas."

La búsqueda de estas grandes ideas se reflejará en el cuerpo textual que sigue.

Los cuatro conceptos claves en la lógica que subyace a los métodos estadísticos, tal cual se aplican en investigación clínica

Lincoln Moses, en el capítulo 1, pp. 5-6 del texto de Bailar III y Mosteller señala:

"La estadística puede ser definida como un cuerpo de métodos para aprender de la experiencia -usualmente en la forma de números que provienen de varias medidas separadas que muestran variación individual. … Casi todos los investigadores científicos encuentran que su trabajo presenta algunas veces problemas estadísticos que requieren solución; similarmente, casi todos los que leen reportes de investigación encuentran que comprender los resultados reportados de un estudio, frecuentemente requiere una comprensión de asuntos estadísticos y de la manera en la cual los investigadores han considerado estos asuntos.

Aún más sorprendente que el rango de estudios clínicos dónde aparecen asuntos estadísticos es la importancia de unos pocos conceptos estadísticos que se aplican a muchos diferentes tipos de estudio. Este capítulo presenta y discute cuatro de estos amplios conceptos.

El primer concepto clave es *definición operacional*. Para aprender de la experiencia debemos primero ser capaces de establecer que es esa experiencia. Los rótulos son insuficientes para este propósito. "Enfermedad en fase II", puede tener diferentes significados en diferentes ambientes clínicos. Las tasas de "suicidio" son probablemente muy diferentes en jurisdicciones que requieren o no requieren la presencia de una nota de suicidio antes de aplicar el término. Un dato estadístico reporta el resultado de algún proceso de medición; a menos que nosotros especifiquemos ese proceso, no podemos saber el significado que tiene ese dato estadístico. Es esta clase de especificación lo que se entiende por el término definición operacional."

Los otros tres conceptos claves que Moses establece en su artículo son:

El caso de los datos infinitos, el pensamiento probabilístico y la inducción.

La consideración de estos cuatro aspectos conduce a una cadena de revisiones del plan investigativo que sin duda agrega valor a un estudio que utiliza datos. Nosotros nos remitiremos exclusivamente al primer aspecto ya que es el único de los cuatro que está relacionado directamente con la generación de los datos en un estudio estadístico, sin descartar la idea de que los otros tres aspectos podrían dar lugar a consideraciones relevantes en el diseño de la investigación y en el análisis de los datos y su interpretación.

¿A qué alude Moses con el concepto "definición operacional"?

"Muchas investigaciones médicas siguen un patrón característico: el investigador impone uno o más tratamientos en individuos de ciertas clases, observa y quizás compara resultados, y luego intenta obtener conclusiones acerca de los efectos de los tratamientos. El significado específico de un estudio como tal brota de las respuestas a una multitud de preguntas acerca de los pacientes, los tratamientos como realmente se aplicaron, los resultados, y cómo los resultados fueron medidos. Para que estas respuestas sean verídicas, ellas deben fielmente tomar en cuenta los reales procesos usados en el estudio, y ellas deben ser precisas y específicas." Moses, p. 7.

A continuación, algunos ejemplos que presenta Moses en las páginas 7, 8 y 9, en relación con los cuidados que se debe tener en la generación de los datos.

"Una declaración de que los pacientes tienen 'enfermedad A, fases II y III' suena definida en forma suficiente, pero la diagnosis de enfermedad A podría ser algo engañosa. Necesitamos saber cómo la diagnosis fue hecha. ¿Qué criterios fueron aplicados? ¿Cuán reproducible es la determinación de las fases? Por ejemplo, ¿fueron doblemente determinadas las fases y a ciegas?"

En este ejemplo, se pone en discusión la validez que tiene la pertenencia de los pacientes a las poblaciones definidas por los tratamientos, considerando al menos dos aspectos: unicidad y replicabilidad de la clasificación y procedimiento de clasificación ciego.

"Características medidas presentan demandas análogas. … la presión sanguínea puede variar grandemente dependiendo del estado del individuo, la persona que la mide y si el mismo método fue usado para todos los individuos. Una frecuentemente útil manera de disipar la ambigüedad acerca de las medidas de alguna variable elusiva pero importante es emplear un instrumento estándar bien conocido para el propósito."

En este segundo ejemplo, se pone en discusión la validez que tienen las mediciones que se realizan a ciertas variables.

"Los tratamientos no son frecuentemente lo que los investigadores creen o lo que ellos intentan que sean y una definición operacional cuidadosa puede requerir distinciones sutiles. La droga administrada por vía oral en un jarabe también incluye el jarabe. … Un procedimiento que se realiza en una oficina comprende tanto al procedimiento como a la visita, cualesquiera sean los efectos en el bienestar que cada uno de estos aspectos podría arrastrar."

En este ejemplo, se alude a la necesidad de mantener bajo control aquellos aspectos que podrían estar participando en la determinación de los resultados y que podrían dar lugar a la consideración de nuevas variables.

"Un experimento que compara tratamientos típicamente comprende varias fases secuenciales. Una comparación de tratamientos puede ser difícil si en cualquiera de estas fases el conocimiento de los tratamientos asignados a los pacientes influye en otros aspectos del proceso. Así, si la decisión de enrolar a cada paciente en el experimento se hace con el conocimiento de cuál es el tratamiento que el paciente recibirá, entonces la oportunidad de construir grupos de tratamientos no comparables es amplia. Si la evaluación de puntos terminales subjetivos es hecha por observadores que saben qué tratamientos recibieron los pacientes, entonces otra fuente potencial de sesgo existe (de aquí el valor de los estudios doble ciego)."

En las dos instancias presentadas en este ejemplo, el posible ingreso de sesgo pone en peligro la comparabilidad de los grupos de tratamientos; en el primer caso, debido a la pérdida de la aleatoriedad en la asignación de los pacientes a los tratamientos y en el segundo caso, debido a la posible parcialidad en los juicios de los evaluadores dado el conocimiento previo que poseen acerca de los pacientes.

Resumiendo, para Moses toda recolección de datos debe cuidar de que los procedimientos involucrados sigan estrictas normas que garanticen la comparabilidad de los datos generados; en particular, los procedimientos que se apliquen deben ser replicables, la asignación de los individuos a los tratamientos debe ser a ciegas (doble ciego, si es apropiado), las mediciones deben ser válidas. Son principios a los que se ciñe toda ciencia experimental pero que **no se reducen exclusivamente a la definición operativa de las variables** (ver, por ejemplo, Corbetta, 2003, p. 83) sino que también dicen relación con lo que podríamos llamar "**definición operativa de las unidades de análisis**" lo que en un diseño de experimento tiene completo sentido ya que estas unidades de análisis son definidas ad hoc. Este doble cuidado que se ha de tener puede encontrarse refrendado en Corbetta, 2003, pp. 82-83, donde se lee:

"El primer paso del proceso de traducción empírica de los conceptos (en entidades empíricamente observables) consiste en aplicarlos a objetos concretos, es decir, en *convertirlos en* atributo o *propiedad de objetos* de los específicos objetos estudiados, que llamamos *unidades de análisis*. …

El segundo paso para ser empíricamente operativo el concepto-propiedad consiste en dar una *definición operativa* de él, es decir, en *establecer las reglas para su traducción en operaciones empíricas*."

No hay duda alguna que las consideraciones de Moses, ahora establecidas como definiciones operacionales para la constitución de las unidades de análisis y la constitución de las variables, son condiciones necesarias para la validez de un estudio científico; pero, tampoco hay duda alguna de que el cuidado de estos dos aspectos no garantiza en absoluto el éxito de la investigación que se persigue.

A continuación, revisamos la famosa investigación de Galton, 1886, para destacar cómo el pensamiento estadístico no se reduce a cuidar sólo las definiciones operacionales sino, que también encierra una visión del objetivo de la investigación. Esta visión, previa a la generación de los datos ordena a priori y tentativamente la compleja relación de datos y error con la finalidad de dejar en evidencia la verdad que se busca probar. También observamos que existe otra situación de interés, aparentemente no mencionada por Moses, en la que se debe cuidar la fidelidad de los datos; es el caso cuando la información relevante es reportada por el individuo que también es la unidad de análisis.

El caso en que la información requerida es reportada por el mismo individuo que constituye la unidad de análisis

Un ejemplo de esta situación se presenta en la investigación realizada por Galton. Dejemos que Joseph Tal, 2001, pp. 9,13; resuma esta investigación con sus propias palabras:

"En 1884, Sir Francis Galton … recolectó datos de las alturas de padres y sus hijos. … Al año siguiente Galton presentó sus resultados a la British Association for the Advancement of Science. … (Galton) encontró que en promedio padres altos tenían hijos altos y padres bajos tenían hijos bajos, … pero que esta relación no es perfecta. Sin embargo, Galton también observó algo curioso, … (su investigación) predecía que padres altos tendrían hijos que, en promedio, serían más bajos que sus padres. También que padres bajos tendrían hijos que, en promedio, serían más altos que ellos. Galton denominó a este fenómeno 'regresión al promedio'."

Galton estaba fuertemente interesado en las leyes de la herencia, tal como lo declara expresamente en su artículo de 1886. Desde sus años escolares se había sorprendido al observar que las habilidades parecían heredarse. Previo a su estudio sobre las estaturas, había realizado experimentos con semillas de diferentes especies, los que habían arrojado la misma evidencia que encontró en el estudio de las estaturas. En Galton, 1886, p. 246, se lee:

"Mi objetivo es establecer más allá de toda duda la existencia de una ley simple y de largo alcance que regula la transmisión hereditaria de las cualidades que todos poseemos, aunque en grados desiguales. …

Hace ya algunos años que yo hice una extensa serie de experimentos sobre la producción de semillas de diferentes tamaños, pero de la misma especie. Ellos dieron resultados que parecían muy notables, y que usé como base para una conferencia ante la Royal Institution, el 9 de febrero de 1877. Aparecía en estos experimentos que la progenie no tendía a asemejarse a sus semillas parentales en tamaño, sino que siempre eran más mediocres que ellas -más pequeñas que sus padres si sus padres eran grandes; más grandes que los padres, si los padres eran muy pequeños."

Continúa Galton en página 247,

"Después de que se publicó la conferencia, se me ocurrió que los motivos de mis dudas podrían invocarse como objeciones a las conclusiones generales. … (y) pensé que era mejor no decir nada sobre el tema hasta que obtuviese evidencia independiente. Era evidencia antropológica la que yo deseaba, preocupándome por las semillas solo como medio para arrojar luz sobre la herencia en el hombre. Traté en vano por un largo y agotador tiempo de obtenerla en abundancia suficiente y haber fallado fue un motivo poderoso, junto a otros, en inducirme a hacer una oferta de premios por Registros de Familia, la cual tuvo una gran respuesta y que me proveyó el último año con lo que yo quería."

Galton nos hace presente las dificultades a las que nos lleva la obtención de datos confiables, los que también deben ser apropiados para el estudio. La genialidad de Galton resuelve el problema de la generación de los datos a través de estos Registros de Familia que se pedían completar y remitir a Galton, con el compromiso de ser retornados a cada familia que participaba en el concurso. De esta forma, Galton obtiene respuestas completas de 205 hogares los que comprenden un total de 930 hijos o hijas adultos. Ver en Figura 1, dos fotos del único registro de familias que se habría preservado de su estudio.

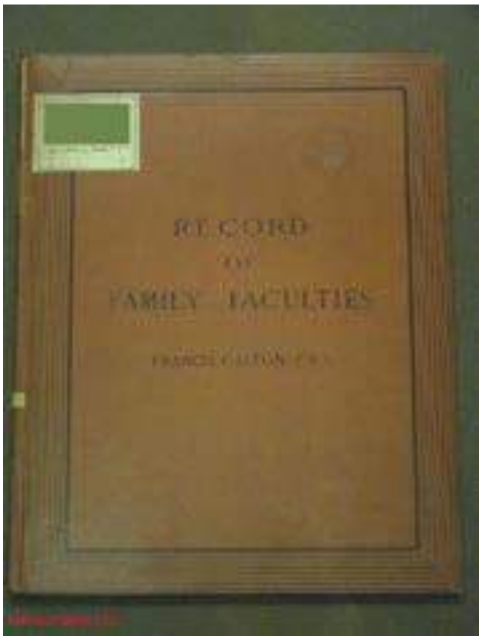


Figura 1: Fuente: https://www.medicine.mcgill.ca/epidemiology/hanley/galton/RFF/index.html

Galton, p.247, continúa diciendo:
"Me cuidé especialmente de no hacer alusión alguna a la investigación específica en mi prospecto, para evitar la formación de sesgo en los registros devueltos. … Ahora puedo contemplar con seguridad la posibilidad de que los registros de altura se hayan elaborado con frecuencia en forma descuidada, porque ninguna cantidad de inexactitud insesgada puede dar cuenta de los resultados … que se derivan de las comparaciones entre diferentes grupos de los registros devueltos.
Luego, en las páginas que siguen, Galton justifica bellamente la elección de la altura de los individuos como tema de su investigación; ver páginas 249-251. Inicia página 252 señalando,
"La única desventaja en el uso de la estatura es su pequeña variabilidad. … Por otro lado, la precisión de mis datos es tan pequeña, parcialmente debido a la incertidumbre en varios casos de si la altura fue medida con los zapatos puestos o sin zapatos, que yo encontré por medio de una investigación independiente que cada observación, tomando una con otra, está sujeta a un error que frecuentemente no excede 2/3 de una pulgada."
La preocupación de Galton es cuidar de que los datos tengan la capacidad suficiente para dejar en evidencia la ley que el busca probar; más que cuidar las definiciones operacionales según la concepción de Moses. De hecho, Galton no repara en una cuidadosa medición de la altura corporal ya que con ello controla un posible sesgo en la medición de las alturas, el que podría provenir, por ejemplo, de un exceso de celo en la medición por el interés de ganar los premios prometidos o simplemente por una sobrevaloración subjetiva de la altura corporal. La forma que toma este control es particularmente interesante. Consiste en anular el efecto individual que podría introducir sesgo en la medición, requiriendo respuestas a un grupo de preguntas aparentemente de igual valor para la investigación, pero estando consciente, el investigador, de que solo una de estas preguntas es relevante. Note que, en alguna forma, las otras preguntas asumen el rol de distractores para quienes responden.

Comentarios finales

La investigación de Galton nos muestra que datos inteligentemente planificados podrían dejar en evidencia los resultados que se buscan. En estos casos, la estructura de datos que se pretende desarrollar en una investigación se formula inteligentemente en forma previa a la generación de los datos. J. Tal, pp. 125-126, alude a esta situación poniendo de relieve que la intuición será quien diga la última palabra.
"… las estadísticas inferenciales no pueden *seleccionar* conexiones. Esto debemos hacerlo nosotros mismos. Evidentemente, la inclinación a 'ir más allá' no es suficiente. Si deseamos llegar, será mejor que

primero sepamos adónde queremos ir; debemos, con previsión, seleccionar las variables que mostrarán el camino.
Aun así, no es tan sencillo. Koestler escribe:
'… la recopilación de datos es una actividad discriminatoria, como recoger flores y diferente de la acción de una cortadora de césped; y la selección de las flores que se consideran de valor para ser recogidas, así como su disposición en un ramo, son en última instancia cuestiones de gusto personal.'
Así que incluso aquí el 'gusto personal', el pensamiento de 'sopa primordial'[1], desempeña un papel. Es la intuición y no las estadísticas la que determinará si vamos a hacer un descubrimiento sustancial o simplemente demostrar una conexión obvia. … Al hacer estadísticas utilizamos el pensamiento analítico - recopilamos datos y especificamos modelos. Usamos la lógica. No puede ser de otra manera. Al mismo tiempo, si renunciamos a nuestra intuición y nos quedamos únicamente con nuestros modelos estándares, estaremos destinados para siempre a descubrir sólo conexiones triviales.
Un científico común y corriente no espera hacer descubrimientos trascendentales a diario. De hecho, si hace uno durante su vida, se considera afortunado. Por tanto, en lo principal, sigue las reglas. Sin embargo, si sólo hace esto, nunca irá mucho más allá de lo común."
En consecuencia, el rol de la intuición es primordial. Es la intuición la que permite establecer una estrategia con posibilidades de acertar en la selección de las variables que darán fruto a las mediciones.
No hay duda de que una estrategia en la generación de los datos, más que ninguna otra cosa, estimula el desarrollo del pensamiento estadístico, el cual, interactúa con esta estrategia modificándola y modificándose. Desde esta perspectiva, el pensamiento estadístico contiene aspectos que emergen de la actividad de la intuición, de la sopa primordial. Esta interacción hace posible la generación de datos inteligentes, a través de los cuales los métodos estadísticos darán pleno sentido a la extracción de datos realizada.
Lo anterior podría ser un indicio de que lo primordial en el pensamiento estadístico es la estrategia de datos que desarrolla (y no la mera existencia de datos), la que involucra la creación de sistemas de datos y de sus análisis, ambos generados ad hoc. De esta forma, el pensamiento estadístico podría ser caracterizado como ***pensamiento estratégico de datos cuyo objetivo es agregar conocimiento a la población de interés***.

Referencias bibliográficas

Bailar III, J. C. y Mosteller, F., editors (2018); *Medical Uses of Statistics*, second edition. CRC Press. (Primera edición, 1992.)
Corbetta, P. (2009). *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill.
Galton, F. (1886). Regression towards Mediocrity in Hereditary Stature. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 246-263.
Moses, L. E. Statistical Concepts Fundamental to Investigations (2018) En Bailar III, John C. y Mosteller, Frederick, editores; *Medical Uses of Statistics,* second edition. CRC Press, 2018.
Tal, J. (2001). *Reading between the numbers*. *Statistical thinking in everyday life*. McGraw-Hill.

[1] "primordial soup" es el término coloquial que utiliza Tal para referirse a la intuición. Ver Tal, p. 3.

Inteligência artificial generativa no ensino de Probabilidade e Estatística

Cassio Cristiano GIORDANO

Universidade Federal do Rio Grande, Brasil
ccgiordano@furg.br

Resumo

A perspectiva frequentista de Probabilidade foi introduzida oficialmente nos currículos brasileiros com a publicação, por meio do Ministério da Educação, da Base Nacional Comum Curricular, em 2018. Entretanto, ela é precedida da perspectiva probabilística clássica, o que reforça o viés artificial da equiprobabilidade, gerando obstáculos epistemológicos, considerando a natureza contraintuitiva dos fenômenos estocásticos. Realizamos um estudo de caso, na perspectiva do Letramento Probabilístico de Gal, analisando as concepções dos estudantes de uma turma de ensino médio (idades de 16-18 anos), explorando livros didáticos, paradidáticos, jogos, simulações computacionais e o ChatGPT. Os resultados apontaram para o desenvolvimento discente de novas concepções envolvendo os conceitos de variabilidade e aleatoriedade.

Palavras-chave: Letramento Probabilístico. Probabilidade Frequentista. BNCC. Equiprobabilidade. ChatGPT.

Introdução

A palavra “probabilidade” constitui-se em um termo polissêmico e, mesmo na Matemática, pode ser abordada por diferentes perspectivas, como a interpretação clássica, a frequentista, a logicista, a subjetivista, a intersubjetiva, a interpretação das propensões, entre outras (Lopes; Mendonça, 2016). Até a publicação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC – (Brasil, 2018), prevalecia nos currículos brasileiros a abordagem clássica ou laplaciana (a razão entre os casos favoráveis e o total de casos igualmente possíveis), a única apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (Brasil, 1997, 1998, 2002). Tal perspectiva reforça o viés artificial da equiprobabilidade, em detrimento da perspectiva frequentista (Coutinho, 1994); cria obstáculos epistemológicos; e não contribui para o aprimoramento do letramento probabilístico (Gal, 2005). Com a BNCC, a abordagem frequentista, ainda que tardiamente, ganha espaço na educação básica. Por outro lado, a BNCC (Brasil, 2018) também trouxe novas demandas e desafios para os professores quanto à utilização de tecnologias digitais no ensino de Matemática (Scheffer; Finn; Zeiser, 2021), abrindo espaço para uma maior exploração de softwares e apps no desenvolvimento do pensamento computacional, na era da Inteligência Artificial – IA – (Abar; Santos, 2020). Dentre os recursos computacionais que, atualmente, mais impactam a Educação destacamos o *chatbot* denominado ChatGPT (Olite; Suárez; Ledo, 2023). Apresentamos, aqui, um estudo de caso, no qual analisamos o desenvolvimento de uma sequência didática que buscou ampliar e aprofundar as concepções probabilísticas de estudantes do Ensino Médio, a fim de desenvolver, por extensão, o seu respectivo letramento probabilístico.

Referenciais Teóricos

O ensino de Probabilidade no Brasil tem se mostrado ainda mais desafiador do que o ensino da própria Estatística, o que pode se justificar pela precária formação docente nessa área – como observam Giordano e Vilhena (2020) – e pelas lacunas deixadas pelo Ministério da Educação brasileiro nos documentos BNC Formação (Brasil, 2019) e BNC Formação Continuada (Brasil, 2020). Esses documentos norteadores do Ensino Superior não estabelecem critérios objetivos, não delegam claramente responsabilidades em níveis municipal, estadual e federal para a formação inicial e continuada docente. Ademais, o ensino de Probabilidade apresenta características intrínsecas que extrapolam os aspectos cognitivos apresentados no modelo de letramento probabilístico proposto por Gal (2005), a saber: grandes ideias (variabilidade, aleatoriedade, independência, incerteza e predictabilidade), cálculo de probabilidade, linguagem, contexto, questionamento crítico, que prevalecem na formação de professores em estocástica no Brasil, pois abarca também os elementos de disposição: postura crítica, crenças, atitudes e sentimentos pessoais quanto à incerteza e ao risco.
No que concerne aos objetos de conhecimento, de acordo com a BNCC (Brasil, 2018), os estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental – na faixa etária de 6 a 10 anos de idade – devem classificar eventos cotidianos que envolvem o acaso, classificar seus resultados, identificar o espaço amostralem eventos aleatórios, estimar as suas chances de ocorrência e reconhecer suas características intrínsecas e, por fim, calcular a probabilidade em eventos equiprováveis. Tais tarefas agora também são responsabilidade de professores que não possuem necessariamente formação em Matemática – mas em Pedagogia – e, como observam Conti, Nunes, Goulart e Estevam (2019), geralmente não apresentam um nível satisfatório de saberes estatísticos e pedagógicos necessários para ensinarProbabilidade e Estatística na perspectiva de Burgess (2009).
Nos anos finais do Ensino Fundamental – alunos na faixa etária de 11 a 14 anos de idade –, temos a introdução da abordagem frequentista, não somente com indicação para que os alunos participem de experimentos probabilísticos, mas também que planejem experimentos, criem problemas e se envolvam ativamente por meio de aprendizagem baseada em projetos e modelagem matemática. Contudo, ainda predominam nos cursos de Licenciatura em Matemática concepções tecnicistas que privilegiam aspectos operacionais e procedimentais, e não aquelas concepções que buscam estimular a discussão, a reflexão e o protagonismo discente, como observam Costa (2007), Herzog (2019) e Costa, Sousa e Cordeiro (2020).
No Ensino Médio, embora haja menção explícita da BNCC (Brasil, 2018) para a exploração da abordagem frequentista da Probabilidade, há orientações aos estudantes para desenvolver experimentos probabilísticos e combinatórios, analisar, conjecturar, estimar, calcular e realizar simulações computacionais por meio de *softwares* e *apps*. Esse conjunto de habilidades e competências deveria contribuir para o letramento matemático – e inferimos quetambém o probabilístico – de tais estudantes.
Considero o marco teórico do Letramento Probabilístico (Gal, 2005) na perspectiva da exploração da Probabilidade Frequentista (Coutinho, 1994; Lopes; Mendonça, 2015). Azcárate e Cardeñoso (2003) definem a probabilidade como uminstrumento matemático que permite modelar o mundo real – sempre afetado pela incerteza –, pois possibilita previsões com alguma margem de erro.
Em relação à importância do estudo de Probabilidade, Borovcnik (2011) considera a aleatoriedade um conceito fundamental para a formação do cidadão, uma vez que permite pensar sobre o mundo. No entanto, as pessoas

apresentam grande afinidade com outros tipos de pensamentos e crenças, o que poderia nos levar a reinterpretar a situação por conceitos diferentes daqueles propostos pelas teorias da Probabilidade. Romper com essas crenças e visões pseudocientíficas é um desafio para o ensino nessa área. Os fatores psicológicos por trás do comportamento humano, para Borovcnik (2016), parecem ser de natureza arquetípica, transcendem sua experiência imediata e a lógica e seguem padrões profundamente arraigados em nossa cultura.

A aleatoriedade parece estar associada à surpresa. Seguindo essa lógica, argumenta Borovcnik (2016), quanto mais surpreendentes são os eventos, supostamente, menos prováveisdevem ser – e, para entender os eventos altamente surpreendentes, recorre-se até à esfera divina. Tal postura diante da aleatoriedade afeta profundamente o ensino e aprendizagem de Probabilidade e gera associações instáveis. As justificativas mais simplistas e intuitivas são mais facilmente aceitas pela maioria das pessoas, de modo que os resultados da Probabilidade são, em grandeparte dos casos, contraintuitivos.

Com respeito ao risco, em muitas situações existe uma combinação de baixa probabilidade e alto impacto negativo (implicações negativas) ou alta vitória (implicação positiva). Borovcnik (2016) observa que as pessoas tendem a confundir os conceitos gêmeos de aleatoriedade e causalidade e partem da premissa duvidosa de que, uma vez reconhecida a causa específica de um evento ou conjunto de eventos, é possível prever o futuro. De acordo com Borovcnik (2016), o ensino e a aprendizagem de Probabilidade buscam atender às seguintes finalidades: (i) tornar transparentes as decisões sob incerteza; (ii) expressar conhecimento qualitativo por meio de probabilidades amparadas em dados; (iii) avaliar riscos; (iv) otimizar recursos; e (v) fixar os preços em situações de intercâmbio que envolvem certeza e incerteza entre parceiros. Dessa forma, um modelo de letramento probabilístico, assim como a Estatística, não pode se amparar em elementos cognitivos e atitudinais norteados exclusivamente pelos conhecimentos matemáticos puros.

Batanero, Henry e Parzysz (2005) afirmam que com o crescente interesse na Estatística em nível escolar e com a presença cada vez maior dos computadores nas escolas, há um fococada vez maior no estudo da probabilidade experimental (noção de probabilidade como um limite da frequência estabilizada). A Probabilidade tornou-se uma ferramenta teórica usadapara abordar problemas que surgiram de experiências estatísticas, como é comum nos casos demodelagem. A modelagem probabilística de questões estatísticas permite que os estudantes decidam a melhor solução para alguns paradoxos que aparecem mesmo em problemas aparentemente simples. Essa demanda crescente nas últimas décadas justifica a exigência da inserção dos recursos digitais no ensino de Probabilidade, como prescreve a BNCC (Brasil, 2018).

Gal (2005) assevera que existem, pelo menos, dois bons motivos para ensinar Probabilidade: em primeiro lugar, a Probabilidade é parte da Matemática e da Estatística, campos de conhecimento presentes em boa parte dos currículos da educação básica; em segundolugar, o aprendizado de Probabilidade é essencial para ajudar a preparar os estudantes para a vida, uma vez que eventos e fenômenos aleatórios permeiam nossas trajetórias.

Face ao exposto, parece relevante construir propostas de ensino e de aprendizagemde Estatística e Probabilidade que promovam o letramento a partir de situações realistas – em contextos que mobilizam o interesse dos estudantes e permitem a exploração de modelos por meio de recursos computacionais – e que considerem, além dos aspectos puramente matemáticos e estatísticos, outros elementos cognitivos, afetivos e atitudinais.

Reconhecendo a necessidade de abordar os problemas de natureza probabilística utilizando tecnologias digitais – além de utilizar *softwares*, *apps* e *applets* para realizar simulaçõescomputacionais –, consideramos a relevância de incorporar a IA nas aulas de Probabilidade. Uma tecnologia emergente nos últimos meses que tem atraído a atenção dos educadores é o ChatGPT.

Embora as tecnologias sejam tão antigas quanto a humanidade (Kenski, 2016), a presença da IA em nossa sociedade do século XXI é um fenômeno relativamente recente. Kaufman (2019, p. 19) define a IA como "um campo do conhecimento associado à linguagem e à inteligência, ao raciocínio, à aprendizagem e à resolução de problemas", que pode propiciar uma "simbiose entreo humano e a máquina" (p. 19). De acordo com essa autora, "a Inteligência Artificial avança, aceleradamente, em todos os domínios, trazendo benefícios à sociedade e, simultaneamente, levantando questões éticas e sociais" (Kaufman, 2019, p.69). Kenski (2016, p. 27) ressalta que "a base da tecnologia de inteligência é imaterial, ou seja, ela não existe como máquina, mas como linguagem". O domínio da linguagem também é um dospilares do letramento probabilístico (Gal, 2005), no que concerne aos elementos cognitivos. Kenski (2016, p. 33) acrescenta que "a convergência das tecnologias de informação e comunicação para a configuração de uma nova tecnologia, a digital, provocou mudanças radicais". A Educação não ficou alheia a essas mudanças. Nunca foi tão fácil ao estudante acessarinformações que antes ficavam restritas ao livro didático ou ao discurso do próprio professor, noambiente escolar. Hoje, elas estão ao alcance de um celular para grande parte dos estudantes. Essa autora acrescenta: "Por meio das tecnologias digitais é possível representar e processar qualquer tipo de informação" (p. 33). Uma questão central para a Educação no século XXI, que tem atraído a atenção de educadores e pesquisadores, reside em determinar o papel da escola nesse contexto. Ponte, (2000, p. 88-89) afirma que "a sociedade e as tecnologias não seguem um rumo determinista. [...] O problema é levar a escola a contribuir para uma nova forma de humanidade, onde a tecnologia está fortemente presente e faz parte do cotidiano, sem que isso signifique submissão à tecnologia", Dessa maneira a escola deve se tornar "um lugar da exploração de culturas, de realização de projetos, de investigação e debate. O professor poderá ser um elemento determinante nestas atividades”.

Olite, Suárez e Ledo (2023, p. 1) observam que “o avanço de algumas tecnologias e a obsolescência de outras marcham a uma velocidade inimaginável, especialmente neste século XXI”. No lastro dessas transformações em ritmo acelerado encontramos o ChatGPT, disponibilizado no final de 2022, que se popularizou em um ritmo surpreendente e atingiu um milhão de usuários no tempo recorde de cinco dias. Esses autores acrescentam que o ChatGPT é “uma inovação que apresenta desafios jamais pensados para a sociedade atual, assim como novos desafios que terão um impacto direto na formação e/ou desempenho dos professores, estudantes, profissionais de saúde, advogados, políticos, cientistas da computação, bibliotecários, cientistas e qualquer cidadão”.

ChatGPT é uma sigla para Generative Pre-Trained Transformer, ou seja, Transformador Pré-Treinado Generativo. Foi lançado oficialmente em 30 de novembro de 2022 pela OpenAI, utilizando a linguagem de programação Python[1]. ChatGPT é um assistente virtual inteligente (um *chatbot online*), um modelo de linguagem ajustado com técnicas de aprendizado supervisionado e por reforço. Para utilizar o ChatGPT, que é gratuito, o usuário precisa realizar um cadastro e informar uma conta de *e-mail*. Depois de realizar o cadastro, ele tem acesso a uma caixa de texto, na qual deve colocar as informações que deseja receber da plataforma, que pode ser utilizada *online* sem necessidade de instalação. No entanto, existem limitações. Uma delas é a falta de capacidade de entender o contexto e as emoções por trás das perguntas, o que pode levar a respostas imprecisas ou inadequadas. Além da versão básica gratuita, a OpenAI oferece a versão avançada ChatGPT Plus, que é paga. Em pouco tempo, o ChatGPT tornou-se popular entre os estudantes das escolas brasileiras, e não foi diferente com os sujeitos de nossa pesquisa, oriundos de uma escola pública da rede estadual de ensino de São Paulo.

O ritmo da aceitação das inovações, segundo Rogers (2003), é um processo de tomada dedecisão individual em um sistema social. Ele elenca, nesse processo, 5 categorias distintas: I – Inovadores: normalmente os primeiros a adotar inovações (representam 2,5% do totalde unidades do sistema); II – Adotantes iniciais: mais integrados ao sistema social, em geral são respeitáveis e integram o grupo de formadores de opinião (representam 13,5% do total); III – Maioria inicial: caracterizam-se pela ponderação. Os que decidem pela adoção somente quandoos resultados estão bem comprovados e os riscos são toleráveis (34% do total); IV – Maioria tardia: os integrantes desse segmento adotam a inovação depois que a maioria do sistema já o fez, são os conservadores (34% do total); e V – Retardatários: são os últimos a adotar a inovação,em geral são resistentes às mudanças, e provavelmente adotam a inovação somente quando não têm outra escolha (16% do total). A IA é uma evolução, não uma revolução, que se encontra em andamento há algum tempo, e seus impactos sobre a Educação ainda são pouco conhecidos ou investigados. Embora continuemos entusiasmados com as oportunidades que o AI/ChatGPT oferece, também reconhecemos que o ciclo de inovações está em curso. Após o grande entusiasmo inicial e o acúmulo de expectativas, as novidades normalmente seguem dois caminhos: ou caem na obsolescência ou atingem um nível de estabilidade. O primeiro destino pode ser um problema para quem acreditou na inovação; ao mesmo tempo, esperar que a empolgação trazida pela novidade se dissipe pode significar a perda do timing – e, na Educação, para conquistar maior motivação dos estudantes, é essencial mobilizar seu universo de interesses (Batanero; Díaz, 2011). Santos e Pires (2023, p. 87) ressaltam que os professores estão “diante do grande desafio de acompanhar o progresso de seu tempo, para o desenvolvimento integral do ser humano, de modo a prepará-lo para o exercício da cidadania e da plena participação social, em todas as esferas da vida”. Frente a tal desafio, podem e devem contar com as tecnologias digitais, entre elas, o ChatGPT, pois esse instrumento pode auxiliá-los “no planejamento pedagógico com a criação de sequências didáticas, projetos e atividades para a sala de aula” (p. 87). Craig (2023, p. 7) considera que esse *chatbot* já chegou às escolas de todo o mundo, “tornando-se um recurso valioso para fortalecer a compreensão escrita e de leitura de seus alunos”. Assim, julgamos relevante neste momento investigar as primeiras explorações do ChatGPT no âmbito escolar.

Metodologia

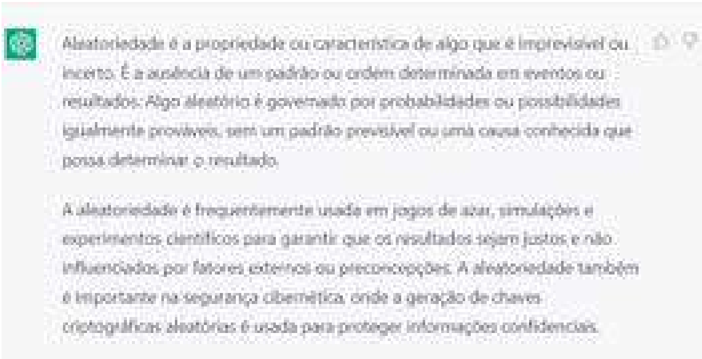
Trata-se de uma pesquisa qualitativa (Creswell; Creswell, 2021), do tipo estudo de caso (Yin, 2015), na qual analisamos o desenvolvimento do letramento probabilístico de uma turma com 28 estudantes do 3.o e último ano do Ensino Médio de uma escola pública brasileira, no primeiro bimestre de 2023, por meio de projeto de aprendizagem. Esses estudantes, além de estudarem Probabilidade na componente curricular Matemática, também o faziam no Itinerário Formativo de caráter eletivo “Certeza e incerteza: para que serve a probabilidade - Tendências e decisões”, recém introduzido na rede estadual de São Paulo, no contexto do Novo Ensino Médio. Para tanto, além do livro didático, receberam material institucional apostilado, com sugestões de atividades acerca do papel da Probabilidade no dia a dia do cidadão comum (São Paulo, 2023). Os estudantes discutiram os resultados de problemas probabilísticos presentes em um livro didático. Em uma roda de conversa, questionaram a artificialidade daquelas situações, comparando-as com situações de seu próprio dia a dia. A seguir, após calcularem as probabilidades da forma que aprenderam em anos anteriores (laplaciana), compararam os resultados

[1] Disponível em: https://www.python.org/ Acesso em: 20 ago. 2024.

obtidos em lançamentos de dados variados (tetraédricos, hexaédricos, octaédricos, decaédricos, dodecaédricos e icosaédricos) em contexto de jogos de tabuleiro, o que permitiu, de forma lúdica, muitas repetições. Passaram, então, para simulações computacionais, usando o Excel e applets. Na penúltima etapa desse projeto, leram, discutiram e fizeram o fichamento de alguns capítulos do livro paradidático O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas (Mlodinow, 2009), com situações probabilísticas contraintuitivas reais. Para finalizar, e esse recorte do projeto é o alvo deste artigo, confrontaram as suas concepções com as respostas do ChatGPT, conseguindo identificar falhas nas respostas da IA. Na seção seguinte, apresentaremos os resultados da análise dessa etapa do projeto de aprendizagem.

Resultados e discussões

Na etapa final do projeto de aprendizagem sobre probabilidade, os estudantes, confrontaram as suas concepções com as respostas do ChatGPT, conseguindo identificar falhas nas respostas da Inteligência Artificial. Vejamos um primeiro exemplo de uma dessas respostas, obtida em 08 de março de 2023:



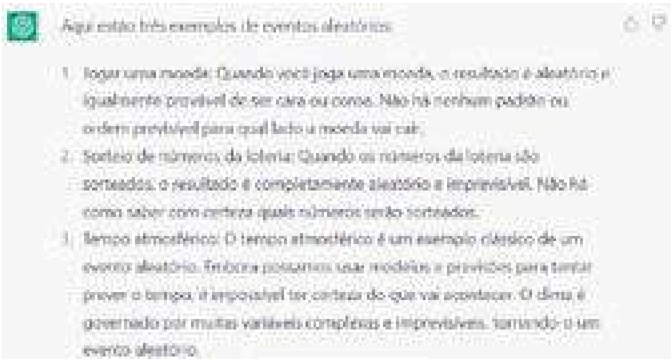
Aleatoriedade é a propriedade ou característica de algo que é imprevisível ou incerto. É a ausência de um padrão ou ordem determinada em eventos ou resultados. Algo aleatório é governado por probabilidades ou possibilidades igualmente prováveis, sem um padrão previsível ou uma causa conhecida que possa determinar o resultado.

A aleatoriedade é frequentemente usada em jogos de azar, simulações e experimentos científicos para garantir que os resultados sejam justos e não influenciados por fatores externos ou preconcepções. A aleatoriedade também é importante na segurança cibernética, onde a geração de chaves criptográficas aleatórias é usada para proteger informações confidenciais.

Figura 1. Resposta do ChatGPT à pergunta "O que é aleatoriedade?"

Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

O reconhecimento de padrões, de regularidades está na essência da Matemática e é imprescindível para aplicações práticas desses cálculos, como a própria previsão do tempo, um dos exemplos dados pelo ChatGPT. Além de confundir o estudante, como se os termos possibilidade e probabilidade fossem sinônimos, reforçou o viés da equiprobabilidade, questionado por Coutinho (1994) e Lopes e Mendonça (2015). Ademais, menciona a aleatoriedade como se fosse uma ferramenta a ser "usada" em jogos de azar ou simulações, e não uma característica intrínseca a uma ampla classe de fenômenos. Quando exemplos de fenômenos aleatórios são solicitados por uma estudante, a resposta resulta nos casos mais comuns e desgastados dos livros didáticos:



Aqui estão três exemplos de eventos aleatórios:

1. Jogar uma moeda: Quando você joga uma moeda, o resultado é aleatório e igualmente provável de ser cara ou coroa. Não há nenhum padrão ou ordem previsível para qual lado a moeda vai cair.
2. Sorteio de números da loteria: Quando os números da loteria são sorteados, o resultado é completamente aleatório e imprevisível. Não há como saber com certeza quais números serão sorteados.
3. Tempo atmosférico: O tempo atmosférico é um exemplo clássico de um evento aleatório. Embora possamos usar modelos e previsões para tentar prever o tempo, é impossível ter certeza do que vai acontecer. O clima é governado por muitas variáveis complexas e imprevisíveis, tornando-o um evento aleatório.

Figura 2. Resposta do ChatGPT à solicitação "Dê três exemplos de eventos aleatórios"

Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

Depois de buscar definições, os estudantes deveriam questionar o ChatGPT sobre a probabilidade de ocorrência de eventos de natureza aleatória. Uma das perguntas formuladas envolveu a queda de raios:

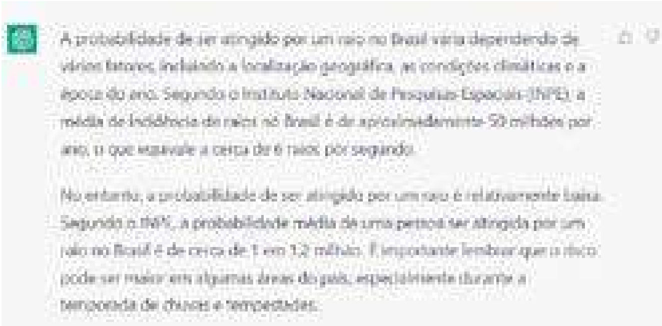


Figura 3. Resposta do ChatGPT à pergunta:
“Qual a probabilidade de ser atingido por um raio no Brasil”
Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

Chama a nossa atenção o fato da maioria das respostas não serem devidamente referenciadas. O INPE foi citado, no caso, mas ele é uma instituição científica, não uma fonte atemporal. As referências só foram apresentadas quando solicitadas. O estudante que obteve essa resposta encontrou um erro de cálculo. Considerando um ano com 365 dias, com 24 horas, com 3600 segundos cada, temos 31 536 000 segundos, o que torna falsa a conclusão de que, com 50 000 000 de raios anuais no Brasil, teríamos cerca de 6 raios por segundo. Uma das questões discutidas amplamente em sala de aula foi a necessidade de se utilizar uma linguagem clara e objetiva nas perguntas e nas respostas (BOROVCNIK, 2011, 2016). Assim, um dos estudantes, intencionalmente, elaborou perguntas vagas, para checar a qualidade e assertividade das repostas. Esse é um exemplo digno de nota:

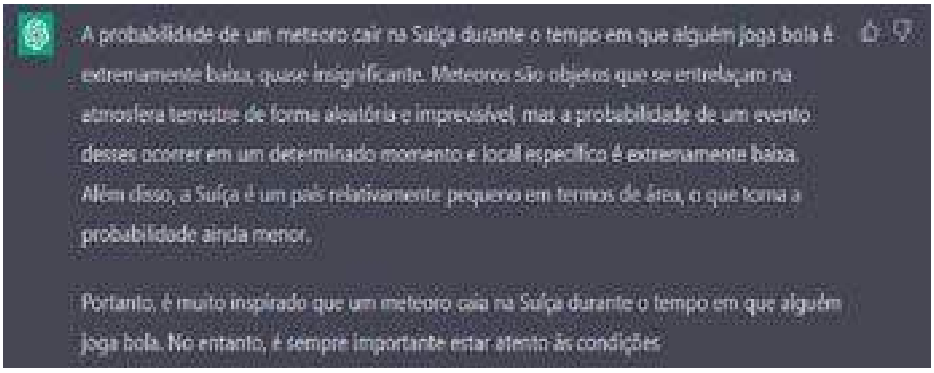
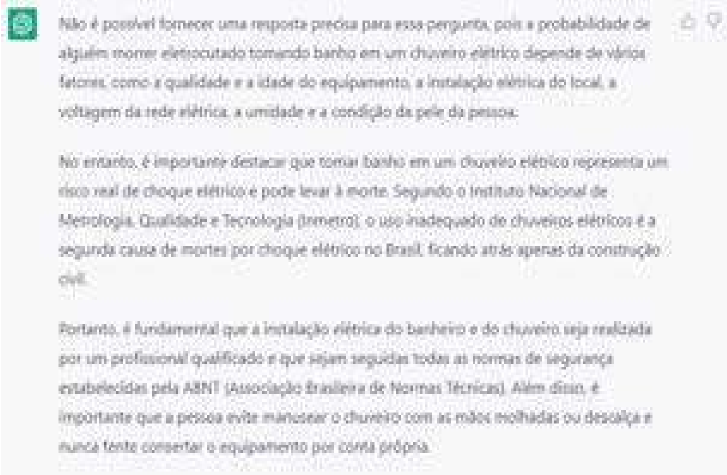


Figura 4. Resposta do ChatGPT à pergunta:
“Qual a probabilidade de cair um meteoro na Suíça enquanto eu jogo bola?”
Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

Nesse caso, um fator importante que deveria ser levado em conta, ainda fosse considerado apenas a probabilidade clássica (LOPES; MENDONÇA, 2016), seria a frequência com que esse estudante joga, mas não foi. Na verdade, tal probabilidade não seria apenas pequena. Seria nula, porque esse estudante não joga bola. Da maneira como a pergunta anterior foi elaborada, não poderia ser respondida. Em poucos casos na turma o ChatGPT informou que não poderia responder (apenas 13 casos dentre 84). O exemplo a seguir é um destes:



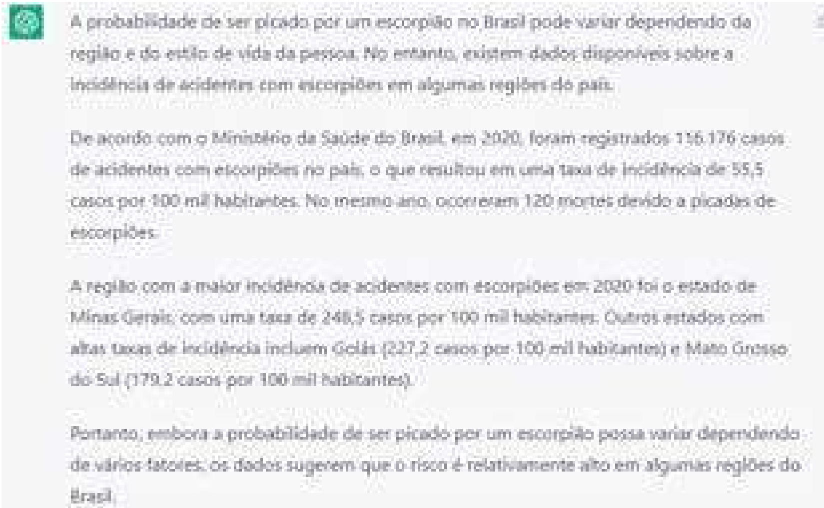
Não é possível fornecer uma resposta precisa para essa pergunta, pois a probabilidade de alguém morrer eletrocutado tomando banho em um chuveiro elétrico depende de vários fatores, como a qualidade e a idade do equipamento, a instalação elétrica do local, a voltagem da rede elétrica, a umidade e a condição da pele da pessoa.

No entanto, é importante destacar que tomar banho em um chuveiro elétrico representa um risco real de choque elétrico e pode levar à morte. Segundo o Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro), o uso inadequado de chuveiros elétricos é a segunda causa de mortes por choque elétrico no Brasil, ficando atrás apenas da construção civil.

Portanto, é fundamental que a instalação elétrica do banheiro e do chuveiro seja realizada por um profissional qualificado e que sejam seguidas todas as normas de segurança estabelecidas pela ABNT (Associação Brasileira de Normas Técnicas). Além disso, é importante que a pessoa evite manusear o chuveiro com as mãos molhadas ou descalça e nunca tente consertar o equipamento por conta própria.

Figura 5. Resposta do ChatGPT à pergunta:
“Qual a probabilidade de morrer eletrocutado tomando banho em um chuveiro elétrico? Me dê dados”
Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

Vale ressaltar que o ChatGPT não apresentou os dados solicitados. Isso só aconteceu quando a estudante falou explicitamente em números, como vemos na pergunta seguinte:



A probabilidade de ser picado por um escorpião no Brasil pode variar dependendo da região e do estilo de vida da pessoa. No entanto, existem dados disponíveis sobre a incidência de acidentes com escorpiões em algumas regiões do país.

De acordo com o Ministério da Saúde do Brasil, em 2020, foram registrados 116.176 casos de acidentes com escorpiões no país, o que resultou em uma taxa de incidência de 55,5 casos por 100 mil habitantes. No mesmo ano, ocorreram 120 mortes devido a picadas de escorpiões.

A região com a maior incidência de acidentes com escorpiões em 2020 foi o estado de Minas Gerais, com uma taxa de 248,5 casos por 100 mil habitantes. Outros estados com altas taxas de incidência incluem Goiás (227,2 casos por 100 mil habitantes) e Mato Grosso do Sul (179,2 casos por 100 mil habitantes).

Portanto, embora a probabilidade de ser picado por um escorpião possa variar dependendo de vários fatores, os dados sugerem que o risco é relativamente alto em algumas regiões do Brasil.

Figura 6. Resposta do ChatGPT à pergunta:
“Qual a probabilidade de ser picada por um escorpião no Brasil? Me dê números”
Fonte: ChatGPT (OPENAI, 2023)

Mesmo com os dados quantitativos apresentados, as referências não foram fornecidas de modo adequado. No entanto, um fator que consideramos positivo foi o envolvimento dos estudantes, na elaboração de questões de seu interesse (BATANERO; DÍAZ, 2011). Outros resultados positivos foram o aprimoramento da linguagem escrita, a exploração do contexto no qual as perguntas e respostas se embasavam, o desenvolvimento do questionamento crítico, mobilizando grandes ideias da Probabilidade na argumentação com o ChatGPT e com os colegas, na divulgação dos resultados e troca de experiências, bem como realização do próprio cálculo probabilístico, elementos cognitivos indispensáveis para o letramento de acordo com Gal (2005).
Na esfera dos elementos de disposição de Gal (2005), estiveram em jogo, tanto na elaboração das questões quanto na contra argumentação com o ChatGPT crenças, atitudes e postura crítica, além de sentimentos pessoais relacionados à incerteza e ao risco. Na seção seguinte, formulamos algumas de nossas conclusões.

Conclusões

Por meio desse projeto de aprendizagem, estudo de caso, foi possível identificar avanços das concepções probabilísticas finais em relação às iniciais, em prol do letramento probabilístico de Gal (2005), envolvendo aspectos cognitivos – grandes ideias, como variação, aleatoriedade, independência, predictibilidade/incerteza;

determinação de probabilidades; domínio de linguagem; conhecimento do contexto; e questionamento crítico – e disposicionais, como crenças, atitudes, postura crítica e sentimentos pessoais frente à incerteza e ao risco. O engajamento dos estudantes foi notório, embora a demanda na etapa final, alvo deste artigo, fosse apresentar três perguntas elaboradas pelos estudantes, assim como as respectivas respostas fornecidas pelo ChatGPT. Após terem entregado as respostas, com os notebooks da escola ou com os smartphones pessoais, os estudantes continuaram interagindo com o ChatGPT. Eles ficaram surpresos com a rapidez das respostas e, mais ainda, com a sua própria capacidade de identificar erros e inconsistências nas respostas apresentadas pelo chatbot. O empoderamento dos estudantes, ao sofisticarem a sua linguagem, bem como ao corrigirem a máquina, evidenciou uma mudança de perspectiva frente à Matemática, contrapondo a natureza determinística dessa ciência a concepções probabilísticas. O ChatGPT é uma ferramenta formidável para ser investigada em sala de aula com temáticas variadas, mas ainda tem muito a evoluir. Quanto a isso, a anuência dos estudantes foi unânime. Por outro lado, eles perceberam que esse recurso, que em muitas escolas foi proibido, pode ser útil não para entregar-lhes trabalhos escolares prontos, mas para uma troca que pode promover o seu real desenvolvimento na aprendizagem escolar – e auxiliá-los fora do ambiente escolar. Concordamos com Bairral e Carvalho (2019, p. 179), quando afirmam que "os processos de ensino e de aprendizagem não acontecem na mesma velocidade do desenvolvimento das tecnologias porque essas envolvem questões como crenças, valores, emoções". A própria BNCC (Brasil, 2018) tratou de valorizar o desenvolvimento das competências socioemocionais, extrapolando os fatores estritamente cognitivos. Contudo, não podemos nos curvar frente às dificuldades e aos desafios encontrados nas escolas públicas no acesso às tecnologias digitais e concordamos mais uma vez com Bairral e Carvalho (2019, p. 179), quando declaram que de nada vale resistir à incorporação das tecnologias digitais no ambiente escolar – mas, sim, "ousar, investigar, questionar, refletir, sinalizar, argumentar" e transformar esses recursos em nossos aliados pedagógicos no ensino e na aprendizagem da Matemática.

Referencias Bibliograficas

Abar, C.; Santos, J. (2020). Pensamento computacional na Escola Básica na era da inteligência artificial: onde está o professor. *In*: Congresso de Inteligência Artificial da PUC-SP, 1., São Paulo. *Anais* [...]. São Paulo: PUC-SP, 1-15.

Azcárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2003). Conocimiento Profesional de referencia con relación al conocimiento probabilístico. Una aproximación a las ideas de los futuros profesores de primaria sobre el mismo. In *Actas 27º Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*.

Bairral, M.; Carvalho, M. (2019). *Dispositivos móveis no ensino de Matemática*: tablets & smartphones. São Paulo: Livraria da Física.

Batanero, C. & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 15-37). Boston, MA: Springer US.

Borovcnik, M. (2011). Strengthening the role of probability within statistics curricula. *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: a joint ICMI/IASE study: the 18th ICMI study*, 71-83.

Borovcnik, M. (2016). Pensamento probabilístico e alfabetização em probabilidade no contexto do risco. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(3), 1491-1516.

Brasil. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (1988). *Parâmetros curriculares nacionais*: Matemática (3.º e 4.º ciclos do ensinofundamental). Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (2002). *Parâmetros curriculares nacionais (Ensino Médio)*. Brasília: Ministério da Educação.

Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular:* Educação é a Base. Ensino Médio.
Brasília: Ministério da Educação.

Brasil. (2019). *Resolução do Conselho Nacional de Educação n. 2/2019*. (BNC Formação). Brasília:Ministério da Educação.

Brasil. (2020). *Resolução do Conselho Nacional de Educação n. 1/2020*. (BNC Formação Continuada).Brasília: Ministério da Educação.

Burgess, T. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Mathematics Enthusiast*, *6*(1), 3-24.

Conti, K. C., Nunes, L. N., Goulart, A., & Estevam, E. J. G. (2019). Um cenário da Educação Estatística em cursos de Pedagogia. *Revista Eletrônica de Educação Matemática.* Edição Especial Educação Estatística, 14, 1-15. DOI: http://doi.org/105007/1981-1322.2019.e62802

Costa, A. (2007). *A educação estatística na formação do professor de Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação). Itatiba: Universidade São Francisco.

Costa, R. P. D., Sousa, C., & Cordeiro, L. Z. (2020). O ensino de Matemática na Base Nacional Comum Curricular nos anos finais do Ensino Fundamental. *Ensino em Re-Vista*, *27*(2), 572-594. DOI: https://doi.org/10.14393/er-v27n2a2020-8

Coutinho, C. Q. S. (1994) *Introdução ao conceito de probabilidade pela visão frequentista – estudo epistemológico e didático*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.
Craig, D. F. (2023). *ChatGPT en el Aula Fortaleciendo la Redacción y la Comprensión Lectora en la Educación Secundaria*. Buenos Aires. Disponível em: https://craig.ar/ Acesso em: 10 jun.2023.
Creswell, J. W.; Creswell, J. D. (2021) *Projeto de pesquisa - Métodos qualitativo, quantitativo e misto*. 5ª. ed. Porto Alegre: Penso Editora.
Gal, I. (2005) Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. In Graham A. Jones (eds). *Exploring probability in school*: Challenges for teaching and learning, 39-63.
Giordano, C. C., & Vilhena, V. D. M. (2020). Educação estatística e a formação de professores que ensinam matemática no Brasil. *Brazilian Journal of Development*, *6*(12), 104137-104148. DOI: https://doi.org/10.34117/bjdv6n12-784
Herzog, R. C. B. (2019). *A percepção de licenciandos em matemática sobre a aleatoriedade*. 2019. 67 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Porto Alegre: Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
Kaufman, D. (2019). *A inteligência artificial irá suplantar a inteligência humana?* Barueri: Estação dasLetras e Cores.
Kenski, V. M. (2016). *Educação e tecnologias*: o novo ritmo da informação. Campinas:Papirus, 2016.
Lopes, C. E., & Mendonça, L. O. (2016). Prospectivas para o estudo da Probabilidade e da Estatística no ensino fundamental. *Revista Vidya*, 36(2), 293-314.
Mlodinow, L. (2009). *O andar do bêbado*: como o acaso determina nossas vidas. São Paulo: Companhia das Letras.
Olite, F. M. D., Suárez, I. D. R. M,, & Ledo, M. J. V. (2023). Chat GPT: origen, evolución, retos e impactos en la educación. *Educación Médica Superior*, *37*(2).
Ponte, J. P. (2000). Tecnologias de informação e comunicação na formação de professores: que desafios? *Revista Iberoamericana de educación*, *24*, 63-90.
Rogers, E. M. (2023). *Diffusion of Innovations*. 5th ed. New York: Free Press.
Santos, R. P., & de Pires, F. C. (2023). Possibilidades de ampliação da "Sala de Aula" e de aprimoramento de práticas Matemáticas com o auxílio das tecnologias digitais. *Educação Matemática Em Revista*, *28*(78), 72-90.
São Paulo. (2023). *Certeza e incerteza*: para que serve a probabilidade - Tendências e decisões. SãoPaulo: Secretaria de Educação.
Scheffer, N., Finn, G., & Zeiser, M. H. (2021). Tecnologias Digitais na área de matemática da Política Educacional da BNCC: reflexões para o Ensino Fundamental. *Ensino de Ciências e Tecnologia em Revista–ENCITEC*, *11*(2), 119-131.
Yin, R. K. (2015). *Estudo de Caso*: Planejamento e métodos. Porto Alegre: Bookman.

Artículos - Índice

El trabajo colaborativo en un curso universitario de cálculo diferencial de primer año: reflexiones a partir de la voz de los estudiantes

Tulio SEMENTO, Laura LANGONI

Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata
Calle 1 y 47, La Plata (B1900TAG), Buenos Aires, Argentina
tulio.semento@ing.unlp.edu.ar

Resumen

El presente artículo analiza las percepciones de estudiantes de la asignatura Matemática A en torno al trabajo colaborativo que configuró la modalidad bajo la cual cursaron la materia. Este espacio curricular corresponde a un curso de Matemática del primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, cuyo contenido abarca cálculo diferencial en una y varias variables. A través de un enfoque metodológico mixto, se exploraron las valoraciones de los estudiantes sobre diversas dimensiones de esta modalidad de trabajo y su impacto en el proceso de aprendizaje.

El trabajo se centra en cómo los estudiantes valoran su experiencia al cursar bajo la modalidad de trabajo colaborativo, abordando aspectos como la participación y compromiso, el disfrute, las dificultades encontradas y el impacto en su autonomía de estudio. Se explora también la relevancia que los estudiantes otorgan a esta modalidad en relación con la construcción del conocimiento y su adaptación a este enfoque pedagógico. A lo largo del análisis, se examinan las percepciones sobre la organización del aprendizaje y la apropiación de los contenidos, así como la importancia del rol del docente en el proceso colaborativo. Además, se considera la interacción entre compañeros y la formación de lazos sociales durante la cursada, elementos clave que influyen en el ambiente de aprendizaje y contribuyen al desarrollo de competencias y habilidades interpersonales esenciales para el desempeño académico y profesional de los estudiantes.

Palabras clave: Aprendizaje Colaborativo. Aula universitaria. Cálculo diferencial. Percepciones-estudiantes.

Introducción

Matemática A es la segunda asignatura de matemática que cursan los estudiantes de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata. El programa de la materia abarca contenidos de cálculo diferencial, tanto en una como en varias variables. Se dicta durante el primer semestre de todos los planes de estudio y también se ofrece en el segundo semestre, lo que permite que los estudiantes organicen su trayectoria académica según sus necesidades. En 2023, aproximadamente 1400 estudiantes se inscribieron en el primer semestre y unos 900 en el segundo. Debido a esta alta demanda, las clases se distribuyen en dieciocho comisiones en el primer semestre y diez en el segundo.

La cursada de Matemática A, al igual que las demás asignaturas del primer año, representa una etapa fundamental en la integración de los estudiantes a la vida universitaria y a las dinámicas académicas específicas de la Facultad de Ingeniería. Durante esta transición, los estudiantes enfrentan desafíos académicos y personales, debiendo adaptarse a las nuevas exigencias propias del nivel universitario, como formar nuevos lazos sociales y grupos de estudio.

La metodología de enseñanza propuesta en el programa analítico de Matemática A concibe el aprendizaje como un proceso en el que los estudiantes son constructores activos del conocimiento, en lugar de simples receptores del mismo. Este enfoque entiende el aprendizaje como una actividad simultáneamente personal y social, donde los estudiantes desarrollan significados a partir de sus ideas previas. En este contexto, el trabajo en grupo se presenta como un facilitador clave para la construcción y comprensión de conceptos matemáticos, permitiendo a los estudiantes colaborar activamente en la resolución de problemas, intercambiar ideas y generar conocimiento de manera conjunta.

El enfoque pedagógico implementado en la asignatura está alineado con los principios del aprendizaje colaborativo, un modelo que organiza a los estudiantes en equipos de trabajo con el objetivo de alcanzar metas de aprendizaje comunes. En las clases de Matemática A, los docentes proponen actividades que promueven el trabajo en equipo de manera constante y la participación activa de todos los miembros del grupo. La colaboración, en este contexto, no se limita a la simple distribución de tareas, sino que implica un proceso colectivo desde el inicio, donde todos intervienen conjuntamente en la realización de la actividad. Si bien pueden surgir diferencias en los roles asumidos por cada estudiante, estas emergen de manera espontánea dentro de la dinámica interactiva del grupo (Roselli, 2012). A través de esta interacción, los estudiantes no solo construyen conocimientos de manera compartida, sino que también desarrollan competencias básicas como la comunicación efectiva, la identificación, formulación y resolución de problemas, y el aprendizaje continuo.

En este trabajo se analiza la implementación de una modalidad de enseñanza basada en el aprendizaje activo y colaborativo en la asignatura Matemática A. Esta estrategia representa una ruptura con los métodos expositivos tradicionales predominantes en la educación secundaria, a los que muchos estudiantes están habituados. Para fomentar esta modalidad, la cátedra desarrolló un material didáctico que no presenta los contenidos de forma expositiva, sino que promueve la construcción activa del conocimiento.

La modalidad de trabajo implementada requiere de los estudiantes un esfuerzo personal que representa un desafío para quienes recién ingresan a la universidad. Este artículo busca explorar y analizar las experiencias de los estudiantes que cursaron Matemática A bajo un enfoque colaborativo, centrándose en sus percepciones acerca de la modalidad de trabajo implementada. Para ello, dar centralidad a las voces de los estudiantes permite obtener una perspectiva fundamental para reflexionar sobre la propuesta pedagógica y ofrece herramientas valiosas para introducir mejoras en las prácticas docentes.

Fundamentación

El aprendizaje colaborativo ha sido ampliamente estudiado en el ámbito educativo y se ha reconocido su impacto positivo en la construcción del conocimiento, la adquisición de competencias transversales y el desarrollo de la autonomía en los estudiantes (Filgueira Arias y Gherab Martin, 2020). Esta metodología permite superar los 'modelos tradicionales' centrados en la transmisión unidireccional de contenidos y promueve un aprendizaje más significativo. En este esquema pedagógico, "se presenta el aprendizaje como un proceso social que se construye en la interacción no sólo con el profesor, sino también con los compañeros, con el contexto y con el significado que se le asigna a lo que se aprende" (Maldonado Pérez, 2011, p. 265).

En una modalidad de trabajo colaborativo, el rol del docente adquiere una función clave como facilitador del proceso de aprendizaje. Su tarea no se limita a la exposición de contenidos, sino que debe generar condiciones para que los estudiantes regulen activamente su propio aprendizaje, planificando, supervisando y evaluando su progreso mediante estrategias y recursos adecuados (Filgueira Arias y Gherab Martin, 2020). En aras de generar un ambiente propicio para que el trabajo colaborativo se logre de manera efectiva, los docentes deben promover en los estudiantes la adquisición de destrezas sociales colaborativas. Esta tarea "no es la simple interacción e intercambio de información entre los miembros del grupo, implica la posibilidad de ser capaz de confiar en los compañeros para apoyar el propio aprendizaje y proporcionar intercambios en un ambiente no competitivo" (Maldonado Pérez, 2012, p. 101). Como consecuencia, el trabajo colaborativo trasciende el aprendizaje en grupo y demanda que los docentes comprendan cómo opera esta estrategia didáctica, para poder acompañar adecuadamente a los estudiantes en la construcción del conocimiento (Maldonado Pérez, 2012).

Trabajando de forma colaborativa, los estudiantes dejan la pasividad de ser meros receptores y se involucran activamente en la consecución de metas comunes, poniendo en juego sus habilidades y asumiendo la democracia participativa a través de la socialización de reglas y la asignación de roles. Esta modalidad fortalece la capacidad de comunicación, de escuchar opiniones diversas, intercambiar experiencias y llegar a acuerdos. En este sentido, se promueve un nivel de discusión que enriquece el proceso de aprendizaje y favorece la adquisición de habilidades fundamentales tanto en la formación académica como en el ejercicio de su futura profesión (Ramírez y Rojas, 2012).

Bajo este marco teórico, la implementación del aprendizaje colaborativo en Matemática A responde a la necesidad de proporcionar a los estudiantes una formación integral, promoviendo no solo la construcción de conocimientos matemáticos, sino también el desarrollo de competencias clave para su desempeño académico y profesional.

Metodología

Este trabajo adoptó un enfoque metodológico mixto, combinando tanto métodos cuantitativos como cualitativos para analizar las percepciones de los estudiantes de Matemática A respecto al trabajo colaborativo en la cursada de la asignatura. En el componente cuantitativo, se aplicó una encuesta cerrada con preguntas de opción múltiple. En el componente cualitativo, se llevaron a cabo entrevistas semiestructuradas, lo que permitió explorar en profundidad las experiencias de los estudiantes y obtener una interpretación rica de sus significados (Hernández Sampieri et al., 2014).

Las encuestas se realizaron a 171 estudiantes de cuatro comisiones diferentes de Matemática A durante el primer semestre de 2023. En cada comisión, respondieron 54, 51, 34 y 32 estudiantes, respectivamente. Las entrevistas fueron realizadas a estudiantes que trabajaron en equipos de aproximadamente seis integrantes durante el curso. Estas entrevistas, con una duración de entre 15 y 25 minutos, permitieron indagar sobre diversos aspectos de la experiencia estudiantil. En este proceso, el entrevistador adoptó un enfoque pasivo, limitándose a promover la conversación (Tonon, 2012), lo que facilitó que los estudiantes expresaran libremente sus opiniones y perspectivas.

En las comisiones donde se superaron los 50 estudiantes encuestados, se eligió entrevistar a dos grupos de trabajo, mientras que en aquellas comisiones con menos de 50 estudiantes, se entrevistó a un único grupo. Aunque las entrevistas comenzaron con dos preguntas base predeterminadas, el curso de la conversación se adaptó a las respuestas, lo que permitió explorar temas emergentes. Posteriormente, las grabaciones fueron transcritas (Semento, 2024) y organizadas en categorías que reflejaban patrones y temas recurrentes observados en los relatos de los estudiantes. Este enfoque facilita una visión clara de sus percepciones e identifica patrones clave relacionados con la modalidad de trabajo.

Resultados y discusión

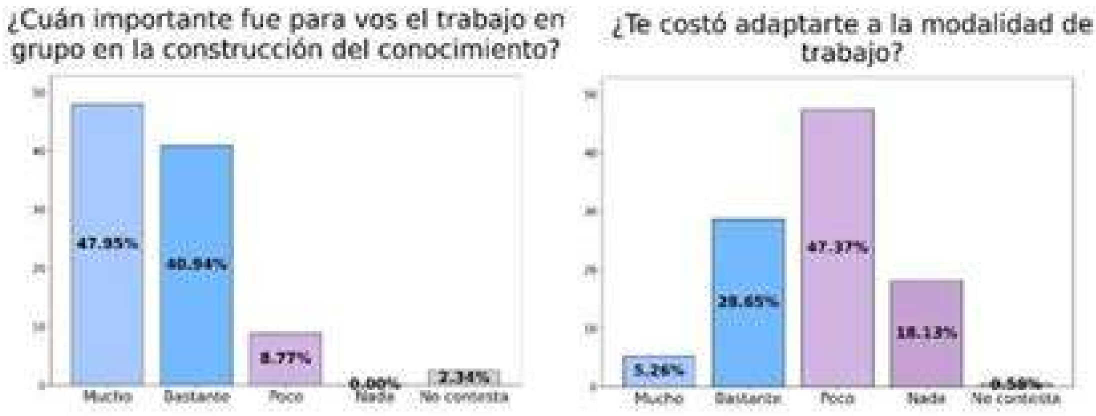
(1) De las encuestas

En las siguientes figuras se presentan los resultados de la encuesta realizada a 171 estudiantes de la asignatura Matemática A, con el objetivo de explorar sus percepciones sobre el trabajo colaborativo y sus valoraciones sobre el aprendizaje bajo esta modalidad. Las figuras muestran gráficos de barras con los porcentajes de respuestas sobre diferentes aspectos de la experiencia de los alumnos con relación a la modalidad de trabajo colaborativo, que incluyen participación, disfrute, dificultades y otros aspectos de interés.

Figura 1. Grado de participación y disfrute en el trabajo colaborativo

En la **Figura 1** se puede observar que más del 84% de los estudiantes indicó que participó 'mucho' o 'bastante' en el trabajo colaborativo, lo que refleja una participación activa en esta modalidad y un alto grado de aceptación y compromiso. Además, cerca del 90% de los estudiantes manifestó haber disfrutado 'mucho' o 'bastante' de la experiencia de trabajar en grupo. Estos datos evidencian que, a pesar de las dificultades inherentes a esta forma de trabajo, la mayoría de los estudiantes encontró gratificación en la experiencia colaborativa. Estos hallazgos sugieren que el trabajo colaborativo puede ser una herramienta eficaz y atractiva para el aprendizaje, contribuyendo a una experiencia académica más amena. La alta satisfacción y participación de los estudiantes refuerzan la idea de que este enfoque tiene el potencial de mejorar tanto el compromiso como la motivación en el proceso de aprendizaje

Figura 2. Relevancia del trabajo colaborativo para la construcción del conocimiento y adaptación a la modalidad

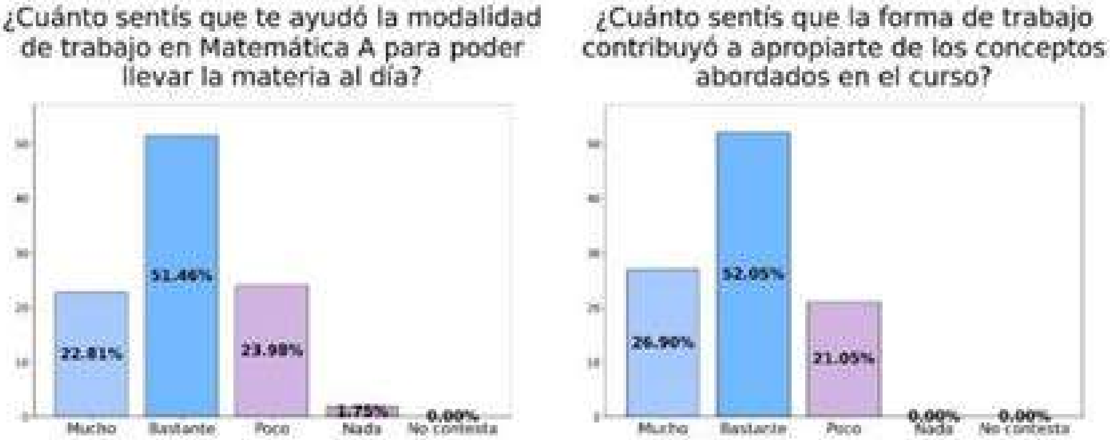


En la **Figura 2** se observa que, aproximadamente el 89% de los estudiantes consideraron que el trabajo colaborativo fue 'mucho' o 'bastante' relevante para la construcción de su conocimiento. Este dato resalta la percepción positiva que los estudiantes tienen sobre el valor pedagógico de la modalidad, ya que casi la totalidad de ellos la valoró como un recurso importante para su aprendizaje.

Por otro lado, más del 65% de los estudiantes indicó que la adaptación al trabajo colaborativo les resultó 'poco' o 'nada' difícil, mientras que casi un 34% manifestó haber tenido 'bastantes' o 'muchas' dificultades para adaptarse a la modalidad. Este hallazgo sugiere que, a pesar de reconocer el potencial pedagógico del trabajo colaborativo, muchos estudiantes enfrentaron obstáculos durante el proceso de adaptación a esta nueva metodología. De este modo, se evidencian los desafíos y tensiones que pueden surgir cuando los estudiantes transitan de métodos tradicionales de enseñanza, centrados en la exposición docente, a enfoques más activos y participativos. Según Taub y Castillo (2014), esta transición puede generar dificultades debido a la discrepancia entre las expectativas previas de los estudiantes y las demandas de una metodología que promueve un aprendizaje más autónomo y colaborativo. No obstante, el alto grado de valoración del trabajo colaborativo por parte de los estudiantes sugiere que pudieron reconocer sus beneficios, especialmente en términos de la facilitación de la construcción de su conocimiento.

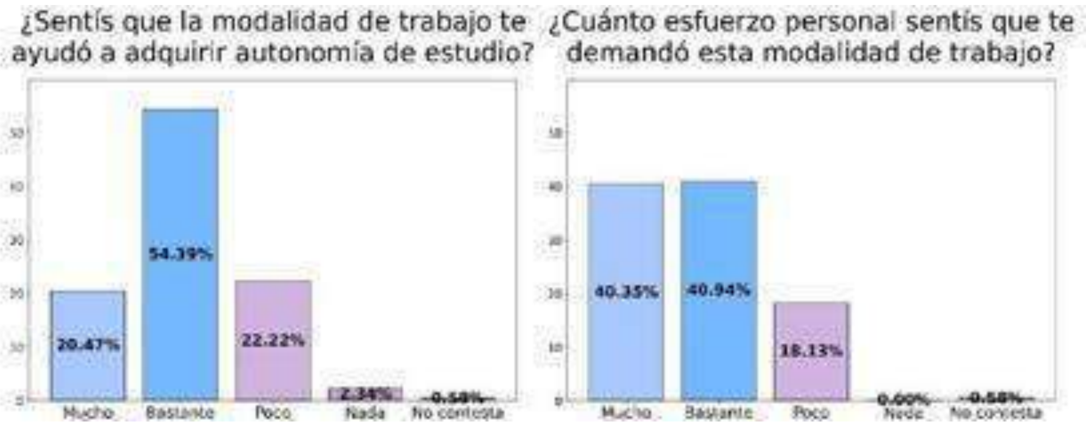
Figura 3. Impacto de la modalidad en la organización del estudio

y en la apropiación de los contenidos del curso



En la **Figura 3** se ve que la percepción de los estudiantes en lo que respecta a dos aspectos clave relacionados con el impacto de la modalidad en su proceso de aprendizaje: la capacidad para seguir el cronograma de contenidos previsto y la apropiación de los conceptos. El 78% de los estudiantes expresó que la modalidad de trabajo les ayudó 'mucho' o 'bastante' a mantenerse al día con la materia. Esto sugiere que el trabajo colaborativo promovió una estructura que permitió a los estudiantes gestionar sus tiempos y cumplir con los requisitos del curso. En cuanto a la apropiación de los contenidos, el 79% de los estudiantes consideró que la modalidad contribuyó positivamente a la apropiación de los conceptos abordados en el curso; esto sugiere que el aprendizaje colaborativo puede articularse como un facilitador en la construcción de conocimientos y apropiación de contenidos.

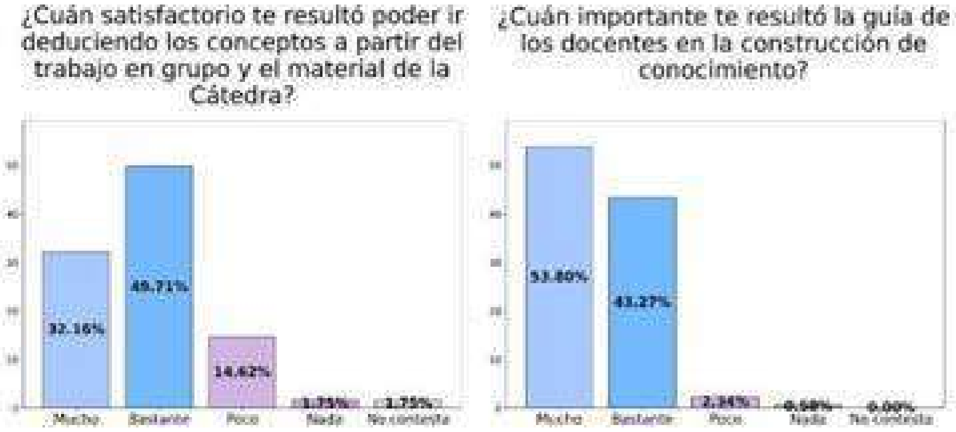
Figura 4. La demanda de esfuerzo personal por parte de la modalidad colaborativa y su impacto sobre la autonomía de estudio.



En cuanto a la contribución de la modalidad al desarrollo de la autonomía de estudio, alrededor del 75% de los estudiantes consideró que esta modalidad les ayudó ‘mucho’ o ‘bastante’ a desarrollar una mayor autonomía. Este dato sugiere que este enfoque de aprendizaje activo, en el que los estudiantes asumen un rol más protagónico en su proceso de aprendizaje, se articula como facilitador de la autorregulación de los estudiantes, alentándolos a tomar el control de su propio aprendizaje y gestionar su autonomía dentro del contexto grupal.

En la **Figura 4** se observa que los estudiantes perciben un alto nivel de esfuerzo personal requerido por la modalidad colaborativa. Más del 80% de los estudiantes señaló que la modalidad les demandó ‘mucho’ o ‘bastante’ esfuerzo. Esto indica que la modalidad requiere un compromiso significativo y una dedicación personal considerable. El reconocimiento de este esfuerzo pone en relieve cómo esta modalidad constituye una experiencia educativa demandante, que exige una participación activa y una mayor dedicación en comparación con métodos más expositivos a los que, en general, están más habituados.

Figura 5. Satisfacción en la construcción de conocimiento e importancia de la guía docente en el aprendizaje colaborativo



En la **Figura 5** se observa la satisfacción de los estudiantes respecto a la posibilidad de deducir los conceptos a partir del trabajo colaborativo y el material proporcionado por la cátedra. El 82% de los estudiantes expresó haber experimentado una 'gran' o 'bastante' satisfacción al poder deducir los conceptos mediante este enfoque. Esto sugiere que la capacidad de construir conocimiento por sí mismos resulta más satisfactoria y enriquecedora que recibir respuestas o explicaciones predefinidas, lo que contribuye, además, a una apropiación más profunda de los conceptos. Además, el 97% de los estudiantes destacó como 'muy' o 'bastante' importante la guía docente en este proceso, lo que subraya la relevancia del rol del docente para proporcionar estructura y orientación. Aunque el aprendizaje colaborativo fomenta la participación activa, el rol del docente sigue siendo esencial para guiar la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. Los docentes, a través de sus interrogantes, orientaciones, estímulo del debate entre compañeros y fomento de la conceptualización, crean un ambiente que favorece la reflexión y el desarrollo del conocimiento, facilitando así una construcción significativa del aprendizaje.

(2) De las entrevistas

Las entrevistas ofrecieron una oportunidad para profundizar en los aspectos ya explorados en las encuestas, proporcionando una comprensión más detallada y enriquecida de las percepciones y experiencias de los estudiantes sobre la modalidad colaborativa. Además, durante las conversaciones emergieron nuevas dimensiones que no se habían contemplado en las encuestas, lo que agregó un valor significativo a este análisis exploratorio. Para organizar las opiniones de los estudiantes de manera clara y estructurada, estas fueron clasificadas en categorías según los temas recurrentes y áreas clave de interés reflejadas en sus respuestas. Este enfoque permitió identificar patrones y tendencias en sus perspectivas, brindando una visión organizada sobre cómo perciben la modalidad de trabajo. A continuación, se presentan las categorías resultantes.

1. Trabajo colaborativo y sinergia grupal

En todas las entrevistas, los estudiantes expresaron su aprecio por el trabajo en equipo, destacando cómo este facilitó tanto el aprendizaje como la vivencia de la cursada. Muchos resaltaron la importancia de contar con un grupo de apoyo y cómo, al complementarse con sus compañeros, pudieron avanzar de manera más efectiva. Como señaló un estudiante: *"Si no hubiese estado en este grupo, capaz no me hubiese ido tan bien. Y yo creo que eso fue en gran parte por las compañeras que tuve"*. Además, los estudiantes destacaron la oportunidad de compartir distintas perspectivas. Uno de ellos mencionó: *"Mirar tal vez un tema o algún ejercicio desde varias perspectivas, porque tal vez no todos lo entienden o lo harían de la misma manera. Tener la posibilidad de compartir con otras personas cómo lo harían ellos, ayuda"*. Estas percepciones sugieren que el trabajo colaborativo facilitó no solo la comprensión de los contenidos, sino también el sentimiento de apoyo y camaradería que hizo más llevadera la cursada.

2. Demanda de esfuerzo personal por parte de la modalidad y autonomía en el aprendizaje

En las entrevistas, los estudiantes destacaron que trabajar colaborativamente les permitió desarrollar una mayor autonomía en su proceso de aprendizaje. Esta percepción está en línea con los resultados de las encuestas, donde el 75% de los estudiantes indicó que la modalidad favoreció significativamente su autonomía de estudio.

A través de este enfoque activo, los estudiantes toman un rol más protagónico en su aprendizaje, gestionando su proceso de manera más independiente y reflexiva. En palabras de los propios estudiantes, la modalidad les "*obliga a pensar por nuestra cuenta"* y *" está bueno vos 'curtirte'... salir a buscar el contenido, a buscar los conocimientos un poco por tu cuenta".*

Si bien algunos estudiantes valoraron positivamente esta autonomía, lo que les permitió ser más activos y reflexivos, otros manifestaron que, al principio, la falta de explicaciones introductorias por parte del docente fue desconcertante, como indicó un estudiante: "*tenías ese doble esfuerzo de decir bueno, tengo que ponerme a pensar el doble en vez de que me lo den servido*". Esta transición hacia un aprendizaje más autónomo fue vista como un desafío por algunos. Sin embargo, la mayoría coincidió en que la modalidad, aunque exigente al principio, favorece la autorregulación y un aprendizaje más profundo a largo plazo. Como destacó otro estudiante: *"... te sirve para vos entender que tenés que sentarte a estudiar",* mientras que uno de sus compañeros aseveró*: "Nos obliga a pensar por nuestra cuenta".* En este sentido, los testimonios de los estudiantes están en línea con lo reflejado en las encuestas, donde más del 80% indicó que la modalidad les demandó un esfuerzo personal notable, subrayando la intensidad y la dedicación que requiere este enfoque.

(3) El Rol de los Docentes

En línea con lo obtenido en las encuestas, donde el 97% de los estudiantes considera *'muy'* o *'bastante'* importante la intervención docente en el proceso de aprendizaje, los testimonios obtenidos durante las entrevistas destacan la percepción de los estudiantes sobre el rol de los docentes como facilitadores en la construcción colaborativa del conocimiento. En este sentido, un estudiante expresó: *"Los profesores cumplen su función de ayudarte a comprender. Ayudarte a comprender: no te dicen la respuesta, sino que te ayudan a comprender".* Otros dos estudiantes añadieron: *"La guía de los profesores fue clave para mí"* y *"Los profes se ponían en nuestro lugar y como que nos explicaban muy a fondo"*, lo que refleja la cercanía y empatía de los docentes. Además, los estudiantes valoraron la paciencia de los docentes al tomarse el tiempo necesario para asegurar que los contenidos fueran comprendidos, como expresó uno de ellos: *"Se aseguraban de pasar el tiempo suficiente, de no apurarse para explicar algo."* Este tipo de enseñanza favorece no solo la comprensión, sino también un ambiente más ameno y propicio para la construcción de conocimientos, en el cual los estudiantes pueden participar activamente en su propio proceso de aprendizaje. Como fue mencionado en el análisis de las encuestas, aunque la modalidad fomenta la participación activa de los estudiantes, los docentes siguen siendo fundamentales para estructurar, orientar y promover la reflexión. Las percepciones de los estudiantes sugieren que el estilo de enseñanza de los docentes se alineó de manera efectiva con las necesidades y el proceso de aprendizaje de los estudiantes, creando un entorno favorable para la construcción de conocimiento de forma colaborativa.

(4) Adaptación a la forma de trabajo

Algunos estudiantes expresaron que les resultó desafiante adaptarse a la modalidad de trabajo durante las primeras clases, aunque finalmente lograron una adaptación satisfactoria. Como comentó uno de ellos: *"Bueno, al principio costó. Pero después sí, lo fuimos llevando bien".* Otro estudiante mencionó: *"A mí al principio me parecía medio raro lo de que sea tan así preguntar en la mesa, o sea, que cada uno tenga que preguntar y no todo el tiempo enfrente de todos en la clase, digamos. [...] Pero después [...], al final me gustó".* Estos testimonios muestran que, aunque hubo dificultades iniciales, los estudiantes fueron capaces de superar el desajuste entre sus expectativas previas y la modalidad de trabajo.

Por otro lado, la discrepancia entre las expectativas de los estudiantes y la modalidad colaborativa también puede entenderse a través del concepto de "desacople" que describen Taub y Castillo (2014). Según los autores, este desajuste se debe a las diferencias entre las experiencias previas de los estudiantes y las nuevas demandas pedagógicas, que requieren una mayor participación activa y esfuerzo autónomo. En este sentido, algunos estudiantes manifestaron una preferencia por clases más tradicionales con una exposición más estructurada por parte del docente. Como menciona un estudiante: "Que den primero explicación y después pasamos a resolver el libro", hecho que refleja una resistencia a este enfoque más autónomo.

(5) Adaptación al ritmo universitario y los hábitos de estudio

Un tema recurrente en las entrevistas fue la diferencia notable entre el ritmo de trabajo universitario y el que los estudiantes experimentaban en la escuela secundaria. Como estudiantes de primer año, se encuentran en el proceso de afiliación a la vida universitaria, lo que incluye ajustar su ritmo estudio. Varios mencionaron que el curso de la materia les resultó significativamente más acelerado. Uno de ellos expresó: *"Me complicó un poco el ritmo tan acelerado de la materia"*, lo que evidencia el desafío de adaptarse a un sistema educativo con mayores exigencias, no solo en la cantidad de contenidos como en la rapidez con la que deben ser abordados.

Asimismo, varios estudiantes coincidieron en que, a diferencia de la secundaria, la universidad requiere un compromiso mucho más constante. Tal como señaló uno de ellos: *"Por ahí el ritmo... de pasar del cole, estar más tranquilo y después acá todos los días tarea, tarea, tarea"*, lo que ilustra el ajuste necesario para gestionar nuevas responsabilidades y tareas diarias. Este cambio implica la necesidad de desarrollar nuevos hábitos de estudio para poder seguir el ritmo universitario, un desafío común entre los estudiantes que provienen de entornos educativos en los que las demandas de autonomía y el ritmo de trabajo son menores.

Conclusiones

Las exploraciones realizadas en este estudio permiten reflexionar sobre el impacto del trabajo colaborativo en la formación de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial de la FI de la UNLP. A partir del análisis de las respuestas y experiencias relatadas por los estudiantes, se observa que esta modalidad favorece el aprendizaje significado, promoviendo la interacción y el intercambio de conocimientos. Trabajar colaborativamente no solo facilitó la comprensión de los contenidos, sino que también contribuyó a la construcción de un entorno de aprendizaje dinámico y enriquecedor, donde los estudiantes manifestaron sentirse acompañados y motivados. Asimismo, a partir de los testimonios recogidos, se advierte que el trabajo colaborativo impulsó un mayor nivel de autonomía en los estudiantes, desafiándolos a asumir un rol más activo en su proceso de aprendizaje. Si bien para algunos esta modalidad representó un desafío inicial, especialmente por la menor intervención directa del docente, con el tiempo muchos reconocieron que les permitió desarrollar mayor independencia y estrategias para resolver problemas de manera autónoma. No obstante, varios estudiantes señalaron que esta forma de trabajo requiere un alto nivel de compromiso y esfuerzo, lo que puede dificultar la adaptación de quienes no están acostumbrados a asumir un rol activo en su formación.

En cuanto al rol docente, los estudiantes resaltaron su importancia como facilitador del aprendizaje, enfatizando que su intervención fue clave para guiar el proceso sin imponer respuestas directas. Los resultados evidencian que la orientación brindada a través de preguntas y reflexiones ayudó a estimular el pensamiento crítico y a reforzar la apropiación de los conocimientos.

Finalmente, los testimonios analizados sugieren que esta metodología no solo fortaleció el desarrollo de habilidades cognitivas y académicas, sino que también potenció competencias interpersonales, como el trabajo en equipo, la comunicación y la autogestión del aprendizaje.

A partir de estos hallazgos, se considera pertinente continuar explorando estrategias que faciliten la adaptación de los estudiantes a esta modalidad, así como profundizar en el análisis de su impacto a largo plazo. Además, futuras exploraciones podrían indagar en las percepciones de los docentes de la cátedra respecto de la modalidad colaborativa y en cómo articulan sus prácticas para favorecer el aprendizaje en este contexto.

Referencias Bibliográficas

Filgueira Arias, C., y Gherab Martin, K. (2020). Aprendizaje en trabajo colaborativo: La coevaluación a través de la revisión colaborativa. *EDU REVIEW. International Education and Learning Review. Revista Internacional de Educación y Aprendizaje, 8*(3), 135–141. https://doi.org/10.37467/gka-revedu.v8.2702

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación.* McGraw-Hill Interamericana.

Maldonado Pérez, M. (2007). El trabajo colaborativo en el aula universitaria. *Laurus, 13*(23), 263–278.

Maldonado Pérez, M. y Sánchez, T. (2012). Trabajo colaborativo en el aula: Experiencias desde la formación docente. *Revista EDUCARE, 16*(2).

Ramírez, E. y Rojas, R. (2014). El trabajo colaborativo como estrategia para construir conocimientos. *Revista Virajes, 16*(1). Universidad de Caldas.

Roselli, N. (2016). El aprendizaje colaborativo: Bases teóricas y estrategias aplicables en la enseñanza universitaria. *Propósitos y Representaciones, 4*(1), 219–280. https://doi.org/10.20511/pyr2016.v4n1.90

Semento, T. (2024). *Un relevamiento sobre las percepciones de estudiantes de Matemática A acerca de la metodología aula-taller utilizada en la materia.* http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/170170

Taub, J. y Castillo, L. (2014). La modalidad de taller en el aula universitaria. *VIII Congreso Iberoamericano de Docencia Universitaria y de Nivel Superior*, Facultad de Humanidades y Artes, Universidad Nacional de Rosario, Argentina. https://www.aidu-asociacion.org/wp-content/uploads/2020/02/CIDU-Rosario-376.pdf

Tonon, G. (2012). Reflexiones latinoamericanas sobre investigación cualitativa. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud.* https://revistaumanizales.cinde.org.co/rlcsnj/index.php/RevistaLatinoamericana/article/view/606

Aprendizaje colaborativo en la enseñanza de Matemática en entornos virtuales en el primer año universitario

Marisa REID, Rosana BOTTA GIODA
Universidad de La Pampa, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.
Uruguay 151. Santa Rosa. La Pampa (Argentina)
mareid@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen

Este trabajo analiza el impacto del aprendizaje colaborativo en entornos virtuales en la enseñanza de la actividad curricular Cálculo I/ Matemática I/ Análisis Matemático I, que se dicta para estudiantes de primer año de las carreras de Licenciatura en Geología, Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura en Química, y Profesorado y Licenciatura en Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa (UNLPam).

Para fomentar la participación activa y el trabajo en equipo, se implementaron estrategias de comunicación asincrónica basadas en foros en el aula virtual y documentos colaborativos de Google. Los foros permitieron la resolución grupal de problemas matemáticos mediante el intercambio de ideas y la construcción colectiva del conocimiento. Los documentos de Google facilitaron el desarrollo estructurado de soluciones conjuntas. Por otro lado, GeoGebra, como herramienta para la representación gráfica de funciones contribuyó al análisis visual de funciones, favoreciendo la comprensión de conceptos clave.

Los resultados evidencian que estas estrategias no solo mejoraron la comprensión conceptual, sino que también promovieron habilidades colaborativas fundamentales para la formación profesional. Sin embargo, se identifican desafíos en la coordinación de tiempos para la participación asincrónica y en el manejo eficiente de las herramientas digitales. Estos hallazgos resaltan la importancia de optimizar los formatos de trabajo y brindar soporte técnico adecuado para maximizar los beneficios del aprendizaje colaborativo en entornos virtuales.

Palabras clave: Educación Superior. Matemática. Comunicación Asincrónica. Resolución de Problemas. Aprendizaje Colaborativo.

Introducción

La transición de la enseñanza secundaria a la universitaria supone un desafío significativo para los estudiantes, especialmente en asignaturas como Cálculo I/Matemática I/Análisis Matemático I, de primer año común a las carreras de Licenciatura en Geología, Ingeniería en Recursos Naturales y Medio Ambiente, Licenciatura en Química, y Licenciatura y Profesorado en Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam. Esta actividad curricular requiere no solo el desarrollo de habilidades abstractas, sino también una comprensión profunda de conceptos matemáticos

En el contexto actual de la educación universitaria, la integración de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) se ha vuelto esencial para mediar y enriquecer las prácticas de enseñanza y aprendizaje. La enseñanza de la Matemática enfrenta el reto de articular componentes presenciales y virtuales, promoviendo competencias clave como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el trabajo colaborativo.

La teoría sociocultural de Vygotsky (1978) y el conectivismo de Siemens (2004) proporcionan un marco teórico que sustenta la importancia de las interacciones sociales y las conexiones digitales en el proceso de aprendizaje. La problemática de la deserción estudiantil, especialmente en los primeros años de la universidad, refuerza la necesidad de diseñar propuestas pedagógicas que fomenten la integración y fortalezcan el sentido de pertenencia de los estudiantes.

El ingreso a la universidad implica adaptarse a un ritmo de estudio más autónomo, a la abstracción teórica y a metodologías de evaluación más exigentes. En Matemática, estas dificultades se intensifican debido a la necesidad de reforzar conocimientos previos, abordar conceptos avanzados y utilizar herramientas digitales que no siempre forman parte de la formación secundaria. Por ello, resulta fundamental generar espacios de acompañamiento y colaboración que faciliten una integración académica.

El aprendizaje colaborativo es un enfoque educativo basado en la interacción entre los/as estudiantes, quienes trabajan juntos para construir conocimiento de manera conjunta. Scagnoli (2006) lo define como:

"la instancia de aprendizaje que se concreta mediante la participación de dos o más individuos en la búsqueda de información, o en la exploración tendiente a lograr una mejor comprensión o entendimiento compartido de un concepto, problema o situación" (p.39).

A diferencia del trabajo en grupo, donde las tareas pueden dividirse en partes independientes, la colaboración implica una construcción colectiva del conocimiento con roles dinámicos y una toma de decisiones compartida (Marquès Graells, 2012). Esta modalidad promueve la interdependencia positiva, el intercambio de ideas y el desarrollo de habilidades cognitivas y sociales, generando un aprendizaje más profundo y significativo (Cabero Almenara, 2003; Barkley et al., 2012).

Este trabajo explora el uso de estrategias colaborativas asincrónicas en la enseñanza de Cálculo I/Matemática I/Análisis Matemático I y evalúa su impacto en el desarrollo del aprendizaje matemático en estudiantes de primer año.

Metodología

Se adoptó un enfoque cualitativo-descriptivo, centrado en el análisis de las interacciones y producciones generadas por los estudiantes en estos entornos virtuales. La evaluación de la participación estudiantil y la calidad de las interacciones se realizó mediante la observación de registros digitales y la aplicación de encuestas a los docentes-tutores, permitiendo así una caracterización detallada del proceso de aprendizaje colaborativo.

Intervención Pedagógica

La propuesta implementada en Cálculo I/Matemática I/Análisis Matemático I buscó fomentar la colaboración asincrónica en la resolución de problemas matemáticos a través de entornos virtuales. Para ello, se habilitaron espacios de trabajo grupales en Moodle y se integraron recursos digitales diseñados para facilitar la interacción y la construcción compartida del conocimiento.

Las actividades, diseñadas para motivar y desafiar al estudiantado, fueron abordadas con herramientas como foros y documentos colaborativos, fomentando la comunicación y el trabajo conjunto. Se plantean situaciones problemáticas, diseñadas para desarrollar competencias genéricas, transversales y específicas de la materia. Cada grupo trabaja con una actividad diferente, abordando la resolución del problema mediante el análisis y discusión de soluciones fundamentadas en conceptos teóricos. La selección de TIC priorizó la accesibilidad, ubicuidad y la posibilidad de registrar y analizar los procesos.

Con el propósito de fortalecer el aprendizaje colaborativo, se conformaron grupos de hasta tres estudiantes, quienes trabajaron de manera conjunta en actividades diseñadas para favorecer la construcción del conocimiento y la interacción académica. La conformación de los grupos tuvo en cuenta las preferencias de los estudiantes (**Figura 1**), a fin de optimizar la dinámica colaborativa y fomentar un ambiente de trabajo efectivo.

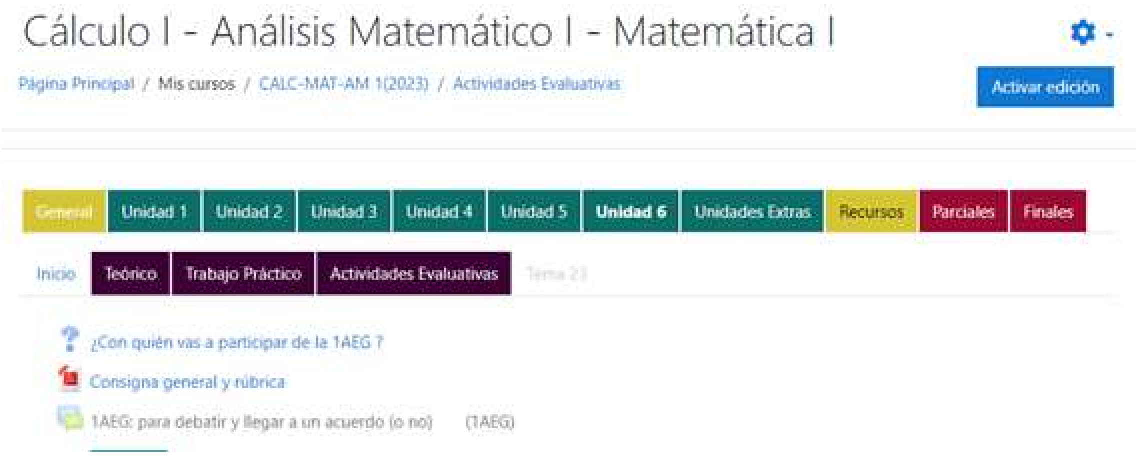


Figura 1. Consulta de grupos en el aula virtual

Cada grupo contó con el seguimiento y acompañamiento de los docentes del equipo de cátedra, quienes proporcionaron retroalimentación continua a lo largo del proceso. Esta estrategia evidenció que un diseño didáctico cuidadoso y flexible favorece la colaboración genuina y el desarrollo de competencias matemáticas en entornos digitales.

En este marco, se implementaron actividades de resolución de problemas en Cálculo Diferencial, utilizando foros virtuales como espacio de discusión y análisis, y en Cálculo Diferencial e Integral, mediante documentos colaborativos en Google Docs, lo que permitió documentar y evaluar el proceso de aprendizaje de manera estructurada.

Trabajo grupal en foros del aula virtual

En el marco de la enseñanza de la Matemática, se implementó el uso de foros en la plataforma Moodle como estrategia para fomentar el aprendizaje colaborativo en la resolución de problemas. Esta herramienta permitió a los estudiantes trabajar en grupo, compartir avances y brindar retroalimentación en un entorno asincrónico y estructurado.

Los foros constituyen un ambiente de aprendizaje que posibilita al alumnado el intercambio de información, la adquisición de conocimientos y mejorar su interacción social mediante la comunicación de reflexiones e ideas (Burnett, 2000, como se citó en García-Vargas et al. 2022).

Se emplean dos tipos de foros: uno de uso general, denominado "Consultas generales", y otro de preguntas y respuestas, organizado en "Oficinas de trabajo en línea". Esta designación se basa en la metáfora propuesta por Schwartzman et al. (2010).

La elección de los foros grupales respondió a su capacidad para facilitar la interacción entre pares y garantizar un seguimiento claro de las intervenciones. Estos espacios privados posibilitaron el trabajo conjunto sin que las intervenciones fueran visibles para otros grupos, promoviendo un ambiente seguro y focalizado. Además, cada estudiante sólo puede acceder a las respuestas de sus compañeros una vez que ha enviado su propia contribución, lo que incentivó la participación activa y reflexiva.

Cada foro contó con una descripción clara que orientaba a los estudiantes sobre su propósito y normas de intervención. En la fase inicial de la actividad, se presentaron los objetivos, la modalidad de trabajo, las recomendaciones para la interacción y los criterios de evaluación. Posteriormente, los grupos recibieron una situación problemática que debían resolver en un tiempo determinado, abordando conceptos como variables, dominios, derivadas y análisis de modelos. Se enfatizó la importancia de integrar los conocimientos individuales con el análisis de las aportaciones de los demás integrantes.

El nivel de participación de los estudiantes fue heterogéneo. Se observó que algunos grupos mostraron una alta interacción y compromiso, mientras que otros presentaron una participación más limitada (**Figura 2**). El seguimiento del tutor permitió evaluar tanto la cantidad como la calidad de los intercambios. Los grupos con mayor nivel de interacción reflejaron la lectura y consideración de los aportes de los demás, mientras que aquellos que dividieron las tareas sin una articulación posterior generarán respuestas fragmentadas y con menor cohesión.

Figura 2. Ejemplo de cantidad de intercambios en los foros

Uno de los principales desafíos identificados fue la comunicación escrita en Matemática, debido a las dificultades para representar símbolos y expresiones en el foro. Estas limitaciones generaron malentendidos y evidenciaron la necesidad de emplear herramientas adecuadas para la escritura matemática en entornos digitales.

El uso de software matemático como GeoGebra (**Figura 3**), enriqueció el análisis y permitió la inclusión de representaciones gráficas en las discusiones.

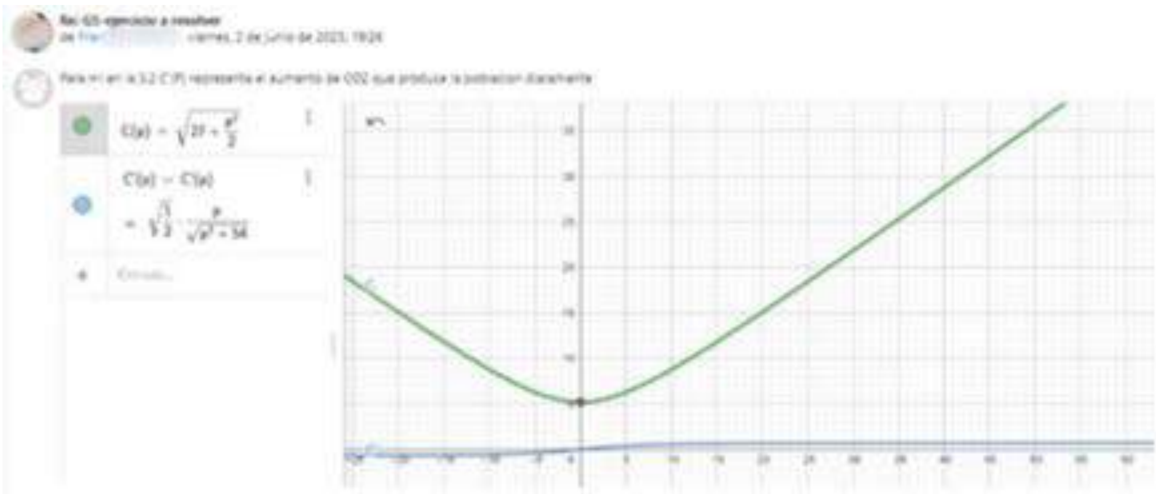


Figura 3. Uso de software GeoGebra en el intercambio de uno de los grupos de trabajo

Sin embargo, también surgieron dificultades técnicas, especialmente en la carga de imágenes debido al tamaño de los archivos y problemas de conectividad. Para mitigar estos inconvenientes, se recomendó reducir el peso de los archivos y buscar mejores condiciones de conexión.

El rol del tutor fue fundamental para guiar la actividad y evaluar la construcción colectiva del conocimiento. Su intervención incluyó el planteo de preguntas orientadoras en los foros, el envío de mensajes individuales para motivar la participación, la retroalimentación detallada sobre los aportes realizados y la organización de encuentros virtuales para clarificar conceptos matemáticos.

Las entrevistas semiestructuradas realizadas a los docentes tutores confirmaron los beneficios y desafíos de esta experiencia. Entre los aspectos positivos se mencionó el intercambio de ideas, la interacción entre pares y la flexibilidad que ofrece el entorno virtual. Un docente comentó: “El trabajo en foros posibilitó que los estudiantes expresaran sus dudas y construyeran respuestas conjuntas, enriqueciendo el proceso de aprendizaje”.

Sin embargo, también se señalaron dificultades, como la gestión de la actividad, el compromiso desigual de los estudiantes y los problemas técnicos.

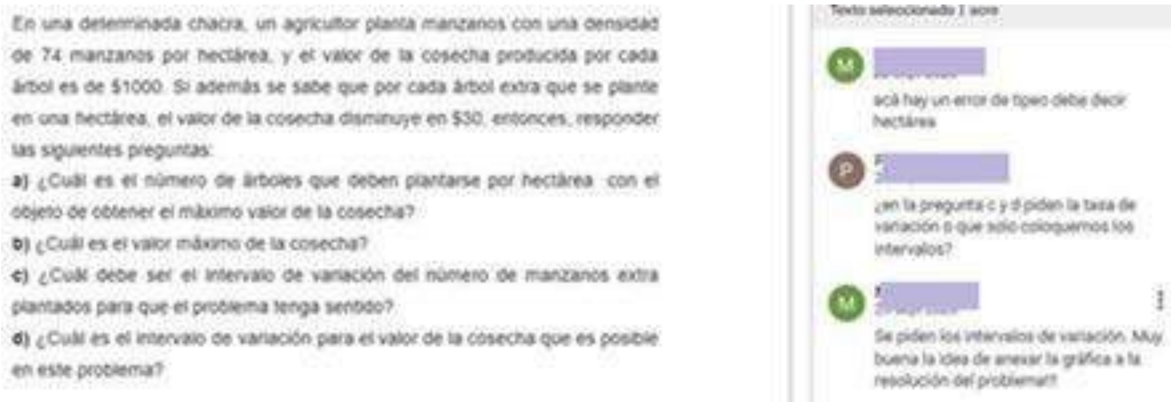
Los resultados obtenidos sugieren que el trabajo en foros virtuales puede potenciar el aprendizaje en Matemática, siempre que se implementen estrategias que fomenten una participación equitativa y se optimicen los mecanismos de comunicación y evaluación. En conclusión, los foros en Moodle han demostrado ser una herramienta valiosa para la resolución colaborativa de problemas matemáticos, promoviendo la interacción, el aprendizaje significativo y el uso de recursos digitales. No obstante, es fundamental atender las dificultades técnicas y diseñar estrategias que fortalezcan la cohesión y el compromiso grupal, garantizando una participación efectiva y una construcción colectiva del conocimiento.

Trabajo grupal en documentos de texto de Google

La actividad se organizó a través de un foro grupal en Moodle, donde se describe el objetivo, el tiempo estimado y se comparte el enlace al documento colaborativo. Los estudiantes interactúan exclusivamente a través del chat del documento y el foro del aula virtual, centralizando así los intercambios y permitiendo un seguimiento detallado del proceso.
Se implementó el uso de Documentos de Google para que los estudiantes desarrollen soluciones detalladas en grupo, favoreciendo la interacción y el aprendizaje entre pares.
Esta plataforma fue seleccionada por su accesibilidad, facilidad de uso y capacidad para la edición en tiempo real, permitiendo la inclusión de texto, imágenes, tablas y gráficos, elementos fundamentales en la resolución de problemas matemáticos. Aunque la inserción de notación matemática puede representar un desafío, es posible abordarlo mediante complementos específicos o el uso de editores externos como LaTeX, a pesar de su complejidad para estudiantes principiantes.
El trabajo en grupo se estructura en dos fases: una inicial de exploración, basada en los conocimientos previos, y una posterior de profundización, que incluye representaciones visuales como figuras, gráficos o esquemas. Estas representaciones ayudan a identificar restricciones y analizar las condiciones del problema. Además, los estudiantes pueden integrar imágenes de GeoGebra para ilustrar conceptos matemáticos.
Para profundizar en la comprensión del problema, resulta útil dibujar una representación visual, como una figura, gráfico o esquema, que contribuya a visualizar la situación con los datos y variables pertinentes. Esta acción también simplifica la identificación de posibles restricciones o condiciones contextuales que puedan limitar los valores de las variables más allá de las consideraciones puramente algebraicas asociadas al caso.
En la **Figura 4** se presenta el esquema realizado por uno de los grupos durante la resolución de la situación problemática.

Figura 4. Ejemplo de esquema o imagen sobre una situación problemática

El historial de revisiones facilita el seguimiento del proceso de trabajo y la evolución de las discusiones. Se puede ver el proceso de pensamiento de cada participante mientras trabajan y ayudarlos a volver a encaminarse si se sienten desconcertados o no están seguros de cómo proceder con un problema en particular, como se muestra en la **Figura 5**:


En una determinada chacra, un agricultor planta manzanos con una densidad de 74 manzanos por hectárea, y el valor de la cosecha producida por cada árbol es de $1000. Si además se sabe que por cada árbol extra que se plante en una hectárea, el valor de la cosecha disminuye en $30, entonces, responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el número de árboles que deben plantarse por hectárea con el objeto de obtener el máximo valor de la cosecha?

b) ¿Cuál es el valor máximo de la cosecha?

c) ¿Cuál debe ser el intervalo de variación del número de manzanos extra plantados para que el problema tenga sentido?

d) ¿Cuál es el intervalo de variación para el valor de la cosecha que es posible en este problema?

Texto seleccionado 1 acre

M

acá hay un error de tipeo debe decir hectárea

P

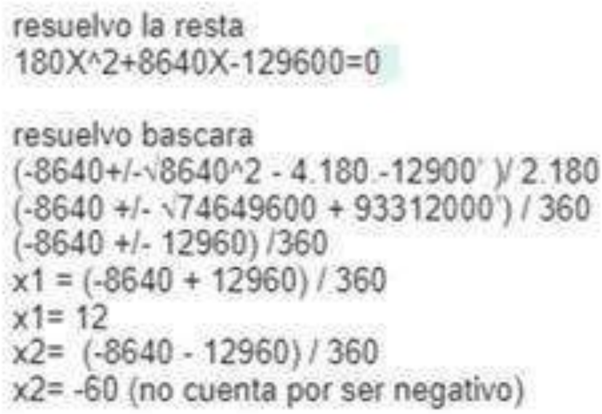
¿en la pregunta c y d piden la tasa de variación o que solo coloquemos los intervalos?

M

Se piden los intervalos de variación. Muy buena la idea de anexar la gráfica a la resolución del problema!!

Figura 5. Orientación de la tutora de uno de los grupos

La notación matemática en documentos compartidos puede no ser tan intuitiva como en un entorno físico o en papel. Se pueden enfrentar dificultades al insertar símbolos matemáticos específicos o al escribir ecuaciones, lo que podría afectar la claridad y la expresión precisa de conceptos matemáticos. Esta situación se ilustra en la Figura 6 de una intervención realizada en un grupo.


resuelvo la resta
180X^2+8640X-129600=0

resuelvo bascara
(-8640+/-√8640^2 - 4.180.-12900)/ 2.180
(-8640 +/- √74649600 + 93312000) / 360
(-8640 +/- 12960) /360
x1 = (-8640 + 12960) / 360
x1= 12
x2= (-8640 - 12960) / 360
x2= -60 (no cuenta por ser negativo)

Figura 6. Uso de notación matemática en un grupo de trabajo

Sin embargo, algunos optan por resolver los ejercicios en papel y luego subir imágenes de su trabajo debido a las dificultades para escribir notación matemática en el documento. Este obstáculo podría mitigarse con tutoriales previos, el uso de complementos especializados y la práctica guiada.

Para evaluar la experiencia, se realizaron entrevistas a tutores, quienes destacaron la flexibilidad horaria y la posibilidad de visualizar el pensamiento compartido como aspectos positivos. Una de las personas entrevistadas afirma:

"Un aspecto a destacar de este tipo de tareas colaborativas por Google es el ambiente distendido en el que se realiza, ya que cada uno puede hacerlo en el momento del día que desee, así como coordinar reuniones con compañeros en horarios flexibles y cómodos para todos".

Entre las principales dificultades señaladas se encuentran la inserción de notación matemática, la conectividad y la organización del trabajo en grupo.

El uso de Documentos de Google en actividades colaborativas de Matemática promueve la interacción y el aprendizaje entre pares. No obstante, su implementación requiere estrategias que minimicen las dificultades tecnológicas y favorezcan una participación equitativa. La adaptabilidad y el seguimiento continuo son claves para el éxito de estas experiencias en entornos educativos virtuales.

Conclusiones

El aprendizaje colaborativo mediado por tecnología en entornos virtuales demostró ser una estrategia efectiva para la enseñanza de Cálculo I/Matemática I/Análisis Matemático I en el primer año universitario. La integración de foros, documentos de Google y GeoGebra facilitó la comprensión de conceptos matemáticos,

promovió el trabajo en equipo y fortaleció el uso de herramientas digitales esenciales para la formación académica y profesional.
Los foros en Moodle resultaron fundamentales para el intercambio de ideas y la resolución conjunta de problemas, aunque algunos estudiantes encuentran dificultades en la coordinación de tiempos y la representación simbólica en formato digital. La supervisión constante del tutor fue clave para mantener la calidad de las intervenciones y fomentar la participación.
El uso de Google Docs permitió estructurar mejor el trabajo colaborativo, favoreciendo la resolución de problemas de Cálculo Diferencial e Integral de manera asincrónica y en tiempo real. Sin embargo, algunos estudiantes señalan la necesidad de mayor capacitación en su uso.
La implementación de GeoGebra contribuyó significativamente a la comprensión de conceptos vinculados al Cálculo Diferencial e Integral, al ofrecer una visualización dinámica de las funciones.
En síntesis, la combinación de herramientas digitales amplió las estrategias de enseñanza, mejoró el aprendizaje colaborativo y evidenció la importancia de optimizar los formatos de trabajo y brindar soporte técnico continuo. Esta experiencia reafirma la necesidad de seguir explorando dinámicas asincrónicas efectivas para la resolución de problemas matemáticos en entornos virtuales.

Referencias Bibliográficas

Barkley, E., Cross, P., y Howell, C. (2012). *Técnicas de aprendizaje colaborativo: Manual para el profesorado universitario* (2.ª ed.). Ediciones Morata.
Cabero Almenara, J. (2003). Principios pedagógicos, psicológicos y sociológicos del trabajo colaborativo su proyección en la tele enseñanza. En *Redes de comunicación en la enseñanza: Las nuevas perspectivas del trabajo corporativo* (pp. 129-156). Paidós.
García-Vargas, S. M., Porta-Antón, M. de los Á., Oriol-Hernández, S., y Biurrun-Moreno, A. C. (2022). Los foros de debate asíncronos: Herramienta reflexiva en las prácticas formativas. *Revista Practicum*, *7*(2), Article 2. https://doi.org/10.24310/RevPracticumrep.v7i2.15110
Marquès Graells, P. R. (2012). Modelos didácticos de aprendizaje en grupo y aprendizaje colaborativo con TIC. *Comunicación y Pedagogía: nuevas tecnologías y recursos didácticos*, 26-29.
Scagnoli, M. N. I. (2006). *El Aprendizaje Colaborativo en Cursos a Distancia*.
Schwartzman, G., Trech, M., y Tarasow, F. (2010). *Oficinas de trabajo en línea: Metáfora y estrategia para la construcción de conocimiento y colaboración entre pares.*
Siemens, G. (2004). *Connectivism: A Learning Theory for the Digital Age*.
Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Harvard University Press; JSTOR. https://doi.org/10.2307/j.ctvjf9vz4

Desafíos y Expectativas en la Articulación Curricular de Matemática entre la escuela secundaria y las carreras de ingeniería de la Universidad de Morón: Un Estudio de Campo

Claudia MARCOVECCHIO, Sandra Beatriz SANTACHITA
Universidad de Morón
Machado 854, Morón, Buenos Aires, Argentina
claumar_arq@hotmail.com, sbsanta@live.com.ar

Resumen

El artículo aborda las dificultades académicas en matemáticas que enfrentan los estudiantes del último año de la secundaria al ingresar al primer año de ingeniería en la Universidad de Morón. En particular, se analiza la desconexión entre la formación matemática en la educación secundaria y las exigencias de las carreras de ingeniería. Este desajuste genera una brecha en el rendimiento académico de los estudiantes, que afecta su desempeño desde el inicio de la universidad.
Se identifican varias causas de esta problemática, entre las que destacan la falta de una articulación curricular adecuada entre los niveles educativo y superior, lo que impide una transición fluida. Además, las expectativas de los estudiantes de secundaria y los del primer año de ingeniería no coinciden, lo que genera confusión y dificultades en el proceso de aprendizaje.
Se propone una mayor colaboración entre docentes de secundaria y universidad, con la implementación de estrategias pedagógicas innovadoras y el uso de tecnologías para mejorar la formación matemática de los estudiantes. Crear espacios de intercambio docente y diseñar estrategias educativas flexibles son esenciales para reducir la brecha y optimizar la transición hacia la educación superior.
El trabajo realizado también sugiere organizar talleres de actualización docente y promover redes de conocimiento interinstitucionales para fortalecer el vínculo entre los niveles educativos. Una articulación efectiva garantizaría una educación de calidad, favoreciendo no solo el rendimiento académico en matemáticas, sino también el éxito de los estudiantes en su carrera profesional.

Palabras clave: Articulación. Estudiantes. Docentes. Matemática. Secundaria. Universidad.

Introducción

Este artículo que se presenta surge de un proyecto realizado por docentes de la Universidad de Morón en el marco de la articulación de la Escuela Superior de Ingeniería, Informática y Ciencias Agroalimentarias con la Escuela Secundaria, dada las dificultades académicas que se detectan en el área de matemática de los estudiantes del último año de la secundaria al ingreso de 1º año de las carreras de ingeniería.
Es así que cobra importancia la articulación secundaria-superior, y en particular la articulación curricular del área de matemática, en cuanto a las trayectorias educativas de los estudiantes de un nivel al otro. En este contexto, se consideró realizar un estudio para analizar las dificultades, perspectivas y expectativas de los estudiantes del último año de la secundaria y del 1° año de una carrera de ingeniería en el área de matemática de la Universidad de Morón.
Vale considerar algunos antecedentes relevantes sobre la articulación entre la educación secundaria y la educación superior, especialmente en el área de matemáticas y en el contexto de carreras de ingeniería, que se mencionan a continuación:
La Universidad de Morón, desde hace más de 25 años viene realizando estudios e investigaciones sistemáticas sobre los procesos de articulación de las instituciones educativas de nivel medio y superior terciario con la Universidad; en proyectos similares, ha identificado que uno de los principales obstáculos para los estudiantes de ingeniería es la brecha de conocimientos previos en matemáticas, lo que influye negativamente en su desempeño en los primeros cursos de la carrera. Esta universidad ha propuesto estrategias para reforzar las competencias matemáticas de los estudiantes, como el diseño de cursos puente que refuercen los conocimientos matemáticos necesarios para la ingeniería (González et al., 2021). Además de acuerdos de articulación curricular con instituciones superiores terciarias para la prosecución de estudios y acuerdos de colaboración y cooperación con escuelas para asesoramiento, asistencia técnica, actividades conjuntas de capacitación y perfeccionamiento, intercambio docente, utilización de equipamiento e infraestructura (Cozza, E. N., & Santachita, S, 2010).
Por otro lado, investigaciones realizadas en países de América Latina, como Colombia y México, señalan que los estudiantes de ingeniería a menudo enfrentan dificultades en áreas fundamentales de las matemáticas, debido a una deficiente articulación curricular entre la educación secundaria y la universitaria. Estos estudios han subrayado la importancia de los programas de refuerzo o acompañamiento en matemáticas, así como la colaboración entre las instituciones educativas de ambos niveles.
Diversos estudios han destacado que una de las principales dificultades de los estudiantes al ingresar a la universidad es la falta de una adecuada preparación matemática en la secundaria. En países como Argentina, los estudios de la UNESCO han mostrado que existen grandes disparidades entre lo que se enseña en la secundaria y lo que se espera de los estudiantes en la educación superior (UNESCO, 2012). Estas brechas afectan principalmente a las disciplinas técnicas y científicas, como las ingenierías.
Asimismo, varios estudios han demostrado que la falta de preparación adecuada en matemáticas es una de las principales causas del fracaso en el primer año de las carreras de ingeniería. Según un informe de la (Universidad Nacional Autónoma de México, Rodríguez, F. S.,2023), los estudiantes que ingresan a las carreras de ingeniería presentan dificultades en álgebra, geometría y cálculo, que son esenciales para las materias del primer año.
En diversas universidades de América Latina, se han implementado proyectos conjuntos entre docentes de secundaria y educación superior con el fin de mejorar la transición de los estudiantes. En un estudio realizado en Chile, (Superior, E., & de, E. I. D. R, 2019) encontraron que la colaboración entre los docentes de secundaria y los de la universidad en el área de matemáticas ha logrado reducir las brechas entre ambos niveles, especialmente cuando se alinean los contenidos curriculares y se comparten estrategias pedagógicas.
En España, el Ministerio de Educación ha desarrollado varias iniciativas que promueven la colaboración entre las instituciones de secundaria y las universidades para mejorar el rendimiento de los estudiantes en las materias científicas y matemáticas. Uno de los enfoques más comunes es la creación de programas de refuerzo y cursos de nivelación para los estudiantes que muestran debilidades en matemáticas al inicio de su carrera universitaria (Ministerio de Educación y Formación Profesional, 2013).
Modelos de evaluación continua y tutorías personalizadas: Un modelo que ha mostrado resultados positivos en algunos estudios es el de evaluación continua y la implementación de tutorías personalizadas desde el primer año de la carrera. En universidades como la Universidad Politécnica de Valencia (España), se ha implementado un modelo en el que los estudiantes reciben apoyo continuo en áreas como matemáticas y física, lo que les permite adaptarse mejor a las exigencias de la ingeniería (Celada, V. L., & Lattuada, M. (2018).
Investigaciones realizadas en México y Argentina muestran que los estudiantes de ingeniería suelen sentirse poco preparados en las matemáticas al ingresar a la universidad, especialmente en los temas de álgebra y

cálculo (Enríquez Felipe, W. F. (2019). Los estudiantes identifican una gran desconexión entre lo que se enseña en la secundaria y lo que se requiere en la universidad.
Un estudio llevado a cabo en Chile por (Reyes Rodríguez, A. D., Steger, G. E., Ruiz Lugo, M., Vargas Amézquita, S. L., Palacios Vanegas, H. F., & Iglesias Ortega, E., 2021). encontró que los docentes de secundaria a menudo no están suficientemente preparados para abordar las necesidades matemáticas de los estudiantes que posteriormente ingresan a carreras de ingeniería. Esto resalta la importancia de fortalecer la formación continua de los docentes de matemática y promover espacios de colaboración con docentes universitarios.
Es así que, los estudios muestran que una articulación insuficiente entre la educación secundaria y superior, especialmente en el área de matemáticas, es un factor crítico que afecta el rendimiento de los estudiantes en las carreras de ingeniería. La falta de una base sólida en matemáticas en la secundaria puede generar dificultades académicas que afectan negativamente el desempeño en los primeros años de la universidad. Además, se señala que la colaboración interinstitucional y la adaptación de los programas de enseñanza son esenciales para mejorar la transición y el rendimiento de los estudiantes en áreas técnicas y científicas.
Sin embargo, se observa que los estudiantes del último año de la secundaria enfrentan dificultades significativas en el área de matemática que afectan su desempeño académico en el primer año de ingeniería.
Y si bien se han intentado estrategias de articulación entre la secundaria y la universidad en el área de matemáticas, no parece cubrir adecuadamente las expectativas y necesidades de los estudiantes, lo que contribuye a las dificultades que enfrentan al ingresar a la carrera de ingeniería.
Por otro lado, se evidencia que las expectativas y perspectivas de los estudiantes del último año de la secundaria y los del primer año de ingeniería en cuanto a la formación matemática están desconectadas, lo que genera una brecha en la preparación de los estudiantes para las demandas de la carrera.
Y, por último, se supone que un enfoque más colaborativo entre los docentes de secundaria y de la universidad, junto con una revisión y adaptación de los contenidos curriculares, podría mejorar la transición matemática de los estudiantes y reducir las dificultades académicas.
En ese sentido el equipo de trabajo se propuso identificar las dificultades académicas que enfrentan los estudiantes de último año de la secundaria en el área de matemática al ingresar al primer año de las carreras de ingeniería en la Universidad de Morón. Como también, analizar las perspectivas y expectativas tanto de los estudiantes de secundaria como de los de primer año de ingeniería con respecto a la preparación matemática requerida para su éxito académico. Además, estudiar la articulación curricular en el área de matemática entre la educación secundaria y superior, evaluando cómo ésta influye en las trayectorias educativas de los estudiantes de ingeniería; y, proponer estrategias de mejora para la articulación matemática entre la secundaria y la universidad, a fin de reducir las brechas en el conocimiento y optimizar la transición de los estudiantes hacia las carreras de ingeniería.
Al efecto, se llevó a cabo durante el año 2024 un estudio de campo en escuelas secundarias de la zona de influencia de la Universidad de Morón y en la misma Universidad con estudiantes y docentes del área de la matemática y de 1° año de las carreras de ingeniería.

Desarrollo

Para el estudio se tomó el enfoque cuantitativo y cualitativo, utilizando un diseño mixto para obtener una comprensión integral de las dificultades y expectativas de los estudiantes en relación con la articulación curricular en el área de matemáticas entre la secundaria y el primer año de ingeniería.

La metodología se desarrolló en varias fases, considerando:

Descripción de las dificultades y expectativas de los estudiantes y docentes

-Población: Estudiantes de último año de la escuela secundaria en instituciones de la zona de influencia de la Universidad de Morón, así como estudiantes de primer año de las carreras de ingeniería en la misma universidad.
-Muestra: Se seleccionaron dos grupos representativos de estudiantes:
Grupo 1: Estudiantes del último año de secundaria (150 estudiantes).
Grupo 2: Estudiantes del primer año de ingeniería (80 estudiantes).
Además, se incluyen en la muestra docentes de matemáticas de ambas etapas educativas (secundaria y universidad), con un tamaño de muestra de 25 docentes.

Instrumentos de Recolección de Datos

-Encuestas Cuantitativas:
Se diseñó una encuesta estructurada con preguntas cerradas para los estudiantes y docentes, con el fin de conocer las dificultades académicas en matemáticas y las expectativas sobre la articulación curricular.

-Entrevistas Cualitativas:
Se realizaron dos talleres, al inicio y al final del trabajo con docentes de matemática de las escuelas de influencia y docentes de las carreras de ingeniería en cátedras de matemática. La asistencia fue de 35 docentes en cada taller. Durante el trabajo en taller, las preguntas estuvieron orientadas a identificar las percepciones sobre las dificultades matemáticas más comunes, las expectativas respecto al contenido curricular, la construcción de estrategias de didácticas, cómo enseñar, cómo evaluar en el área de la matemática y propuestas de mejora. El segundo taller de cierre fue para la puesta en común de las experiencias y resultados obtenidos, conclusiones y nuevos puntos de partida.

-Análisis de Documentos Curriculares:
Se efectuó un análisis de los programas y contenidos curriculares de matemáticas de la secundaria y de primer año de ingeniería con el objeto de identificar las posibles desconexiones entre lo que se enseña en la secundaria y lo que se requiere en la universidad.

Procedimiento

Se aplicaron las encuestas tanto a estudiantes de último año de la secundaria como a los de primer año de ingeniería. Las encuestas se distribuyeron de manera digital. También se enviaron encuestas a los docentes de matemáticas para conocer su visión sobre las dificultades de los estudiantes y la efectividad de la articulación curricular.

Resultados obtenidos

1. Talleres con docentes de matemáticas:

En los Talleres se identificaron diversos desafíos en el aprendizaje de las matemáticas. Entre los más destacados se encuentran:

Los estudiantes enfrentan dificultades con los fundamentos matemáticos, como la aritmética y el álgebra, lo que afecta su comprensión y capacidad para resolver problemas.
La pandemia interrumpió los hábitos de estudio y afectó las habilidades de razonamiento de los estudiantes, lo que ha generado dificultades adicionales, especialmente en el ingreso a la universidad.

Ha cambiado la percepción sobre el papel de las familias en el apoyo educativo, y algunos estudiantes carecen del respaldo necesario en casa.

El entorno educativo actual está marcado por distractores que dificultan la concentración, impidiendo un aprendizaje efectivo.

La implementación de contenidos fragmentados genera desconexión entre los conceptos matemáticos, dificultando la comprensión integral de las materias.

La falta de razonamiento y la dependencia excesiva de la memorización mecánica en lugar de la comprensión profunda de los conceptos se han identificado como problemas importantes.

2. Encuesta a estudiantes de 1° año de carreras de Ingeniería (80 estudiantes):

Contenidos matemáticos que consideran complicados y que desean reforzar:

- 10% Álgebra lineal

- 30% Cálculo diferencial e integral
- 20% Ecuaciones diferenciales
- 10% Geometría analítica
- 30% Probabilidad y estadística

Razones de dificultad con los contenidos seleccionados:

- La falta de refuerzo en niveles anteriores y la ausencia de algunos temas.
- Escaso conocimiento previo sobre ciertos contenidos.
- Pocas clases sobre la teoría.
- Conceptos sin bases sólidas, como fórmulas largas y falta de razonamiento lógico.
- Dificultad con conceptos abstractos como los logaritmos.

Métodos preferidos para reforzar conocimientos en matemáticas:

- 30% Ejercicios prácticos y problemas resueltos
- 29% Material de estudio adicional (libros, videos, etc.)
- 25% Tutorías personalizadas
- El resto, clases grupales de repaso.

3. Encuesta a estudiantes del último año de la secundaria secundarios (150 estudiantes):

Contenidos matemáticos importantes para aprender en la universidad:

- 10% Operaciones con números (suma, resta, multiplicación, división)
- 25% Comprensión de situaciones problemáticas
- 10% Aplicación de geometría (áreas y volúmenes)
- 20% Comprensión de gráficos
- 30% Trigonometría
- 5% Derivadas e integrales, álgebra

Temas matemáticos que les resultan complicados:

- 25% Álgebra
- 25% Trigonometría
- 15% Geometría
- 15% Cálculo
- 25% Estadística y probabilidad

Utilidad de estos conocimientos matemáticos en su carrera universitaria:

- 40% Para comprender y resolver problemas en su área de estudio
- 20% Para realizar investigaciones y análisis de datos
- 30% Para desarrollar habilidades de pensamiento lógico y crítico
- 10% Para colaborar en proyectos interdisciplinarios

Consideración de clases adicionales o apoyo en matemáticas antes de ingresar a la universidad:

- 68% respondió afirmativamente.

4.Encuesta para docentes de los dos niveles (25 docentes):

Contenidos matemáticos fundamentales pero complicados para los estudiantes en nivel medio y superior:

- 66% Álgebra (ecuaciones lineales, factorización, sistemas de ecuaciones)
- 50% Geometría (figuras geométricas, áreas, volúmenes, trigonometría)
- 50% Cálculo (derivadas, integrales, límites)
- 45% Estadística y probabilidad (gráficos, promedios, análisis de datos)

Razones por las que estos contenidos son complicados:

- 15% Requieren un nivel más avanzado de abstracción y pensamiento abstracto.
- 20% La aplicación de conceptos matemáticos en situaciones problemáticas puede ser desafiante.
- 60% La falta de una base sólida en conceptos previos dificulta la comprensión de nuevos conceptos.
- 15% La complejidad inherente de los temas puede resultar abrumadora para algunos estudiantes.

Estrategias útiles para ayudar a los estudiantes a comprender estos contenidos complicados:

- 50% Proporcionar ejemplos claros y aplicaciones prácticas de los conceptos.
- 20% Fomentar la participación activa y el trabajo en equipo en el aula.
- 10% Utilizar recursos visuales, como gráficos y diagramas, para ilustrar conceptos difíciles.
- 10% Brindar apoyo individualizado a los estudiantes que lo necesiten.
- 10% Utilizar medios digitales, aplicaciones, programas.

Conclusión

El estudio sobre la articulación entre la educación secundaria y la educación superior, especialmente en el área de matemáticas para los estudiantes de ingeniería en la Universidad de Morón, ha puesto de manifiesto las importantes dificultades que enfrentan los estudiantes al hacer la transición de la escuela secundaria al primer año de la universidad. Las brechas en la preparación matemática observadas revelan que, a pesar de los esfuerzos realizados, los programas de enseñanza en la secundaria no logran cubrir de manera efectiva las demandas matemáticas que requieren las carreras de ingeniería. Esto genera desajustes entre las expectativas de los estudiantes y lo que se les exige en la universidad, afectando su desempeño académico desde el inicio.

Además, se ha identificado que la falta de una adecuada articulación curricular entre los niveles educativos contribuye a una desconexión entre los contenidos y enfoques pedagógicos empleados en cada etapa. Esta desconexión no solo afecta a los estudiantes, sino que también impacta en los docentes, quienes a menudo carecen de un espacio de colaboración y actualización que les permita trabajar conjuntamente en la resolución de estos desafíos.

Por lo tanto, la implementación de un enfoque colaborativo y continuo entre los docentes de la secundaria y la universidad de Morón, apoyado por el uso de tecnologías y nuevas metodologías pedagógicas, es crucial para mejorar la transición de los estudiantes y fortalecer su formación matemática. La creación de espacios de intercambio docente, la elaboración de documentos de trabajo comunes, y el diseño de estrategias educativas flexibles son pasos fundamentales para lograr una articulación efectiva.

Por otro lado, al promover el trabajo conjunto entre los niveles educativos, se podrán desarrollar modelos de enseñanza que respondan a las necesidades reales de los estudiantes, garantizando una mejor preparación para enfrentar los retos académicos y profesionales en la Universidad de Morón.

Propuestas a futuro como la organización de talleres de actualización docente, la creación de redes de conocimiento interinstitucionales y la promoción de prácticas educativas innovadoras, contribuirán a crear una comunidad educativa que se retroalimente constantemente. Esta colaboración permitirá no solo mejorar el rendimiento académico en matemáticas, sino también optimizar los procesos de inclusión, permanencia y éxito de los estudiantes en su paso hacia la educación superior.
En fin, la articulación eficaz entre los niveles educativos es un elemento clave para garantizar que los estudiantes no solo adquieran conocimientos matemáticos, sino que los utilicen de manera efectiva en su vida diaria y en su futura carrera profesional. El éxito de este proceso dependerá de la colaboración activa y el compromiso de todos los actores educativos, docentes, estudiantes y autoridades académicas, con el fin de construir una educación de calidad que responda a los retos del siglo XXI.

Referencias Bibliográficas

Celada, V. L., & Lattuada, M. (2018). La evaluación en la Universidad. Algunas experiencias internacionales que pueden contribuir a las estrategias de retención temprana de la población estudiantil. *Debate Universitario*, *6*(12).
Cozza, E. N., & Santachita, S. B. Título: "UNA EXPERIENCIA DE ARTICULACIÓN ESCUELAS–UNIVERSIDAD".
Enríquez Felipe, W. F. (2019). Diseño y aplicación de un programa didáctico de estructuración del proceso enseñanza–aprendizaje del área de matemática basado en el constructivismo y la teoría de los procesos conscientes para mejorar la calidad del aprendizaje del área en los estudiantes de primer grado de secundaria de la Institución Educativa N° 80533 "Horacio Zeballos Gámez" de Carpabamba.
España, G. D. (2013). Ministerio de educación y formación profesional. *Obtenido de http://www. educacionyfp. gob. es/educacion/mc/lomce/curriculo/competencias-clave/digital. html*.
Instituto de Estadística de la UNESCO. (2012). *Resumen de la educación en el mundo 2012: Oportunidades perdidas: El impacto de la repetición de grado y el abandono escolar temprano*. Montreal: Instituto de Estadística de la UNESCO.
Osorio Chávez, S. R., & Rosales León, D. R. (2022). Software educativo Etoys y el logro del aprendizaje constructivista en estudiantes del 1° grado de secundaria de la Institución Educativa Emblemática Daniel Alcides Carrión de Pasco.
Reyes Rodríguez, A. D., Steger, G. E., Ruiz Lugo, M., Vargas Amézquita, S. L., Palacios Vanegas, H. F., & Iglesias Ortega, E. (2021). Innovación de estrategias docentes para mejorar la educación: propuestas desde la investigación.
Rodríguez, F. S. (2023). Factores que inciden en la reprobación de los alumnos en la asignatura "Álgebra Lineal". Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México. *Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería*.
Superior, E., & de, E. I. D. R. (2019). Revisión de antecedentes sobre deserción en educación superior: factores explicativos y estrategias internacionales de retención de estudiantes.

Integración de Tecnologías Digitales para la enseñanza del concepto de límite en el infinito

Carlos BEREJNOI[1], Rosana Mabel COLODRO[1, 2]

(1) **Facultad de Ingeniería / Consejo de Investigación**
(2) Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de Salta
Avda. Bolivia 5150, Salta, Argentina
berejnoi@gmail.com, rcolodro@ing.unsa.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presenta una propuesta de actividad de aprendizaje del tema Límite en el infinito, correspondiente al Cálculo Diferencial e Integral de una variable, contenido abordado en el primer año de las carreras de Ingeniería en Argentina. La actividad se enfoca en el aprendizaje activo, con el uso de simulaciones interactivas y guiado por un docente tutor. Se integran tecnologías digitales, usando aplicaciones de libre acceso: 1) Genially, donde se muestran los conceptos y 2) Geogebra, con el uso de applets interactivos. Estas simulaciones interactivas permiten a los estudiantes modificar variables y visualizar en tiempo real el efecto de estas variaciones en el tema estudiado, lo que promovería un aprendizaje activo y una mayor retención del material. También se incorporan videos —realizados con inteligencia artificial— con voces generadas con el software Balabolka. El tema elegido aborda el cálculo del área de una figura plana, obtenida como el límite de la suma de las áreas de *n* elementos geométricos conocidos, inscriptos en la figura, cuando *n* tiende a infinito. Entre los contenidos previos requeridos están las fórmulas de cálculo de áreas de figuras elementales y el cálculo de límites indeterminados en forma analítica, trabajándose la noción de asíntota horizontal y como contenido transversal el concepto de error. Esta actividad favorecería el aprendizaje activo y serviría para complementar los conocimientos previos necesarios para abordar el cálculo de integrales definidas, ya que los estudiantes al desarrollarla tienen la oportunidad de explorar de manera práctica la resolución de áreas entre curvas.

Palabras clave: Geogebra. Límite en el infinito. Integración de tecnologías digitales. Simulaciones interactivas.

Introducción

Análisis Matemático I (AMI) es una de las primeras asignaturas del área matemática de las carreras de ingenierías de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Salta, cursándose en forma simultánea con Álgebra Lineal y Geometría Analítica. Está ubicada en el primer cuatrimestre del primer año del plan de estudio, y sus contenidos corresponden al Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable real.
El Consejo de Decanos de Ingeniería de Argentina (CONFEDI, 2018) promueve el modelo de "Aprendizaje Centrado en el Estudiante" (ACE) en las carreras de ingeniería, dentro del paradigma del constructivismo. La cátedra de AMI trabaja en ese sentido utilizando diferentes estrategias para mejorar el proceso de aprendizaje de los estudiantes, siendo un pilar básico el uso de tecnologías digitales. Además de las clases presenciales —de teoría y práctica— la asignatura dispone desde 2008 de un espacio en la plataforma Moodle. En este entorno los estudiantes tienen a su disposición materiales didácticos —que cubren todos los temas de la asignatura— en diferentes formatos, entre ellos: videos, actividades interactivas en Geogebra, archivos pdf, lecciones, cuestionarios, y materiales presentados en Genially (Berejnoi y Ornass, 2009; Berejnoi et al., 2010; Berejnoi et al, 2021; Berejnoi, 2022; Berejnoi y Colodro, 2023).
Dentro del paradigma del constructivismo se encuentra el aprendizaje activo, en referencia a cualquier método o enfoque de enseñanza que promueva la participación activa, la reflexión y el compromiso de los estudiantes en lugar de la mera transmisión de información por parte del docente. Mayer (2020), en referencia al aprendizaje activo, afirma que hay dos tipos: actividad conductual y actividad cognitiva, afirmando que el aprendizaje cognitivo activo basado en métodos de instrucción activos pueden incluir las simulaciones y juegos interactivos. En el mismo sentido, Barkley (2010) postula que entre las estrategias para lograr la participación estudiantil se encuentran las actividades con simulaciones interactivas.
Las actividades conductuales implican comportamientos observables que los estudiantes llevan a cabo para interactuar con el contenido. En este sentido, las simulaciones interactivas requieren que los estudiantes realicen acciones físicas o manipulaciones para interactuar con la simulación, como:

- Hacer clic, arrastrar objetos, o ajustar parámetros en la interfaz.
- Explorar diferentes escenarios o realizar pruebas de "qué pasaría si".
- Resolver problemas prácticos manipulando variables en tiempo real.

Las actividades cognitivas implican procesos mentales internos, como análisis, comprensión y reflexión. Las simulaciones interactivas también promueven actividades cognitivas profundas, donde los estudiantes:

- Interpretan datos y visualizaciones generados por la simulación (Procesamiento de información).
- Analizan las relaciones causa-efecto al cambiar parámetros y observar los resultados (Razonamiento y toma de decisiones).
- Aplican conceptos teóricos al contexto práctico de la simulación (Transferencia de conocimiento).
- Evalúan situaciones, hacen hipótesis y ajustan sus estrategias con base en el feedback recibido (Resolución de problemas).

El diseño interactivo de las simulaciones combina las actividades conductuales con las cognitivas, ya que las acciones realizadas (conductuales) sirven como vehículo para activar el procesamiento mental (cognitivo). Por ejemplo, al ajustar una variable en un experimento simulado no solo es una acción, sino que también requiere pensar en cómo esa variable afectará el resultado.
De lo mencionado surge que las simulaciones interactivas ofrecen numerosas ventajas en el aprendizaje de las matemáticas. Entre ellas, proporcionan una plataforma práctica para visualizar conceptos abstractos, lo que facilita la comprensión de temas complejos. Además, permiten a los estudiantes experimentar con diferentes escenarios y ver cómo cambian las variables en tiempo real, lo que promueve un aprendizaje activo y una mayor retención del material.
En el campo de simulaciones activas se destaca el trabajo que realizan en la Universidad de Colorado (Phet interactive simulations, s.f.), donde llevan a cabo investigaciones sobre el diseño de simulaciones y su uso, poniendo a disposición de la comunidad diferentes actividades basadas en ellas. Las clases y recursos de esta página se refieren a cursos de nivel primario y secundario.
Para trabajar con estudiantes de primer año universitario resulta apropiado el software Geogebra para las simulaciones interactivas. Las mismas pueden ser incorporadas a presentaciones en Genially, junto a las consignas y recursos necesarios para realizar actividades. De este modo se integran recursos digitales para favorecer el aprendizaje de los conceptos del Cálculo Matemático. Se eligió Geogebra, no sólo por ser de libre acceso, sino también por su interfaz intuitiva y su capacidad para integrar múltiples áreas de las matemáticas: permite una comprensión más profunda de conceptos abstractos, facilita la experimentación y el descubrimiento, y promueve el aprendizaje activo y colaborativo en entornos educativos.

Durante el cursado de AMI se desarrolla el concepto de límite, siendo éste la columna vertebral de toda la asignatura. Se decidió diseñar una actividad de aprendizaje de *Límite en el infinito*, tema que resulta especial para ser abordado mediante un trabajo áulico que integre recursos digitales en los que se utilizan simulaciones interactivas. En este trabajo se presenta una propuesta de actividad que favorecería el aprendizaje activo de este tema, y que actuaría también como una instancia previa para la comprensión del concepto de integral definida.

Actividad

Descripción

La actividad se centra en el concepto de límite en el infinito, y se estructura así:

1. *Introducción al cálculo de áreas mediante descomposición*
   Los estudiantes comienzan descomponiendo figuras planas conocidas en elementos más pequeños (como rectángulos y triángulos). Se calculan y suman las áreas de estas sub-figuras para obtener el área total de la figura original.
2. *Cálculo del área de un círculo*
   Se plantea el problema de aproximar el área de un círculo utilizando polígonos regulares inscriptos. Con un applet de GeoGebra, los estudiantes incrementan el número de lados del polígono inscripto, observando cómo su área se aproxima al área del círculo.
   - El applet ilustra gráficamente cómo la superficie del polígono (coloreada) va "pintando" el círculo.
   - También muestra el valor numérico de ambas áreas para compararlas.

   2.1. *Generalización analítica*
   Se presentan la fórmula matemática que permite calcular el área de un polígono regular en función del número de lados. Los estudiantes analizan la fórmula y calculan el área como el límite cuando el número de lados tiende al infinito.
3. *Exploración con figuras generadas por funciones*
   El applet permite explorar el área bajo una curva, aproximando su valor con la suma de rectángulos inscriptos.
   - Incrementan el número de rectángulos, visualizando cómo las áreas se aproximan al área real bajo la curva.
   - Se presenta el error cometido en la aproximación.

   3.1 *Generalización analítica*
   Se presentan fórmulas matemáticas que relacionan el área aproximada con el número de figuras inscriptas. Los estudiantes evalúan los límites, identificando y resolviendo indeterminaciones que surgen en el cálculo. Esta etapa fomenta la aplicación práctica de herramientas analíticas.

Esta actividad combina aprendizaje activo, mediación tecnológica y mediación docente para abordar el concepto de límite en el infinito de manera práctica, visual y reflexiva, siguiendo un plan de clase para ser desarrollado en 120 minutos.

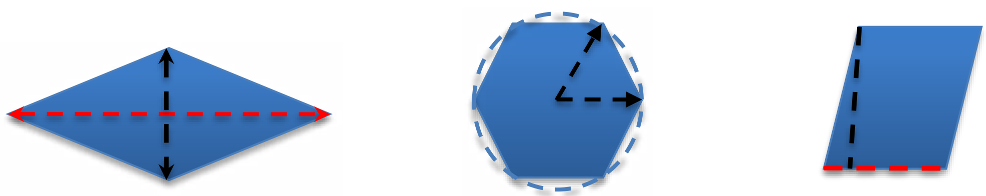
Los estudiantes participan en el desarrollo de la actividad (se fomenta el aprendizaje activo). Usando GeoGebra, experimentan cómo las áreas calculadas convergen hacia el valor real, promoviendo un entendimiento conceptual y visual del límite en el infinito. Antes del cierre, la actividad finaliza con el cálculo de dos límites en el infinito, uno de ellos indeterminado de la forma $0.\infty$. En este momento los estudiantes deben realizar el cálculo analítico de los límites.

Se integran tecnologías digitales, mediante el uso de Genially (como contenedor), Geogebra (para las simulaciones interactivas), Bababolka (voces creadas por inteligencia artificial) y DeepBrain (personajes creados por inteligencia artificial). Las simulaciones con GeoGebra transforman conceptos abstractos en experiencias concretas, ya que los estudiantes observan cómo las áreas aproximadas evolucionan gráficamente, lo que facilita la conexión entre lo abstracto (el límite) y lo tangible (la aproximación visual). La representación gráfica permite identificar el error en las aproximaciones, reforzando la comprensión del concepto de límite.

El docente actúa como tutor a cargo de la clase, siendo el encargado de guiar a los estudiantes durante la actividad, proveyendo de pistas discursivas, y evacuando cualquier duda sobre el uso de los applets en Geogebra, o la forma de dibujar y representar puntos en este software.

Plan de clase

Tema: Límite en el infinito

<table>
<tr><td colspan="2">Conocimientos previos:
Cálculo de área de figuras elementales: cuadrado, rectángulo, triángulo, rombo, trapecio, círculo.
Cálculo de límites en forma analítica.
Objetivos de Aprendizaje:
Utilizar como estrategia de cálculo aproximado del área de una figura plana la composición de figuras elementales (elementos de área).
Calcular el área de una figura plana en forma exacta con el límite en el infinito de la suma de áreas de figuras elementales.
Representar gráficamente las áreas obtenidas a partir de aproximaciones con un número finito de elementos de área.
Materiales:
Tablet, notebook, teléfono celular.
Presentación en Genially.
Tiempo estimado: 120 minutos</td></tr>
<tr><td>10 minutos</td><td>Actividades de preparación
En la presentación se le pedirá al estudiante que calcule el área de las figuras indicadas componiéndolas con rectángulos y/o triángulos, para luego verificar con las fórmulas conocidas. En esta instancia se trabajará sobre papel, no es necesario utilizar recursos digitales.
</td></tr>
<tr><td>10 minutos</td><td>Tiempo de Juego Abierto
Los estudiantes deben acceder a la presentación en Genially, y jugar con la primera simulación (applet de Geogebra), la cual se utilizará luego para la aproximación del área de un círculo por medio de polígonos regulares de n lados.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>30 minutos

30 minutos

20 minutos</td><td>Actividad basada en la simulación
a) En Genially se presenta la idea del cálculo de área en forma aproximada sumando áreas de figuras elementales inscriptas en las figuras de interés.
Los estudiantes deberán, usando dos applets de Geogebra, aproximar las áreas de un círculo (por medio de polígonos regulares de n lados) y de una figura particular donde el techo está dado por una función cuadrática y los otros tres lados son rectos (se suman n rectángulos inscriptos en la curva superior). En este punto se trabaja transversalmente el concepto de error y cómo calcularlo.
b) En Genially se presentan las fórmulas que pueden usarse para calcular el área en función de la cantidad de lados del polígono o de los rectángulos inscriptos usados (n), para ambos casos.
A continuación, los estudiantes deben graficar usando Geogebra los valores de las sucesivas áreas en función del número n. Pueden usar la creación de puntos para cada par (n, área). Así podrán calcular gráficamente el límite en el infinito (valor al que tiende el área de cada figura). Surge el concepto de asíntota horizontal.
c) Se pide a continuación que evalúen analíticamente el límite de las expresiones (fórmulas) que permiten calcular el área cuando n tiende al infinito. En este punto, los estudiantes deben reconocer la indeterminación $0.\infty$, y resolver luego un límite notable.</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>20 minutos</td><td>Cierre
Se finaliza la actividad con una puesta en común, donde se conversa sobre los conceptos trabajados, las conclusiones que pueden sacar los estudiantes respecto al cálculo de áreas —de figuras en general— con herramientas del cálculo matemático.</td></tr>
</table>

Material

Se utiliza Genially como contenedor de las consignas, videos y applets de Geogebra.

La actividad inicia con una pantalla donde hay dos videos con personajes generados por inteligencia artificial, en los que se explica la forma de trabajar con la presentación en Genially (Figura 1). Los videos fueron construidos combinando imágenes de personajes animados creados por la inteligencia artificial DeepBrain (DeepBrain AI, s.f.) y voces generadas en el software Bababolka, usando la herramienta Servicio de TTS en línea, con voces (Español, Argentina) de Microsoft Azure.

El fondo de pantalla de la presentación en Genially simula una tableta digitalizadora, con botones de avance y retroceso, y en algunos casos botones de ayuda que despliegan un texto al posicionar el cursor sobre el botón.

La Figura 2 muestra el contenido tomado desde un applet diseñado *ad hoc* en Geogebra, incrustado en Genially, donde se observa un círculo de radio 2 y un pentágono inscripto, usado para aproximar el área del círculo.

La Figura 3 presenta la aproximación del área bajo la curva de la función $f(x)=x^2$ en el intervalo [0, 3] con 11 rectángulos, también tomada de un applet de Geogebra incrustado en Genially.

Figura 1. Pantalla de inicio de la presentación en Genially

Figura 2. Applet en Geogebra: área de polígono de 5 lados

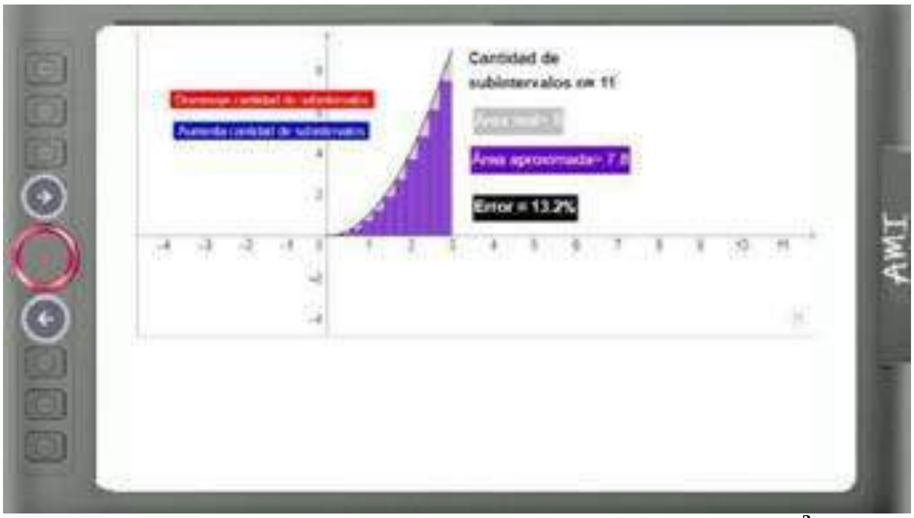


Figura 3. Applet en Geogebra: área bajo la curva f(x)=x^2

Reflexiones y conclusiones

La actividad propuesta utiliza simulaciones interactivas, integrando tecnologías digitales de libre acceso, para contribuir al aprendizaje del tema Límite en el infinito. Su desarrollo también facilitaría, en el futuro, la comprensión de temas propios del Cálculo Matemático, como ser Integral definida, área entre curvas y suma de series numéricas infinitas (en el caso de convergencia). Entre los conceptos que se abordan y trabajan en la actividad se encuentran: error, asíntotas horizontales, cálculo analítico y gráfico de límites en el infinito.

Una ventaja de integrar tecnologías digitales como GeoGebra, Genially y Bababolka, todas de libre acceso, es la posibilidad de ofrecer una experiencia de aprendizaje más dinámica e interactiva, que permite a los estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera visual y manipulativa, con una participación activa de ellos. Esto fomenta el compromiso, la comprensión profunda y el desarrollo de habilidades de resolución de problemas.

El uso de personajes animados creados con inteligencia artificial permite diseñar actividades educativas con guías virtuales que facilitan el aprendizaje de manera interactiva. Estos personajes, dotados de expresividad y dinamismo, captan la atención de los estudiantes, haciendo que las instrucciones para utilizar simulaciones sean más accesibles y comprensibles mediante explicaciones claras y visuales. La inteligencia artificial podría enriquecer la experiencia educativa al combinar innovación y pedagogía, logrando que el aprendizaje sea más atractivo, efectivo y adaptado a las necesidades de los estudiantes.

El rol del docente como tutor-guía es fundamental para garantizar que los estudiantes comprendan los conceptos matemáticos, resuelvan dudas y reflexionen críticamente sobre los resultados obtenidos en las simulaciones.

Con esta actividad se fomenta el desarrollo de habilidades analíticas y de resolución de problemas, esenciales para su formación profesional.

En el futuro, sería útil evaluar esta actividad a través de encuestas a estudiantes y docentes para perfeccionar su diseño e implementación. Este tipo de estrategias pedagógicas no solo contribuyen al aprendizaje de temas específicos, sino que también sientan las bases para una enseñanza más dinámica y significativa en otras áreas de la matemática.

Referencias Bibliográficas

Barkley, E. F. (2010). *Student engagement techniques: A handbook for college faculty*. San Francisco: John Wiley & Sons.

Berejnoi, C., y Ornass, V. O. (2009). *Uso de MOODLE como plataforma educativa en la modalidad b-learning: experiencia en la cátedra de Análisis Matemático I de las Carreras de Ingeniería de la UNSa.* En *Jornada: Aula Virtual en la Universidad ¿Un espacio para todos?*, Salta, Argentina, octubre.

Berejnoi, C., Barros, M. A., y Ornass, V. O. (2010). *La modalidad b-learning como alternativa en el proceso enseñanza-aprendizaje en primer año de carreras científico-tecnológicas*. En *II Jornadas Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas*, Salta, Argentina, 19 al 21 de mayo.

Berejnoi, C., Vidoni, C. M., y Copa, B. E. (2021). *Uso de la plataforma educativa Moodle en el proceso de enseñanza-aprendizaje de matemática en el primer año de carreras de Ingeniería*. En *XXII Encuentro Nacional*

- *XIV Encuentro Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*, EMCI 2021, Montevideo, Uruguay, 19 al 21 de mayo.
Berejnoi, C. (2022). *Preguntas Calculadas en Moodle. Caso de Máximos y Mínimos en Funciones Polinómicas*. En *XXIII Encuentro Nacional y XV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería*, EMCI 2022, UNER y UTN (Paraná), Paraná, Argentina, 4 al 6 de octubre.
Berejnoi, C., y Colodro, R. M. (2023). *Explorando las posibilidades de la inteligencia artificial en la educación matemática: un análisis del caso de chat-GPT*. En *XLVI Reunión de Educación Matemática, Noticiero de la Unión Matemática Argentina*, 58(1).
Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI). (2018). *Propuesta de estándares de segunda generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina: "Libro Rojo de CONFEDI"* (R. Giordano Lerena & S. Cirimelo, Eds.). Universidad FASTA Ediciones.
DeepBrain AI (s.f.). Recuperado el 1 de marzo de 2024, de https://www.deepbrain.io/.
Mayer, R. E. (2020). *Multimedia Learning.* New York: Cambridge University Press.
Phet Interactive simulations. (s. f.). Recuperado el 1 de febrero de 2024, de https://phet.colorado.edu/es/research.

ISBN 978-987-9285-55-8